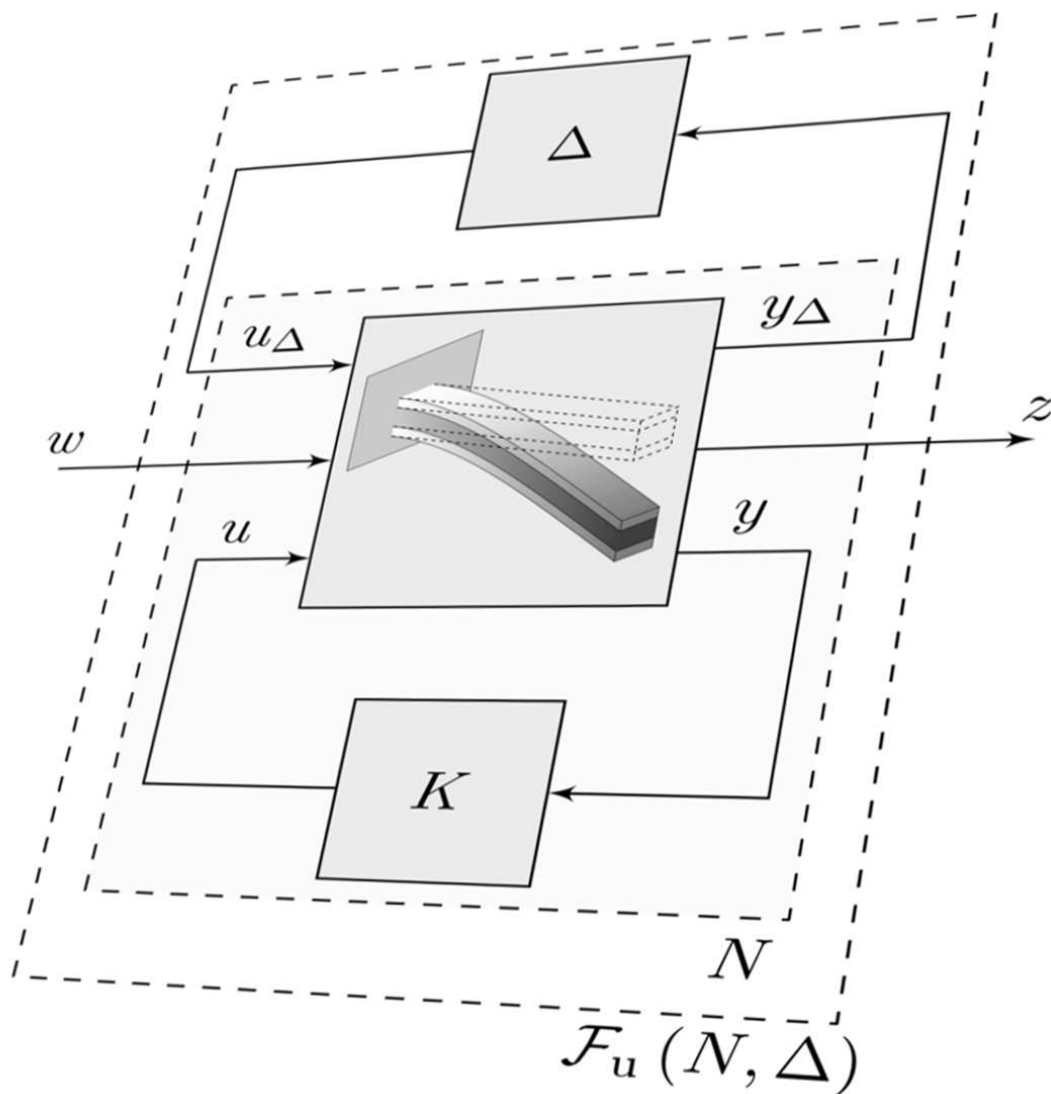

Anwendungsorientierte robuste Regelung einer Klasse unendlich-dimensionaler Systeme am Beispiel eines trimorphen Biegewandlers

Thimo Oehlschlägel
Darmstadt
2016



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Anwendungsorientierte robuste Regelung einer Klasse unendlich-dimensionaler Systeme am Beispiel eines trimorphen Biegewandlers

Vom Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Thimo Oehlschlägel

geboren in Bad Harzburg



Referent: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Christian Bohn

Tag der Einreichung: 14.04.2015

Tag der mündlichen Prüfung: 12.10.2015

D17

Darmstadt 2016

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit thematisiert ein methodisches Vorgehen zur Synthese hoch performanter robuster endlich-dimensionaler Regler für eine Klasse unendlich-dimensionaler Systeme mit unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren am Beispiel eines trimorphen Biegewandlers. Das propagierte Vorgehen zeichnet sich durch einen theoretisch untermauerten Brückenschlag aus, der zwischen der rigorosen mathematischen Theorie unendlich-dimensionaler Systeme einerseits und den ausgereiften, praxiserprobten sowie leicht handhabbaren Syntheseverfahren robuster endlich-dimensionaler Regler nach der \mathcal{H}_∞ -Methode beziehungsweise auf Basis der μ -Synthese andererseits vorgenommen wird. Der durch diese Arbeit geleistete Beitrag zum Eintrag mathematischer Theorie und Methodik in den Methodenbaukasten der Ingenieure umfasst damit ein fundiertes und zugleich praktisches Vorgehen zur Synthese leistungsstarker endlich-dimensionaler Regler für eine umfangreiche Klasse unendlich-dimensionaler Systeme.

Einleitend vermittelt eine vergleichende Gegenüberstellung der im regelungstechnischen Kontext gebräuchlichen mathematischen Realisierungen endlich-dimensionaler Systeme und denen ausgewählter Klassen unendlich-dimensionaler Systeme einen eingängigen Zugang zu der diskutierten Thematik. Mit der Pritchard-Salamon-Klasse wird dabei eine Systemklasse eingeführt, die eine Formulierung des Beispielsystems erlaubt und für die zugleich eine umfangreiche sowie ausgereifte Theorie existiert, die wesentliche systemtheoretische Aspekte abdeckt und dabei vielfach klare Analogien zum endlich-dimensionalen Fall aufweist. Innerhalb dieser Arbeit erfolgt dabei erstmalig die explizite Formulierung der den betrachteten trimorphen Biegewandler charakterisierenden Systemdynamik in der Pritchard-Salamon-Klasse. Dieser Zugehörigkeitsbeweis ersetzt den Nachweis essentieller Systemeigenschaften, wie beispielsweise der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen unter Berücksichtigung einer umfangreichen Klasse von Eingangssignalen und der Existenz verschiedener äquivalenter mathematischer Realisierungsformen.

Im Anschluss an die Ausführungen zur mathematischen Realisierung dient die Analyse und Klassifizierung des Beispielsystems bezüglich ausgesuchter systemtheoretischer Aspekte der Gewinnung eines ausreichend tiefgreifenden Systemverständnisses, um im Hinblick auf die Reglersynthese einen fundierten Entscheidungsprozess zu ermöglichen. Insbesondere erfolgt im Rahmen der Systemanalyse eine Lösung des Eigenwertproblems des Systemoperators, die Klassifizierung des Systemoperators als diagonalisierbarer Operator und die Klassifizierung der dem System zugeordneten stark stetigen Halbgruppe als analytische Halbgruppe. Ferner wird die Nuklearität des dem Beispielsystem zugeordneten Hankel-Operators gezeigt, die approximative Steuer- und Beobachtbarkeit des trimorphen Biegewandlers festgestellt sowie der Nachweis der exponentiellen Stabilität des Beispielsystems erbracht.

Um die Synthese leistungsstarker endlich-dimensionaler Regler zu ermöglichen, umfasst die nachfolgend beschriebene Methodik zur Anwendung indirekter Reglersyntheseverfahren eine konsistente Auswahl des Approximationsverfahrens, der Unsicherheitsbeschreibungen und der eigentli-

chen Reglersyntheseverfahren. Als ein im Hinblick auf die Reglersynthese aussagekräftiges Maß zur Beurteilung der Eignung und Güte eines Approximationsverfahrens wird dabei die Konvergenz im Sinne der Gap-Metrik angesehen. Entsprechend erfolgt der Nachweis der Konvergenz im Sinne dieser Metrik für das zur Approximation des Beispielsystems verwendete modale Approximationsverfahren, welches ein Spezialfall eines Petrov-Galerkin-Verfahrens darstellt. Im Anschluss an die Approximation wird dem unendlich-dimensionalen Charakter der Strecke nur noch implizit durch die Berücksichtigung einer Modellschar Rechnung getragen. Die Wahl der Struktur der dabei zugrunde liegenden Unsicherheitsformulierung erlaubt eine einfache Integration der resultierenden Modellschar in die Entwurfsprobleme der eingesetzten Reglersyntheseverfahren, ohne dabei übermäßige Konservativität zu induzieren.

Im Vorfeld des Reglerentwurfs wird eine an den Regelungszielen orientierte Festlegung auf eine Regelkreisstruktur mit zwei Freiheitsgraden getroffen. Im Einklang mit dieser Struktur erfolgt die Synthese einer Modellfolgeregelung in einem einzelnen Entwurfsschritt sowohl nach der \mathcal{H}_∞ -Methodik als auch mittels der μ -Synthese. Daran schließt sich die Synthese einer Trajektorienfolgeregelung unter Verwendung einer flachheitsbasierten Vorsteuerung sowie einer mittels der μ -Synthese entworfenen Rückführung an. Die ausgewählten Syntheseverfahren gewährleisten jeweils in Kombination mit einem geeignet formulierten Entwurfsproblem a priori die robuste Stabilität des geschlossenen Regelkreises gegenüber der verwendeten Modellschar. Im Fall der μ -Synthese sind hinsichtlich berücksichtigter Modellscharen ohne weitere Analysen zusätzlich Aussagen bezüglich der robusten Performance des geschlossenen Regelkreises möglich.

Der Entwurfsprozess wird durch eine abschließende Analyse aller aus der Verwendung der synthetisierten Regler resultierenden Regelkreise hinsichtlich essentieller nomineller und robuster Regelkreiseigenschaften sowie ihres jeweiligen Verhaltens im Zeitbereich vervollständigt. Der maßgebliche Nachweis für die Eignung des vorgeschlagenen Vorgehens erfolgt durch die Anwendung der jeweiligen Regler auf die reale Strecke, daraus resultiert abschließend eine eindrucksvolle Bestätigung der Leistungsfähigkeit und der praktischen Verwendbarkeit der propagierten Vorgehensweise.

Abstract

This dissertation presents a methodical approach for the synthesis of high-performing, robust, finite-dimensional controllers for a class of infinite-dimensional systems with unbounded input and output operators using a trimorph bending actuator as an example. The propagated approach is characterized by a theoretically substantiated connection between the strict mathematical theory of infinite-dimensional systems on the one hand and the sophisticated, field-tested and easy to handle synthesis methods of robust finite-dimensional controllers according to the \mathcal{H}_∞ -method or on the basis of the μ -synthesis on the other hand. Thus the contribution to implementing mathematical theory and methodology to the methodology toolbox of engineers comprises a well-founded and practical approach for the synthesis of high-performing, finite-dimensional controllers for an extensive class of infinite-dimensional systems.

The subject matter is introduced with a comparison between the mathematical realizations of finite-dimensional systems, which are well-known in control theory, and those of selected classes of infinite-dimensional systems which provide plausible access to the discussed topic. The Pritchard-Salamon class is introduced as a system class which allows the example system to be formulated and for which a comprehensive and sophisticated theory exists which covers essential system-theoretical aspects showing a great number of clear analogies with the finite-dimensional case. As part of this thesis an explicit formulation of the system dynamics - which characterizes the trimorph bending actuator discussed here - in the framework of the Pritchard-Salamon class was performed for the first time. The proof of essential system characteristics, such as the existence and uniqueness of solutions taking into account an extensive class of input signals and the existence of different equivalent mathematical realization forms is replaced by this proof of membership.

Following the explanations of the mathematical realization, the analysis and classification of the example system regarding selected system-theoretical aspects aims at gaining a sufficient degree of in-depth understanding of the system to enable a substantiated decision process regarding the controller synthesis. Especially in the context of system analysis, the eigenvalue problem of the system operator is solved, the classification of the system operator as a diagonalizable operator is performed and the strongly continuous semigroup associated with the system is performed as analytical semigroup. Furthermore, the nuclearity of the Hankel operator associated with example system is proven, the approximative controllability and observability of the trimorph bending actuator is determined and the proof of the exponential stability of the example system is furnished.

To enable the synthesis of high-performance finite-dimensional controllers, the subsequently described methodology regarding the application of indirect controller synthesis procedures comprises a consistent selection of the approximation method, the descriptions of uncertainties and the actual controller synthesis method. The convergence in the sense of the gap metric is considered a meaningful evaluation measure for the suitability and quality of the approximation method regarding the controller synthesis.

Accordingly the convergence in the sense of this metric is proven for the modal approximation procedure applied to the approximation of the example system which is a special case of the Pretrov-Galerkin method. Following the approximation, the infinite-dimensional character of the plant is only taken into account implicitly by considering an uncertainty model set. The selection of the structure of the underlying uncertainty formulations permits the easy integration of the resulting uncertainty model into the design problems of the applied controller synthesis methods without inducing an excessive amount of conservativity.

In the run-up to the controller design, a determination of a control system architecture with two degrees of freedom is made which is oriented towards the control objectives. In accordance with this structure, the synthesis of a model reference control in one single design step according to both the \mathcal{H}_∞ -methodology and the μ -synthesis is made. This is followed by the synthesis of a trajectory reference control using a flatness-based feedforward control and a robust feedback control designed by means of the μ -synthesis. The selected synthesis methods guarantee a priori – in combination with an adequately formulated design problem - the robust stability of the resulting closed loop against the assumed uncertainty model set. In the case of the μ -synthesis, additional statements regarding the robust performance of the closed loop are possible which – in view of the uncertainty model set taken into account - can be made without any further analysis.

The final analysis of all the control loops which result from the use of synthesized controllers with regard to essential nominal and robustness properties and their behavior within the time domain completes the design process. The relevant proof of suitability of the proposed procedure is made by applying the different controllers to the real plant, finally resulting in an impressive confirmation of the capacity and the practical usability of the propagated approach.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iii
Abstract	v
Inhaltsverzeichnis	xii
1 Einleitung und Motivation	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Struktur der Arbeit	10
1.3 Motivation	14
2 Mathematische Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme	18
2.1 Einführung in die Realisierung endlich- und unendlich-dimensionaler Systeme . .	20
2.1.1 Überblick über die Theorie der Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme	21
2.1.2 Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren . .	24
2.1.3 Spektral-Systeme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren	35
2.2 Dynamisches Verhalten ungezwungener linearer Systeme	39
2.2.1 Abstraktes Cauchy-Problem	41
2.2.2 Operatorhalbgruppen und ihre infinitesimalen Erzeuger	42
2.2.3 Erzeuger-Theoreme	50
2.2.4 Zustandsraumdarstellung des ungezwungenen Beispielsystems	54
2.3 Systeme mit unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren	61
2.3.1 Problemstellung	63
2.3.2 Die Pritchard-Salamon-Klasse	64
2.3.3 Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse	73
2.3.4 Übertragungsverhalten des Beispielsystems	82
3 Systemanalyse	90
3.1 Spektralanalyse und -zerlegung	91
3.1.1 Der adjungierte Systemoperator	91
3.1.2 Eigenwertproblem des Systemoperators des Beispielsystems	94
3.1.3 Klassifizierung des Systemoperators des Beispielsystems	99
3.2 Stabilitätsanalyse	103
3.2.1 Stabilität stark stetiger Halbgruppen	104
3.2.2 Stark stetige Halbgruppe des Beispielsystems	106
3.2.3 Weitere Klassifizierung der stark stetigen Halbgruppe des Beispielsystems .	107
3.2.4 Ein-/Ausgangsstabilität unendlich-dimensionaler Systeme	109

3.3	Steuerbarkeit	111
3.3.1	Definition der Steuerbarkeit	112
3.3.2	Steuerbarkeit des Beispielsystems	114
3.3.3	Beobachtbarkeit des Beispielsystems	115
3.3.4	Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit des Beispielsystems	116
4	Steuerungs- und Regelungskonzepte	117
4.1	Ausgesuchte Betrachtungen zum Stand der Regelung unendlich-dimensionaler Systeme	119
4.1.1	\mathcal{H}_∞ -optimale Regelung unendlich-dimensionaler Systeme mittels direkter Ansätze	119
4.1.2	Stabilisierbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme mittels endlich-dimensionaler Regler	123
4.2	Endlich-dimensionale Approximation unendlich-dimensionaler Systeme	123
4.2.1	Die Gap-Metrik als Abstandsmaß	125
4.2.2	Einführung projektionsbasierter Approximationen	128
4.2.3	Eingrenzung der betrachteten unendlich-dimensionalen Systeme	129
4.2.4	Einführung und Einordnung des verwendeten Approximationsverfahrens	130
4.2.5	Konvergenzeigenschaften und Fehlerschranken der modalen Approximation	137
4.2.6	Anwendung der modalen Approximation auf das Beispielsystem	139
4.3	Formulierung einer Modellschar zur Regelung des Beispielsystems	142
4.3.1	Vorüberlegungen zur Formulierung einer Modellschar	143
4.3.2	Multiplikativer Modellfehler als Spezialfall einer unstrukturierten Modellunsicherheit	144
4.3.3	Verallgemeinerte LFT-basierte Formulierung multiplikativer Modellunsicherheiten	146
4.3.4	Formulierung verschiedener Modellscharen zur Regelung des Beispielsystems	148
4.4	Methoden zur Synthese endlich-dimensionaler Regler	150
4.4.1	Das \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblem	152
4.4.2	μ -Synthese	155
4.5	Entwurf endlich-dimensionaler Regler für das Beispielsystem	158
4.5.1	Definition der Regelungsziele	158
4.5.2	Formulierung der Regelungsziele innerhalb des Entwurfsproblems	159
4.5.3	Entwurf einer Modellfolgeregelung mittels \mathcal{H}_∞ - und μ -Methodik	160
4.5.4	Entwurf einer flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelung	172
4.6	Analyse des geregelten Beispielsystems	180
4.6.1	Analyse des geschlossenen Regelkreises A	181
4.6.2	Analyse des geschlossenen Regelkreises A_μ	186
4.6.3	Analyse des geschlossenen Regelkreises B	190
4.6.4	Abschließende Bewertung der Reglersyntheseverfahren	194

5	Zusammenfassung und Ausblick	196
5.1	Zusammenfassung	196
5.2	Ausblick	200
A	Mathematische Modellierung des trimorphen Biegewandlers	203
A.1	Bewegungsgleichungen des trimorphen Biegewandlers	203
A.1.1	Kinetik	204
A.1.2	Kinematik	205
A.1.3	Innere Kräfte und Momente	206
A.1.4	Äußere Kräfte und Momente	208
A.1.5	Zusammenführung und Vereinfachung der Gleichungen	209
A.1.6	Anfangsbedingungen und Randbedingungen	210
A.2	Schwache Formulierung der Bewegungsgleichungen	211
A.2.1	Homogener Teil der Bewegungsgleichungen	212
A.2.2	Inhomogener Teil der Bewegungsgleichungen	213
A.3	Überführung in eine Operatordarstellung	215
A.3.1	Festlegung des grundlegenden Raumes H	216
A.3.2	Definition der Steifigkeitsoperatoren	218
A.3.3	Dämpfungsoperator	222
A.3.4	Bemerkungen zur Äquivalenz verschiedener Normen	223
A.3.5	Resultierende Operatordarstellung	225
B	Grundlegende Definitionen	226
B.1	Vektorräume	226
B.2	Metrische Räume	230
B.3	Normierter Raum	235
B.4	Lineare Operatoren, Lineare Funktionale und Sesquilinearformen	238
B.4.1	Stetige lineare Operatoren und Sesquilinearformen	242
B.4.2	Räume stetiger linearer Operatoren	246
B.4.3	Projektionen	250
B.4.4	Kompakte Operatoren	250
B.4.5	Schatten-Klassen kompakter Operatoren	254
B.4.6	Abgeschlossene lineare Operatoren	255
B.4.7	Dissipative und maximal-dissipative Operatoren	258
B.5	Prähilberträume- und Hilberträume	260
B.5.1	Prähilberträume	260
B.5.2	Hilberträume	262
B.5.3	Basen unendlich-dimensionaler Hilberträume	263
B.5.4	Charakterisierung des topologischen Dualraums eines Hilbertraums	268
B.6	Lineare Operatoren in Hilberträumen	271
B.6.1	Dualer und adjungierter Operator	273

B.6.2	Selbstadjungierte und symmetrische Operatoren	276
B.6.3	Sesquilinearformen in Hilberträumen	279
B.7	Spektraltheorie	281
B.7.1	Resolventen Operator/Resolvente	281
B.7.2	Spektrum eines Operators	283
B.7.3	Eigenwertproblem eines linearen Operators	287
B.7.4	Spektraleigenschaften diskreter Operatoren	287
B.7.5	Spektraleigenschaften selbstadjungierter Operatoren	288
B.7.6	Sektorielle Operatoren	289
B.8	Diagonalisierbare Operatoren und Riesz-Spektraloperatoren	289
B.8.1	Diagonalisierbare Operatoren	290
B.8.2	Ausgesuchte Eigenschaften diagonalisierbarer Operatoren	291
B.8.3	Zu diagonalisierbaren Operatoren adjungierte Operatoren	293
B.8.4	Eigenprojektionen im Fall diagonalisierbarer Operatoren	294
B.9	Raumskalen	295
B.9.1	Allgemeine Einführung Gelfandscher Dreier	295
B.9.2	Definition von Raumskalen anhand positiver Operatoren	297
B.9.3	Interpolationsräume	300
B.10	Begriffe aus der Integrations-/ Differentiationstheorie	302
B.10.1	Lebesgue-Integral und einige zugehörige Funktionenräume	302
B.10.2	Räume integrierbarer vektor- und operator-wertiger Funktionen	307
B.10.3	Differentiationstheorie	313
B.10.4	Sobolew-Räume	317
C	Anhang zur Darstellung unendlich-dimensionaler Systeme	320
C.1	Inhomogenes abstraktes Cauchy-Problem	320
C.1.1	Problemstellung	320
C.1.2	Lösungsbegriffe	321
C.1.3	Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen und ihrer Erzeuger	323
C.2	Betrachtungen zur Zustandsraumdarstellung unendlich-dimensionaler Systeme	324
C.2.1	Beschränktheit von Eingangsoperatoren	324
C.2.2	Beschränktheit von Ausgangsoperatoren	326
C.2.3	Steuer-/Beobachtbarkeitsoperatoren	327
C.3	Anhang zur Pritchard-Salamon-Klasse	328
C.3.1	Ausgesuchte Aussagen über Steuer-/ und Beobachtbarkeitsoperatoren	328
C.3.2	Dualität im Falle von Pritchard-Salamon-Systemen	329
C.3.3	Impulsantwort von Pritchard-Salamon-Systemen	331
C.3.4	Steuer- und Beobachtbarkeits-Gramsche von Pritchard-Salamon-Systemen	332
C.3.5	Hankel-Operatoren von Pritchard-Salamon-Systemen	332
C.3.6	Exponentielle Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit	335
C.3.7	Koprime Faktorisierung	337

C.4	Kriterien für die Zulässigkeit von Ein-/Ausgangsoperatoren	340
C.4.1	Gewichtete Hilberträume	340
C.4.2	Beschränktheit der Ein-/Ausgangsoperatoren	342
C.4.3	Kriterium für die Zulässigkeit des Eingangsoperators	343
C.4.4	Kriterien für die Zulässigkeit einer Ausgangsabbildung	345
C.4.5	Klassifizierung des Hankel-Operators	346
C.5	Geschlossene Lösung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems	348
D	Anhang zur Systemanalyse	353
D.1	Anhang zur Spektralanalyse	353
D.1.1	Eigenwertproblem des Systemoperators des Beispielsystems	353
D.1.2	Eigenwertproblem des adjungierten Systemoperators des Beispielsystems	357
D.1.3	Eigenwertproblem des Steifigkeitsoperators	358
D.1.4	Normierung der Eigenvektoren von A und A^*	359
D.2	Anhang zur Stabilitätsanalyse	360
D.2.1	Differenzierbare und analytische Halbgruppen	360
D.2.2	Kriterien für die Stabilität stark stetiger Halbgruppen	363
D.3	Anhang zur Steuerbarkeitsanalyse	364
D.3.1	Definition der zulässigen Systeme	365
D.3.2	Kriterien für die Steuerbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme	366
E	Anhang zu Steuerungs- und Regelungskonzepte	369
E.1	Definition verschiedener grundlegender Begriffe	369
E.1.1	„Linear Fractional Transformation“	369
E.1.2	Der strukturierte Singulärwert	370
E.1.3	Gap-Metrik	377
E.2	Systeme und Systemverknüpfungen	380
E.2.1	Definition der Strecke, der erweiterten Strecke und des Reglers	381
E.2.2	Definition und Korrektgestellttheit des Standard-Regelkreises	384
E.2.3	Definition und Korrektgestellttheit eines Regelkreises mit zwei Freiheits- graden	389
E.2.4	Definition und Korrektgestellttheit des erweiterten Regelkreises	392
E.2.5	Zur Stabilität geschlossener Regelkreise	398
E.2.6	Der Satz der kleinen Verstärkungen	400
E.3	Analyse geschlossener Regelkreise	402
E.3.1	Eigenschaften geschlossener Regelkreise	403
E.3.2	Nominelle Stabilität eines Regelkreises	403
E.3.3	Nominelle Performance von Regelkreisen	404
E.3.4	Robuste Stabilität im Fall strukturierter Unsicherheiten	405
E.3.5	Robuste Stabilität im Fall unstrukturierter Unsicherheiten	406
E.3.6	Robuste Performance mittels des strukturierten Singulärwertes	408

E.4 Numerische Beschreibung der nominellen Strecke	410
Abbildungsverzeichnis	412
Tabellenverzeichnis	413
Symbolverzeichnis	414
Literaturverzeichnis	442

1 Einleitung und Motivation

Die vorliegende Arbeit thematisiert primär die anwendungsorientierte Synthese robuster endlich-dimensionaler Regler für eine Klasse unendlich-dimensionaler Systeme. Innerhalb des einleitenden Kapitels dient Abschnitt 1.1 zunächst der Heranführung an die im Verlauf der Arbeit diskutierten Inhalte. Im Anschluss an das Aufzeigen der Relevanz unendlich-dimensionaler Systeme im Kontext der allgemeinen System- und Regelungstheorie erfolgt dazu, orientiert an der Zielsetzung dieser Abhandlung, die Begründung für die Auswahl der Themen. Die Ausführungen erlauben damit die Einordnung dieser Arbeit in die allgemeine Theorie zur Regelung unendlich-dimensionaler Systeme sowie eine Abgrenzung gegenüber der in diesem Bereich bestehenden Theorie.

Innerhalb dieser Arbeit wird primär die Pritchard-Salamon-Klasse ([PS85; Sal85; PS87b]) betrachtet, die eine Berücksichtigung im gewissen Rahmen unbeschränkter Ein- und Ausgangsoperatoren und somit auch verschiedener Systeme mit Randeingriff sowie insbesondere des Beispielsystems erlaubt. Im Allgemeinen kann die verwendete Systemklasse allein durch ihren Umfang als praktisch bedeutsam angesehen werden.

Anschließend bietet Abschnitt 1.2 einen Überblick über die Struktur dieser Arbeit, der gleichermaßen als komprimierte Inhaltsangabe und als Orientierungshilfe anzusehen ist.

Da die Ausführungen zur Regelung unendlich-dimensionaler Systeme innerhalb dieser Arbeit nicht zuletzt durch das Bestreben begründet sind, eine hoch dynamische und zugleich präzise Vorgabe der transversalen Auslenkung eines sogenannten trimorphen Biegewandlers zu ermöglichen, beinhaltet Abschnitt 1.3 einführende Worte zu derartigen piezokeramischen Elementen. Die Motivation zur Behandlung eines solchen Beispielsystems wird durch die Nennung der vielfältigen industriellen Verwendungsmöglichkeiten piezokeramischer Elemente erbracht. Ferner wird die Notwendigkeit zur Betrachtung des besagten trimorphen Biegewandlers als unendlich-dimensionales System durch die Einführung der zugehörigen Bewegungsgleichungen unterstrichen.

1.1 Einleitung

Die Fachgebiete der System- und Regelungstheorie beschäftigen sich im Kern mit der Analyse und gezielten Manipulation mannigfaltigster dynamischer Systeme. Schlüssel zur systematischen Handhabung vielfältigster in Theorie und Praxis auftretender Systeme ist deren Klassifizierung anhand diverser Kriterien und ein darauf aufbauendes klassenbasiertes, strukturiertes und methodisches Vorgehen. Dem Bestreben nach universellen Methoden und Verfahren zur Behandlung möglichst allgemeiner Systemklassen steht naturgemäß ein mit Generalisierungen und Abstraktionen anwachsender notwendiger mathematischer Rahmen gegenüber.

Insbesondere die anwendungsorientierte Herangehensweise an regelungstechnische Problemstellungen bedingt daher nicht selten eine mathematische Charakterisierung des Verhaltens der be-

trachteten Systeme mittels der geringstmöglichen und damit gerade ausreichenden Komplexität zur Bewältigung einer spezifischen Aufgabenstellung. Vor diesem Hintergrund erfolgt die mathematische Modellierung realer und damit in letzter Konsequenz stets nichtlinearer sowie örtlich verteilter Prozesse häufig vereinfacht, aber gegebenenfalls in einem hinreichenden Gültigkeitsbereich mit annehmbarer Genauigkeit, in Form endlich-dimensionaler linearer zeitinvarianter Systeme. Ursächlich für die praktische Relevanz dieser Systemklasse, deren dynamisches Verhalten von lediglich einer unabhängigen Größe bestimmt wird, ist nicht zuletzt die Existenz einer ausgereiften, geschlossenen, wohlbekannten und zugleich mathematisch einfach zugänglichen Theorie für derartige Systeme.

Während die Betrachtung komplexerer Systemklassen aus theoretischer Sicht per se reizvoll und begründet erscheint, bedarf es aus der anwendungsorientierten Sicht des Ingenieurs zwingenderer Gründe als nur der wissenschaftlichen Neugier, um die Anwendung generalisierter Darstellungsformen und dadurch bedingt die Verwendung komplexerer, weniger vertrauter mathematischer Methoden zu motivieren. Als wesentliche Beweggründe für die Öffnung praktischer Anwendungsfelder in Richtung neuartiger regelungstechnischer und systemtheoretischer Methoden sind die stetig wachsenden Anforderungen an die Leistung, Präzision, Funktionalität und nicht zuletzt Wirtschaftlichkeit technischer Systeme zu nennen. Diese unentwegte Entwicklung spiegelt sich naturgemäß gleichermaßen in den zugeordneten regelungstechnischen und systemanalytischen Aufgabenstellungen wider und erfordert damit in zunehmendem Maße detailliertere, generalisierte mathematische Systemmodelle, die eine adäquate Berücksichtigung den realen Prozessen innewohnender Charakteristika erlauben. Darüber hinaus rücken durch das Voranschreiten verschiedener Forschungsgebiete dynamische Prozesse in den Fokus der Regelungstechnik, die auf natürliche Weise mathematische Realisierungen in erweiterten Systemklassen erfordern, d.h. bei denen erst eine der Natur der betrachteten Systeme angemessene und damit problemorientierte mathematische Systembeschreibung, kombiniert mit der Anwendung angemessener mathematischer Werkzeuge ein ausreichend tiefgreifendes Systemverständnis zulässt. Als ein typisches und für die Motivation dieser Arbeit wesentliches Beispiel dafür sei an dieser Stelle die zunehmende Bedeutung sogenannter intelligenter Werkstoffe ([BSY96; VVG06; BS+07; Jan07; Sch09; Irs+10; SYB12]) und die damit vielfach einhergehende Notwendigkeit unendlich-dimensionaler Systembeschreibungen genannt.

Allgemein bilden bereits die unendlich-dimensionalen linearen zeitinvarianten Systeme, deren Namensgebung auf die Mächtigkeit der Basis des Zustandsraums der zugrunde liegenden Zustandsraumdarstellungen zurückzuführen ist, eine aus praktischer Sicht bedeutsame und aus dem theoretischen Blickwinkel reichhaltige sowie reizvolle Systemklasse. Da der Fokus dieser Arbeit auf linearen zeitinvarianten Systemen liegt, werden im Hinblick auf eine kompaktere Notation diese Eigenschaften für die letztgenannte Systemklasse und das endlich-dimensionale Pendant stillschweigend vorausgesetzt und stattdessen die Bezeichnung unendlich-dimensionale Systeme beziehungsweise endlich-dimensionale Systeme verwandt.

Unendlich-dimensionale Systeme umfassen durch partielle Differentialgleichungen, also in Abhängigkeit von mehr als einer unabhängigen Größe, zu beschreibende Systeme, die verschiedentlich auch als verteilt parametrische oder örtlich verteilte Systeme bezeichnet werden. Darüber hinaus

führt beispielsweise die mathematische Beschreibung Totzeit-behafteter Systeme auf unendlich-dimensionale Problemstellungen. Die praktische Relevanz unendlich-dimensionaler Systeme lässt sich durch die Benennung einer Vielzahl von Beispielen derartiger Systeme aus den unterschiedlichsten physikalischen Domänen und auch über die Grenzen technischer Systeme hinaus unterstreichen. Aufzählungen fundamentaler partieller Differentialgleichungen, die verschiedenen komplexeren unendlich-dimensionalen Systemen zugrunde liegen, finden sich beispielsweise in [Str95; Eva98; Bur+10]. Aus der Kombination grundlegender partieller Differentialgleichungen mit verschiedenen Randbedingungen und der Kopplung der Gleichungen untereinander resultiert alles in allem eine Vielzahl beschreibbarer dynamischer Prozesse. Darunter finden sich Anwendungen im Bereich der Transportvorgänge, Wärmeleitungs- und dazu äquivalente Diffusionsvorgänge ([Sei00; LL03; Tha11]) oder auch Strömungsprozesse ([AT90; Bre99; CG07]). Unendlich-dimensionale Systembeschreibungen finden sich im Bereich der Quantenmechanik [Gri04], der Mikro-Technologie [RSVS06], ausgedehnter flexibler Strukturen [Ban+88; Bal82; ABF92], des Straßenverkehrs [Ros03], der Ozeanographie [Tem97; Tar06], in der Meteorologie [Ehr11; HH12], der Finanzmathematik [BS73; Fed11] oder der Biologie [For05; Per07; BCC10] und damit für Systeme geringster örtlicher Ausdehnung bis hin zu solchen Systemen mit globalem Ausmaß, aber auch Systemen, die über keine unmittelbare physikalische Entsprechung verfügen.

Neben dem Auftreten unendlich-dimensionaler Systembeschreibungen innerhalb zahlreicher klassischer Problemstellungen ([Nar99]) führen vermehrt aktuelle Forschungsarbeiten auf derartige Systemmodelle. An dieser Stelle seien dazu die im Rahmen der Energieforschung relevante Modellbildung verschiedener Typen von Brennstoffzellen ([Sch+05; Sun+07; CPS09]), die bei der Regelung verschiedener Netzwerke auftretenden Systemmodelle [Mur+03; Özb06; Les09], aus der Nahrungs- und Wasserversorgung erwachsenden Fragestellungen [VKZ07] sowie die Arbeiten im Bereich intelligenter Werkstoffe genannt. Als Beispielsystem dient innerhalb dieser Arbeit ein sogenannter trimorpher Biegeumformer ([Pon05; Bal07]), dessen transversale Dynamik zum Zwecke der modellbasierten Systemanalyse und der modellbasierten Reglersynthese auf Basis der linearen Elastizitätstheorie und der Annahmen von Euler und Bernoulli beschrieben wird. Das piezokeramische Element ist dem Themenbereich der intelligenten Werkstoffe zuzuordnen.

Die Vielfalt regelungstechnischer Aufgabenstellungen im Bereich der unendlich-dimensionalen Systeme korrespondiert mit der Diversifikation der exemplarisch aufgezeigten Anwendungsgebiete. Sie beinhalten damit nicht nur jegliche aus dem Bereich endlich-dimensionaler Systeme bekannten Fragestellungen, sondern darüber hinaus auch verschiedene sowohl vorwiegend theoretisch als auch eher praktisch motivierte Problemstellungen, die keine unmittelbare Entsprechung im Endlich-dimensionalen besitzen. Die ausschließlich im Unendlich-dimensionalen auftretenden theoretischen Fragestellungen sind häufig den Eigenarten unendlich-dimensionaler Räume geschuldet. Aus praktischer Sicht ist nicht zuletzt die zweckmäßige Ausnutzung der bei örtlich verteilten Systemen durch die örtlichen Unabhängigen zusätzlich geschaffenen Freiheitsgrade eine gebräuchliche Fragestellung. Die Ansätze in diesem Bereich umfassen die im bestimmten Sinne optimale Platzierung sowie Formgebung von Sensorik und Aktorik ([KS78; OKS78; JP87; JP88; BJH90; MJ93; MR99; CC00; Wan00; HM03; GE08; Hub10]) oder auch die Optimierung des dem Sys-

tem zugrunde liegenden örtlichen Gebiets an sich ([BB05],[Klo12]). Für gewöhnlich lassen sich ferner Fragestellungen im Zusammenhang mit dem Rand des örtlichen Gebiets örtlich verteilter Systeme, wie beispielsweise Stelleingriffe oder Messungen am Rand, als ohne Entsprechung im Endlich-dimensionalen ansehen.

Unabhängig von der spezifischen Zielsetzung im Umgang mit unendlich-dimensionalen Systemen existiert zu jedem Teilaspekt dieses Themenkomplexes eine reichhaltige, zumeist ausgesprochen mathematisch geprägte Theorie und Methodik. Wohingegen die in der Anwendung zu findenden Methoden zur Handhabung unendlich-dimensionaler Systeme gewöhnlich dem ingenieurmäßigen Vorgehen entspringen und damit die Eigenheiten unendlich-dimensionaler Systeme häufig lediglich unzureichend berücksichtigen. Aus den geringen oder stark verzögerten Umsetzungen theoretischer Erkenntnisse in die praktische Anwendung resultiert für die Regelung realer, als unendlich-dimensional zu betrachtender Systeme, häufig ein übermäßig konservatives Vorgehen und folglich eine Kluft zwischen der erzielten und der eigentlich erzielbaren Performance.

Das Ziel dieser Arbeit ist daher das Aufzeigen eines methodischen Vorgehens zur Synthese hochperformanter robuster endlich-dimensionaler Regler für eine Klasse unendlich-dimensionaler Systeme und die exemplarische Umsetzung des aufgezeigten Vorgehens anhand der Regelung des genannten unendlich-dimensionalen Beispielsystems. Der Nachweis der Eignung und Leistungsfähigkeit der resultierenden Regler wird durch ihre Anwendung auf das reale System erbracht. Das vorgeschlagene Vorgehen zeichnet sich durch einen theoretisch fundierten Brückenschlag aus, der zwischen der rigorosen mathematischen Theorie unendlich-dimensionaler Systeme einerseits und den ausgereiften, praxiserprobten sowie leicht handhabbaren Syntheseverfahren robuster endlich-dimensionaler Regler nach der \mathcal{H}_∞ -Methode beziehungsweise auf Basis der μ -Synthese andererseits vorgenommen wird. Die Vorgehensweise zum Erreichen der Zielsetzung basiert auf einer problemorientierten Auswahl der mathematischen Repräsentation der Strecke im Rahmen einer umfangreichen Klasse unendlich-dimensionaler Systeme und der anschließenden Systemanalyse sowie der weiterführenden Klassifizierung des Systemverhaltens unter Anwendung der geeigneten systemtheoretischen Methoden und Werkzeuge unendlich-dimensionaler Systeme. Allein das rigorose mathematische Vorgehen bei der Darstellung und Analyse unendlich-dimensionaler Systeme führt auf ein ausreichend tiefgreifendes Verständnis des von jeglichen Wirkungen endlich-dimensionaler Approximationen freien Systemverhaltens eines unendlich-dimensionalen Systems, um wie angestrebt eine theoretisch untermauerte und konsistente Auswahl von Approximationsverfahren, Unsicherheitsbeschreibungen sowie Reglersyntheseverfahren zu erlauben und damit letztendlich die Synthese leistungsstarker endlich-dimensionaler Regler zu ermöglichen.

Die klassenbasierte Behandlung unendlich-dimensionaler Systeme ist dem Bestreben nach einem möglichst allgemeingültigen Vorgehen auf der einen Seite und dem Fehlen einer geschlossenen Theorie zur Behandlung allgemeiner unendlich-dimensionaler Systeme auf der anderen Seite geschuldet. In Ermangelung einer geschlossenen Theorie ist die Anwendung weiterführender, aber auch bereits fundamentaler systemtheoretischer Konzepte im Unendlich-dimensionalen weniger selbstverständlich. Jedoch existieren im Unendlich-dimensionalen Systemklassen verschiedensten Umfangs und unterschiedlicher Relevanz, für die die Generalisierbarkeit der aus dem Endlich-

dimensionalen bekannten systemtheoretischen Konzepte in unterschiedlichem Maße nachgewiesen ist. Für endlich-dimensionale Systeme außer Frage stehende Eigenschaften, wie die Existenz und Eindeutigkeit sowie die Regularität der Lösung einer mathematischen Realisierung eines Systems und damit einhergehend die Korrektgestelltheit der zugeordneten Probleme oder auch die äquivalente Überführbarkeit unterschiedlicher mathematischer Realisierungsformen eines Systems, lassen sich im Unendlich-dimensionalen damit bestenfalls auf einen Zugehörigkeitsbeweis zu einer Systemklasse zurückführen.

Für den Nachweis weiterer fundamentaler Systemeigenschaften stehen im Endlich-dimensionalen in der Regel einfach zu überprüfende Kriterien zur Verfügung. Dazu zählt im Zusammenhang mit der Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Zeitbereichslösung der Zustandsraumdarstellung eines Systems, beispielsweise die exponentielle Stabilität des Systems, die sich anhand des Realteils der Eigenwerte der Systemmatrix bestimmen lässt. Ebenfalls elementar sind die eng mit der Fragestellung nach der Minimalrealisierung eines Systems im Zustandsraum verbundenen und zueinander dualen Konzepte der Steuer- und Beobachtbarkeit eines Systems, die sich mittels der Kriterien von Kalman, Hautus oder gegebenenfalls Gilbert überprüfen lassen ([Fö13]). Die Möglichkeit, generelle Aussagen über sämtliche endlich-dimensionalen Systeme anhand simpler Kriterien treffen zu können, resultiert maßgeblich aus den angenehmen Eigenschaften endlich-dimensionaler linearer Vektorräume und denjenigen der systembeschreibenden Abbildungen. So liegt der Zustandsraumdarstellung endlich-dimensionaler Systeme stets ein endlich-dimensionaler Vektorraum zugrunde und die charakteristischen Abbildungen sind allesamt beschränkt und auch kompakt, wobei damit insbesondere die Systemmatrix vollständig durch ihre Eigenwerte zu charakterisieren ist. Die Abbildungen innerhalb der Zustandsraumdarstellung unendlich-dimensionaler Systeme sind bezüglich des Zustandsraums im Allgemeinen jedoch nicht beschränkt und äquivalent dazu nicht stetig. Insbesondere der Systemoperator eines unendlich-dimensionalen Systems ist gemeinhin unbeschränkt und verfügt damit in der Regel über ein Spektrum, welches im Allgemeinen nicht ausschließlich aus Eigenwerten besteht. Die Unterscheidung verschiedener Klassen unendlich-dimensionaler Systeme basiert nicht zuletzt auf dem in den Klassen jeweils zulässigen Maß an Unbeschränktheit der systembeschreibenden Abbildungen.

Bereits die Forderung nach der Korrektgestelltheit ([Had02]) der einem ungezwungenen unendlich-dimensionalen System zugeordneten Zustandsraumdarstellung bedingt eine Einschränkung auf Systeme deren Systemoperator der infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem zugeordneten Zustandsraum ist. Die durch stark stetige Halbgruppen repräsentierbaren unendlich-dimensionalen Systeme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren bilden eine relevante und zugleich theoretisch weitestgehend erschlossene Klasse unendlich-dimensionaler Systeme ([CZ95; LGM99]). Die Theorie dieser Systemklasse lässt sich als direkte Verallgemeinerung der im Endlich-dimensionalen bekannten Ansätze erkennen. Daraus folgt die besondere Eignung der Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren zum Einstieg in die Thematik unendlich-dimensionaler Systeme. Die Einschränkung auf beschränkte Ein-/Ausgangsoperatoren stellt allerdings eine signifikante Limitierung dar, die beispielsweise im Allgemeinen die Möglichkeit nimmt, den in der Praxis nicht seltenen Fall von Randeingriffen zu berücksichtigen.

Innerhalb dieser Arbeit wird daher die Pritchard-Salamon-Klasse ([PS85; Sal85; PS87b]) betrachtet, die eine Berücksichtigung im gewissen Rahmen unbeschränkter Ein-/ und Ausgangsoperatoren und somit auch verschiedener Systeme mit Randeingriff sowie insbesondere des Beispielsystems erlaubt. Im Allgemeinen kann die verwendete Systemklasse allein durch ihren Umfang als praktisch bedeutsam angesehen werden. So lassen sich mittels der Pritchard-Salamon-Klasse neben allen Halbgruppen-Regelsystemen mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren auch verschiedene Totzeit-behaftete Systeme ([PS85; Log92; Keu93]) sowie diverse parabolische und hyperbolische Systeme mit unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren erfassen ([Sal85; PS87b; Cur88; Keu93]). Überdies bietet sich die Verwendung der Pritchard-Salamon-Klasse an, da für diese Systemklasse eine umfangreiche und zugleich ausgereifte Theorie existiert, die wesentliche systemtheoretische Aspekte abdeckt und dabei vielfach klare Analogien zum endlich-dimensionalen Fall aufweist ([Cur88; Cur92b; CZ94; CP94; Cur+94; Cur96],[Log91; Log92],[Keu92b; Keu92a; Keu93],[BK94],[BDKI94] ,[SC00; Sas02],[ID07]). Die durch das Zulassen unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren eröffnete Möglichkeit, eine größere Anzahl von Systemen zu beschreiben, bedingt allerdings eine Reihe mathematischer Generalisierungen. Vor allem ist im Rahmen der Zeitbereichsdarstellung von Pritchard-Salamon-Systemen anstelle eines einzelnen Zustandsraums eine Raumskala zu berücksichtigen, wobei die Systemeigenschaften im Allgemeinen nicht auf allen Räumen der Raumskala übereinstimmen.

Aus der Literatur ist die Formulierung verschiedener Euler-Bernoulli-Balken in der Pritchard-Salamon-Klasse bekannt, vergleiche dazu auch [Cur88] und die dort genannten Quellen. Die in der Literatur als Pritchard-Salamon-Systeme formulierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich allerdings im Vergleich zum Beispielsystem in Bezug auf die Dämpfungsmodelle oder die Randbedingungen. Da keine Quelle nachgewiesen werden konnte, in der ein zum Beispielsystem identisches System in dieser Systemklasse formuliert wird, wird an dieser Stelle davon ausgegangen, dass innerhalb dieser Arbeit erstmals die Formulierung exakt dieser Systemdynamik innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse vorgenommen wird.

Die propagierte klassenbasierte Behandlung unendlich-dimensionaler Systeme erlaubt zum Teil die vereinfachte Formulierung von Kriterien zum Nachweis von Eigenschaften wie Stabilität oder Steuer- und Beobachtbarkeit für alle Elemente einer Systemklasse. Da allerdings die fallspezifische Anwendung der jeweiligen Kriterien auf alle Elemente einer Systemklasse im Allgemeinen dennoch nicht trivial ist, werden an verschiedenen Stellen dieser Arbeit zusätzliche Annahmen hinsichtlich der Eigenschaften des Systemoperators getroffen. Im Besonderen wird wiederholt die Diagonalisierbarkeit des Systemoperators vorausgesetzt, woraus sich vielfältige Vereinfachungen hinsichtlich nahezu jeglicher systemtheoretischer Aspekte ergeben.

Die Diagonalisierbarkeit eines Systemoperators korrespondiert mit der Existenz einer Rieszbasis des Zustandsraums aus den Eigenvektoren des Systemoperators und schließt damit auch all jene Systeme ein, bei denen die Eigenvektoren des Systemoperators eine Orthogonalbasis des Zustandsraums bilden. Für Systeme mit diagonalisierbarem Systemoperator resultiert damit die Möglichkeit, die Generalisierungen der aus dem Endlich-dimensionalen bekannten modalen Konzepte im Hinblick auf die Systemdarstellung, die Korrektgestelltheit, die Stabilitätsanalyse sowie die Un-

tersuchung der Steuer- und Beobachtbarkeit des Systems anzuwenden. Anschaulich und mit der nötigen Vorsicht hinsichtlich der mathematischen Details lassen sich diagonalisierbare Systemoperatoren daher als Verallgemeinerung diagonalisierbarer Systemmatrizen endlich-dimensionaler Systeme auffassen. Der umfangreichen Klasse diagonalisierbarer Operatoren gehören neben dem Systemoperator des Beispielsystems zahlreiche Systemoperatoren praktisch relevanter Systeme an. Auf die exemplarische Nennung von Systemoperatoren, deren Eigenvektoren eine Orthogonalbasis des Zustandsraums bilden, wird an dieser Stelle verzichtet. Über eine Rieszbasis aus Eigenvektoren verfügen alle Sturm-Liouville Systeme ([DDW03]) sowie zahlreiche Systeme aus der linearen Elastizitätstheorie ([GY01; Guo01],[Guo02a; Guo02b; GL02],[XG03][Shu05],[Shu06], [JTW08], [Zha11],[XW11]). Eine weitere realitätsnahe Vereinfachung auf endlich-dimensionale Ein-/Ausgangsräume ergibt sich als Konsequenz des voranstehend geschilderten Bestrebens, als unendlich-dimensional zu betrachtende reale Systeme zu regeln. Zugleich erfordert die Regelung realer unendlich-dimensionaler Systeme die Betrachtung von Regelungsansätzen, die nicht auf vollständigen Zustandsinformationen, sondern auf einer Rückführung geeigneter Meßgrößen beruhen. Neben der Verwendung dynamischer Ausgangsrückführungen lassen sich in diesem Zusammenhang auch Zustandsbeobachter einsetzen. Der Entwurf eines Zustandsbeobachters für einen trimorphen Biegewandler wird beispielsweise in [OK07] vorgestellt. Der Anspruch, endlich-dimensionale Regler zur Regelung unendlich-dimensionaler Systeme einzusetzen, setzt zum einen die Existenz stabilisierender endlich-dimensionaler Regler voraus und bedingt zum anderen eine Forderung an die Robustheit der verwendeten Regler. Für Systeme der Pritchard-Salamon-Klasse ist die Existenz stabilisierender endlich-dimensionaler Regler in Analogie zum Fall endlich-dimensionaler Systeme unmittelbar an die zulässige Stabilisierbarkeit und zulässige Detektierbarkeit der Strecke gebunden.

Die Berücksichtigung der genannten Kriterien sowie die zusätzlichen Forderungen nach einem systematischen Entwurfsprozess und nach der Existenz ausgereifter numerischer Berechnungsmethoden begründen an dieser Stelle die Verwendung der \mathcal{H}_∞ -Methodik und der μ -Synthese als Reglersyntheseverfahren. Beide Syntheseverfahren lassen sich zum systematischen Entwurf von Ausgangsrückführungen einsetzen. In Kombination mit einem geeignet formulierten Entwurfsproblem gewährleisten erfolgreich nach der \mathcal{H}_∞ -Methodik entworfene Regler a priori die robuste Stabilität des geschlossenen Regelkreises gegenüber spezifischen Modellscharen. Im Fall der μ -Synthese sind hinsichtlich berücksichtigter Modellscharen a priori Aussagen bezüglich der robusten Stabilität sowie der robusten Performance des geschlossenen Regelkreises möglich.

Neben der Festlegung der Syntheseverfahren wird beim Reglerentwurf für unendlich-dimensionale Systeme eine Klassifizierung der Syntheseverfahren in Abhängigkeit vom Zeitpunkt der Approximation vorgenommen. Unterschieden werden dabei Ansätze die auf einer endlich-dimensionalen Approximation der Strecke beruhen (indirekte Ansätze, „early-lumping approaches“, „indirect approaches“) und jene Verfahren, denen zum Zwecke der Reglersynthese das unendlich-dimensionale System zugrunde liegt („late-lumping approaches“, „direct approaches“, direkte Ansätze) ([Sch83]).

Innerhalb dieser Arbeit erfolgt eine Fokussierung auf indirekte Entwurfsmethoden. Die Verwendung der indirekten Ansätze begründet sich nicht zuletzt durch die einfache Handhabbarkeit der

\mathcal{H}_∞ -Methodik und der μ -Synthese im Endlich-dimensionalen sowie die vielfach für unterschiedlichste Systeme praktisch nachgewiesene Funktionalität der mit diesen Syntheseverfahren entworfenen Regler. Zusätzlich unterstützt wird die Entscheidung zugunsten indirekter Ansätze durch die Erkenntnisse aus verschiedenen Arbeiten zum Entwurf robuster Regler mittels direkter Ansätze und der Tatsache, dass mittels indirekter Ansätze entworfene endlich-dimensionale linear quadratische Regler ([Mor94a]) und \mathcal{H}_∞ -optimale Regler ([Mor01]) in bestimmten Fällen die Performance entsprechender unendlich-dimensionaler Regler beliebig gut annähern. Die indirekte Synthese leistungstarker endlich-dimensionaler Regler wird allerdings erst durch das vorgeschlagene theoretisch fundierte Vorgehen unter Verwendung der Methoden der Systemtheorie unendlich-dimensionaler Systeme und die darauf aufbauende konsistente Auswahl von Approximationsverfahren, Unsicherheitsbeschreibungen sowie Reglersyntheseverfahren ermöglicht.

Im Anschluss an die Festlegung der Reglersyntheseverfahren verbleibt an dieser Stelle die passende Wahl des Approximationsverfahrens sowie einer passenden Unsicherheitsbeschreibung zur Formulierung einer Modellschar. Die Eignung eines Approximationsverfahrens ergibt sich aus der Konvergenz einer mittels des Verfahrens erzeugten Folge endlich-dimensionaler Systeme gegen das zu regelnde unendlich-dimensionale System im Sinne einer aussagekräftigen Norm. Dabei ist die im Unendlich-dimensionalen nicht zwingend geltende Normäquivalenz zu beachten. Im Hinblick auf die Reglersynthese ist für die Eignung eines Approximationsverfahrens die Konvergenz im Sinne der Gap-Metrik notwendig ([Mor94c] (S. 26), [Mor01]). Die Gap-Metrik ist die schwächste Metrik, hinsichtlich derer die Abbildung von den Bestandteilen der offenen Wirkungskette zum geschlossenen Regelkreis noch stetig von der Strecke abhängt ([ES85], [Vid84], [GS90], [DS94]). Im Fall stabiler unendlich-dimensionaler Systeme und einer Folge ebensolcher endlich-dimensionaler Approximationen kann äquivalent zur Gap-Metrik eine Beurteilung der Konvergenz auf Basis der \mathcal{H}_∞ -Norm der Differenz der Übertragungsfunktionen erfolgen.

Die systematische Herangehensweise an die endlich-dimensionale Approximation des Übertragungsverhaltens unendlich-dimensionaler Systeme wirft im Allgemeinen die Frage auf, welche Approximationsverfahren im Fall welcher Systemeigenschaften auf die gewünschten Konvergenzeigenschaften führen. Innerhalb dieser Arbeit beziehen sich die Betrachtungen zur endlich-dimensionalen Approximation auf exponentiell stabile Pritchard-Salamon-Systeme mit endlich-dimensionalen Ein-/Ausgangsräumen und einem diagonalisierbaren Systemoperator. Für derartige Systeme bietet sich die Approximation auf Basis einer Spektralmethode mittels der assoziierten Eigenprojektionen an. Diese Abbildungen beruhen auf den Eigenvektoren des Systemoperators und des adjungierten Systemoperators und beinhalten damit auf natürliche Weise Informationen über das zu approximierende System. Das in diesem Zusammenhang innerhalb dieser Arbeit geschilderte Vorgehen lässt sich als modale Approximation und insbesondere als Spezialfall eines Petrov-Galerkin-Verfahrens („Non-Standard Galerkin Method“, [EG04]) auffassen.

Neben der Übertragungsfunktion wohnen auch dem Hankel-Operator endlich- und unendlich-dimensionaler Systeme die Informationen über das Übertragungsverhalten eines Systems inne. Daher lässt sich anhand der Eigenschaften dieses Operators die Eignung des hier verwendeten und einiger weiterer Approximationsverfahren überprüfen ([Cur03]). In diesem Kontext ist insbesondere die

Kompaktheit des Hankel-Operators nachzuweisen. Falls ein Hankel-Operator zudem nuklear ist, lässt sich gegebenenfalls auch eine Fehlerschranke hinsichtlich einer Approximation in Abhängigkeit von der Summe der vernachlässigten Hankel-Singulärwerte angeben ([GCP88]). Die im weiteren Verlauf der Arbeit zur Überprüfung der beiden genannten Eigenschaften im Fall bestimmter Systeme gezeigten Kriterien entsprechen anschaulich einem ausreichend schnellen Abfallen des Beitrags höherer Eigenmoden zum Übertragungsverhalten. Damit lässt sich für die besagten Kriterien ein gewisser Bezug zu den Dominanzmaßen von Litz ([Lit83; Fö13]) herstellen.

Aus der Anwendung eines geeigneten Approximationsverfahrens resultiert eine endlich-dimensionale nominelle Strecke, die in Kombination mit einer \mathcal{H}_∞ -normbeschränkten Unsicherheit der Formulierung einer Modellschar dient. Dabei ist sinnvollerweise eine Modellschar zu verwenden, die idealerweise sowohl das mathematische Modell des unendlich-dimensionalen Systems als auch das reale unendlich-dimensionale System beinhaltet. Gleichzeitig ist die Wahl einer Modellschar vorteilhaft, die sich auch auf einfache Weise in das jeweilige Entwurfsproblem der beiden ausgewählten Reglersyntheseverfahren integrieren lässt, ohne dabei übermäßige Konservativität zu induzieren. Durch dieses Vorgehen wird damit beim Entwurf der endlich-dimensionalen Regler dem unendlich-dimensionalen Charakter der Strecke nur noch implizit durch die Berücksichtigung einer Modellschar Rechnung getragen.

Neben der Berücksichtigung einer Modellschar erlauben beide verwendeten Reglersyntheseverfahren auf bequeme und bekannte Weise die Berücksichtigung von Regelungszielen durch den gezielten Einsatz frequenzabhängiger Gewichtungen verschiedener charakteristischer Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises. Letztendlich zielen beide Entwurfsverfahren damit auf eine Formgebung der frequenzabhängigen Singulärwertverläufe des geschlossenen Regelkreises ab („closed-loop shaping“). Ein wesentlicher Unterschied hinsichtlich der mittels der beiden Reglersyntheseverfahren entworfenen Regler betrifft die a priori für den geschlossenen Regelkreis zu garantierenden Robustheitseigenschaften. Insbesondere lassen sich a priori Aussagen hinsichtlich der robusten Performance des geschlossenen Regelkreises gegenüber im Entwurfsproblem geeignet berücksichtigter Modellscharen in der Regel lediglich im Fall mittels der μ -Synthese berechneter Regler treffen.

Unabhängig vom Entwurfsverfahren ist ein essentieller Aspekt beim Entwurf zweckmäßiger Regler eine den Regelungszielen angemessene Festlegung der Regelkreisstruktur. Die Regelung des Beispielsystems dient primär der hoch agilen, präzisen und stationär genauen Nachführung der Regelgröße im Anschluss an sprungförmige Änderungen der Führungsgröße. Um generell hinsichtlich des geschlossenen Regelkreises die Möglichkeit der unabhängigen Vorgabe des Führungsübertragungsverhaltens und des Übertragungsverhaltens von Störungen zu haben, wird eine Reglerstruktur mit zwei Freiheitsgraden verwendet ([Fö13]). Grundsätzlich besteht die Option, die zwei Freiheitsgrade innerhalb einer solchen Reglerstruktur unter Zuhilfenahme unterschiedlichster Syntheseverfahren zu nutzen. An dieser Stelle wird der Entwurf von Modellfolgeregelungen auf Basis der beiden genannten Reglersyntheseverfahren thematisiert und zudem die Synthese einer Trajektorienfolgeregelung auf Basis einer flachheitsbasierten Vorsteuerung und einer mittels der μ -Synthese entworfenen Rückführung gezeigt. Zusätzliche strukturelle Maßnahmen gewährleisten dabei je-

weils die Einhaltung des Prinzips des inneren Modells („Internal Model Principle“, [FW76]) und erlauben damit der Forderung nach stationärer Genauigkeit im Falle sprungförmiger Änderungen der Führungsgröße nachzukommen.

Die ganzheitliche Herangehensweise an die Reglersynthese beinhaltet im Anschluss an den eigentlichen Reglerentwurf die Analyse des geschlossenen Regelkreises hinsichtlich charakteristischer Eigenschaften. Im Allgemeinen bietet sich dabei unabhängig vom Reglersyntheseverfahren zum Nachweis der robusten Stabilität und der robusten Performance des geschlossenen Regelkreises die Verwendung der μ -Analyse an. Im Falle mittels der μ -Synthese entworfener Regler ist dieses Vorgehen nur notwendig, falls die zur μ -Analyse verwendete Modellschar von der bei der Reglersynthese eingesetzten Modellschar abweicht.

Selbst im Fall eines weitestgehend geschlossenen theoretischen Vorgehens ist der maßgebliche Nachweis der Eignung sowie der Leistungsfähigkeit eines Reglers stets durch die Anwendung auf die reale Strecke und damit in der Praxis zu erbringen. Die im Rahmen dieser Arbeit bei der Regelung des realen Beispielsystems erzielten Resultate belegen exemplarisch die durch das hier propagierte theoretisch fundierte und problemorientierte Vorgehen im geschlossenen Regelkreis schlussendlich zu erzielende Leistungsfähigkeit.

1.2 Struktur der Arbeit

Im Anschluss an den Überblick über die Strukturierung dieser Arbeit zeigt Abschnitt 1.3 verschiedene Anwendungen von Biegewandlern und motiviert damit die Wahl des Beispielsystems. Darüber hinaus werden in Abschnitt 1.3 die Bewegungsgleichungen des trimorphen Biegewandlers eingeführt.

Nachfolgend dient das Kapitel 2 der Einführung grundlegender Begrifflichkeiten im Zusammenhang mit der Darstellung sowie klassenbasierten Betrachtung unendlich-dimensionaler Systeme und dabei primär der Definition einer Systemklasse, die einen ausreichenden mathematischen Rahmen zur Behandlung des Beispielsystems bietet. Durch eine vergleichende Gegenüberstellung der im regelungstechnischen Kontext gebräuchlichen mathematischen Realisierungen endlich-dimensionaler Systeme und denen ausgewählter Klassen unendlich-dimensionaler Systeme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren wird dazu eingangs in Abschnitt 2.1 ein unkomplizierter Zugang zu der skizzierten Thematik vermittelt.

Die anschließenden Ausführungen zu ungezwungenen unendlich-dimensionalen Systemen in Abschnitt 2.2 dienen der Einschränkung der Betrachtungen auf Systeme, denen ein korrekt gestelltes abstraktes Cauchy-Problem im Sinne von Hadamard ([Had02]) zuzuordnen ist. Zur Überprüfung der Korrektgestelltheit eines abstrakten Cauchy-Problems werden auf Basis der Erzeuger-Theoreme für eine Klasse hier relevanter Systemoperatoren einfach zu handhabende notwendige und hinreichende Bedingungen abgeleitet. Die Anwendung der theoretischen Grundlagen zu ungezwungenen unendlich-dimensionalen Systemen auf das Beispielsystem erlaubt nachfolgend die

Formulierung einer entsprechenden Zustandsraumdarstellung, die den Anforderungen an ein korrekt gestelltes Problem genügt.

Die Zustandsraumdarstellung des inhomogenen Beispielsystems weist einen im Hinblick auf den Zustandsraum des ungezwungenen Beispielsystems unbeschränkten Eingangoperator auf. Aufgrund des unbeschränkten Eingangoperators wird mit der Pritchard-Salamon-Klasse in Abschnitt 2.3 eine umfangreiche Systemklasse eingeführt, die unbeschränkte Ein-/ und Ausgangsoperatoren in einem Rahmen zulässt, der eine Formulierung des Beispielsystems erlaubt. Durch die Formulierung des Beispielsystems als reguläres Pritchard-Salamon-System wird die Zugehörigkeit des Beispielsystems zu dieser Systemklasse gezeigt. Der Zugehörigkeitsbeweis ersetzt für das Beispielsystem an dieser Stelle den Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der zugehörigen Zustandsraumdarstellung. Gleichzeitig ergibt sich für das unendlich-dimensionale Beispielsystem die Existenz von äquivalenten Realisierungen im Zustandsraum und als Übertragungsfunktion im Bildbereich der Laplace-Transformation. Letztgenannte Realisierungsform wird für das Beispielsystem in unterschiedlichen Varianten gezeigt. Die geschlossene Formulierung des Übertragungsverhaltens wird dabei für die Parametrierung aller genutzten Realisierungsformen anhand eines am realen Beispielsystem gemessenen Frequenzgangs genutzt.

Kapitel 3 zeigt die Analyse und Klassifizierung des Beispielsystems bezüglich ausgesuchter systemtheoretischer Aspekte und dient damit der Gewinnung eines ausreichend tiefgreifenden Systemverständnisses, um im Hinblick auf die letztendlich angestrebte Reglersynthese einen fundierten Entscheidungsprozess zu ermöglichen.

Eingangs wird im Rahmen der Spektralanalyse in Abschnitt 3.1 der Nachweis erbracht, dass die Eigenvektoren des Systemoperators eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden und dass der Systemoperator diagonalisierbar ist. Die bedeutsamsten Vereinfachungen, die sich für Systeme mit diagonalisierbaren Systemoperatoren gegenüber allgemeinen unendlich-dimensionalen Systemen ergeben, betreffen die Erzeuger-Theoreme sowie die Stabilitätsanalyse.

Abschnitt 3.2 beinhaltet zunächst den Nachweis, dass der Systemoperator des Beispielsystems eine stark stetige Halbgruppe auf dem Zustandsraum erzeugt. Daran schließen sich weiterführende Charakterisierungen der stark stetigen Halbgruppe des Beispielsystems an, woraus letztendlich die Erkenntnis resultiert, dass die Wachstumsgrenze der stark stetigen Halbgruppe des Beispielsystems mit der Spektralschranke des Systemoperators korrespondiert. Als Konsequenz dieser Übereinstimmung lässt sich die exponentielle Stabilität des Beispielsystems allein aus der Lage der Eigenwerte des Systemoperators folgern.

Essentiell für die Synthese auf Ausgangsrückführungen beruhender, stabilisierender Regler ist die Kenntnis über die Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit der Strecke. In Abschnitt 3.3 erfolgt daher in Vorbereitung der Analyse der Steuer- und Beobachtbarkeit des Beispielsystems einleitend die Definition unterschiedlicher Steuerbarkeitsbegriffe für unendlich-dimensionale Systeme sowie die Einführung ausgesuchter Kriterien zum Nachweis dieser Systemeigenschaft. Abschließend zeigt Abschnitt 3.3.2 die Anwendung der eingeführten Kriterien zur Analyse der Steuerbarkeit und unter Ausnutzung der Dualität auch der Beobachtbarkeit des Beispielsystems.

Das Kapitel 4 zeigt exemplarisch anhand des Beispielsystems ein systematisches Vorgehen mittels eines indirekten Ansatzes zur Synthese robuster endlich-dimensionaler Regler für gewisse Klassen unendlich-dimensionaler Systeme. Das vorgeschlagene Vorgehen basiert auf einer problemorientierten und konsistenten Wahl eines Approximationsverfahren, der Formulierung einer Modellschar und dem Einsatz der Reglersyntheseverfahren. Der aus anwendungsorientiertem Blickwinkel wichtigste Eignungsnachweis für die vorgestellte Methodik wird auf Basis der während der Regelung des realen Beispielsystems mit den synthetisierten Reglern gewonnenen Resultate erbracht.

In Abschnitt 4.1 wird die Fokussierung auf die \mathcal{H}_∞ -Methodik und die μ -Synthese und im Rahmen dessen auf die Anwendung eines indirekten Ansatzes begründet. Die Entscheidungsfindung wird dabei durch einen Blick auf die Problemstellung, Überlegungen zur praktischen Relevanz und die Handhabbarkeit der Syntheseverfahren sowie gestützt auf einen Überblick über in diesem Zusammenhang relevante Literatur begründet. Nachfolgend dient Abschnitt 4.2 der Gewinnung einer endlich-dimensionalen Approximation des Beispielsystems zum Zwecke der Reglersynthese. Dazu wird die im Detail im Anhang E.1.3 definierte Gap-Metrik als ein im Hinblick auf die Reglersynthese aussagekräftiges Maß zur Beurteilung der Güte einer Approximation vorgestellt. Daran anschließend erfolgt die Einführung der theoretischen Grundlagen des hier verwendeten modalen Approximationsverfahrens, welches als Spezialfall eines allgemeinen Petrov-Galerkin-Verfahrens anzusehen ist. Durch die exemplarische Anwendung der modalen Approximation wird abschließend eine endlich-dimensionale Approximation des Beispielsystems erzeugt, die als nominelle Strecke für den Reglerentwurf dient. Die Kriterien zur Festlegung der nominellen Strecke orientieren sich dabei unter anderem an der zur Reglersynthese zu formulierenden Modellschar und der dabei verwendeten Unsicherheitsbeschreibung.

In Abschnitt 4.3 werden unterschiedliche Modellscharen auf Basis strukturell übereinstimmender Unsicherheitsformulierungen zum Zwecke der Reglersynthese und der Analyse des geschlossenen Regelkreises in LFT Formulierung eingeführt.

Abschnitt 4.4 gibt einen kurzen Überblick über die eingesetzten Reglersyntheseverfahren, stellt die wesentlichen Eigenschaften der Verfahren dar und enthält ferner eine kritische Diskussion der \mathcal{H}_∞ -Methodik und der μ -Synthese. In Abschnitt 4.4 erfolgt die eigentliche Reglersynthese für das Beispielsystem. Aufbauend auf den eingangs definierten Regelungszielen wird der Regelung generell eine Regelkreisstruktur mit zwei Freiheitsgraden zugrunde gelegt. Im Einklang mit dieser Struktur erfolgt die Synthese einer Modellfolgeregelung in einem einzelnen Entwurfsschritt sowohl nach der \mathcal{H}_∞ -Methodik als auch mittels der μ -Synthese. Daran schließt sich die Synthese einer Trajektorienfolgeregelung unter Verwendung einer flachheitsbasierten Vorsteuerung sowie einer mittels der μ -Synthese entworfenen Rückführung an.

Der Anhang 4.6 beinhaltet die Analyse aller aus der Verwendung der synthetisierten Regler resultierenden Regelkreise hinsichtlich maßgeblicher nomineller und robuster Regelkreiseigenschaften sowie ihres Verhaltens im Zeitbereich. Hervorzuheben sind in Abschnitt 4.6 insbesondere die im Rahmen der Zeitbereichsbetrachtungen präsentierten, aus der Regelung des realen Beispielsystems stammenden Resultate.

Abschließend wird innerhalb von Kapitel 5 ein Resümee dieser Arbeit gezogen und im Rahmen eines Ausblicks auf verschiedene interessante weiterführende Themen aufmerksam gemacht.

Der erste Abschnitt des Anhangs beinhaltet die detaillierte Modellbildung des Beispielsystems auf Basis der Euler-Bernoulli-Balkentheorie. Ergänzend zu der Beschreibung der transversalen Dynamik des Beispielsystems mittels einer partiellen Differentialgleichung finden sich in Abschnitt A verschiedene Formulierungen der Dynamik des trimorphen Biegewandlers, darunter die schwache Formulierung der Bewegungsgleichung sowie eine Darstellung auf Basis von Operatoren. Eine Analyse der Eigenschaften der in der letztgenannten Beschreibungsform auftretenden Operatoren erlaubt an dieser Stelle wichtige Schlüsse im Hinblick auf die Konstruktion des Zustandsraums des Beispielsystems.

Eine Zusammenstellung ausgesuchter grundlegender Definitionen aus verschiedenen, innerhalb dieser Arbeit relevanten mathematischen Teilgebieten findet sich in Abschnitt B.

Die Ausführungen zur Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme werden durch die Inhalte von Kapitel C ergänzt. In Abschnitt C.1 sind einige mathematische Details zu den Lösungsbegriffen des inhomogenen abstrakten Cauchy-Problems sowie hilfreiche Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen und ihrer Erzeuger zu finden. Abschnitt C.2 enthält die Herleitung von Kriterien zur Beschränktheit von Ein-/Ausgangsoperatoren im Falle von Spektralsystemen. Die resultierenden Kriterien lassen sich auf den Eingangsoperator des Beispielsystems anwenden und zeigen dessen Unbeschränktheit hinsichtlich des Zustandsraums des ungezwungenen Systems.

Ergänzend zu den essentiellen Eigenschaften von Pritchard-Salamon-Systemen in Abschnitt 2.3 enthält Abschnitt C.3 weitere relevante Ausführungen zu dieser Systemklasse. Dazu zählen Eigenschaften der Steuer- und Beobachtbarkeitsoperatoren von Pritchard-Salamon-Systemen, Betrachtungen zur Dualität im Falle dieser Systemklasse sowie die Einführung der Impulsantwort, der Gramschen Operatoren und des Hankel-Operators derartiger Systeme. Die im Hinblick auf die Klassifizierung des Hankel-Operators des Beispielsystems und damit dessen endlich-dimensionale Approximation relevanten Kriterien finden sich in Abschnitt C.4.5

Die Formulierung des Beispielsystems als reguläres Pritchard-Salamon-System wird durch die in Abschnitt C.4 hergeleiteten Kriterien für die Zulässigkeit von Ein-/Ausgangsoperatoren von Pritchard-Salamon-Systemen mit diagonalisierbarem Systemoperator unterstützt.

In Kapitel D werden zur Systemanalyse benötigte Grundlagen aufgeführt. Das detaillierte Vorgehen zur Lösung des Eigenwertproblems des Beispielsystems und assoziierter Eigenwertprobleme wird in Abschnitt D.1 vorgestellt. Abschnitt D.2 enthält weiterführende Klassifizierungen stark stetiger Halbgruppen und Kriterien für die Stabilität ebensolcher Halbgruppen, die als Grundlage für die Stabilitätsanalyse des Beispielsystems dienen.

In Kapitel E finden sich grundlegende Begrifflichkeiten und Betrachtungen im Zusammenhang mit den hier verfolgten Steuerungs- und Regelungsansätzen. Die Grundlagen umfassen dabei in Abschnitt E.1 Ausführungen zum strukturierten Singulärwert und die Einführung der Gap-Metrik als Abstandsmaß. Die Definition des Standard-Regelkreises sowie des allgemeinen Regelkreises mit

zwei Freiheitsgraden findet sich in Abschnitt E.2, dort werden zudem neben den charakteristischen Funktionen derartiger Regelkreise auch deren grundlegende Eigenschaften wie Korrektgestelltheit und Stabilität diskutiert. In diesem Zusammenhang beinhaltet Abschnitt E.2 auch eine vergleichsweise allgemeine Formulierung des Satzes der kleinen Verstärkungen.

Abschnitt E.3 dient der Einführung relevanter Eigenschaften geschlossener Regelkreise und verschiedener Kriterien zu deren Nachweis. Insbesondere wird an dieser Stelle der Grundstein zur μ -Analyse und damit zur Untersuchung der robusten Stabilität und robusten Performance geschlossener Regelkreise auf Basis des strukturierten Singulärwertes gelegt.

Da innerhalb der vorliegenden Arbeit verschiedenste Fragestellungen aus dem Bereich unendlich-dimensionaler Systeme betrachtet werden, wird auf die Erstellung einer einzelnen generellen Literaturübersicht verzichtet. Stattdessen erfolgt an verschiedenen Stellen eine ausführliche Nennung und Diskussion jeweils spezifischer themenbezogener Publikationen. Hervorzuheben sind dabei die Literaturübersicht zur Realisierung und klassenbasierten Formulierung unendlich-dimensionaler Systeme in 2.1.1, die Benennung verschiedener Arbeiten zu Pritchard-Salamon-Systemen in Abschnitt 2.3.2, die Übersicht zum Stand der robusten Regelung unendlich-dimensionaler Systeme mittels direkter Ansätze und der Stabilisierung unendlich-dimensionaler Systeme mittels endlich-dimensionaler Regler in Abschnitt 4.1 sowie die Auswahl von Quellen zur Steuerbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme in Abschnitt D.3.

1.3 Motivation

Die Betrachtungen unendlich-dimensionaler Systeme innerhalb dieser Arbeit begründen sich primär im Bestreben zur hoch dynamischen und zugleich äußerst präzisen Vorgabe der transversalen Auslenkung eines sogenannten trimorphen Biegewandlers ([Pon05; Bal07]). Derartige piezokeramische Elemente bestehen aus einem passiven Trägermaterial, das zwischen zwei piezokeramischen Schichten platziert ist. Abbildung 1.1a zeigt den verwendeten trimorphen Biegewandler, während Abbildung 1.1b den Biegewandler in einer Haltevorrichtung zeigt. Abbildung 1.1c enthält eine abstrahierte Prinzipskizze des betrachteten piezokeramischen Elements.

Sowohl trimorphe Biegewandler als auch piezokeramische Biegewandler mit einer oder mehreren piezokeramischen Schichten zeichnen sich durch eine strukturell einfache und kompakte Konstruktion aus, die eine einfache Skalierung und Anpassung der Parameter dieser Elemente an die Anforderungen unterschiedlichster Anwendungen erlaubt. Unter Ausnutzung des direkten beziehungsweise indirekten (inversen, reziproken) piezoelektrischen Effekts [Bal07] (S. 18) lassen sich piezokeramische Biegewandler grundsätzlich sowohl als Sensor als auch als Aktor einsetzen. Im Betrieb sind Biegewandler nahezu reibungsfrei und effizient, zudem lassen sich mit ihnen geringe Ansprechzeiten sowie vergleichsweise große Auslenkungen unter Verwendung geringer Spannungen realisieren. Zusammen mit ihrer Zuverlässigkeit und der Möglichkeit, derartige Aktoren unter extremen klimatischen Bedingungen zu betreiben, eröffnen sich damit eine Vielzahl von Anwendungsgebieten, zu denen beispielsweise Textilmaschinen, Blindenlesesysteme, Tintenstrahldrucker,

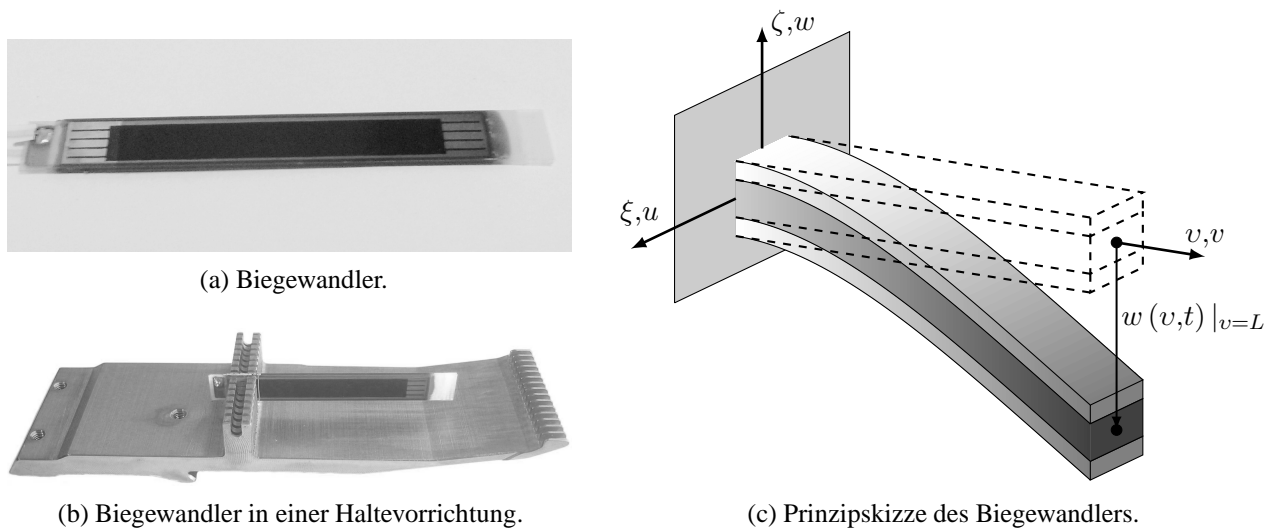


Abbildung 1.1: Aufnahmen und Prinzipskizze des trimorphen Biegewandlers.

Ultraschallzerstäuber, Ventile und Positioniersysteme im Bereich der Optik sowie für Festplatten zählen ([Sch04; Bal07; HLW08]).

Unabhängig vom spezifischen Anwendungsgebiet lässt sich für jegliche kommerzielle Märkte ein zunehmender Wettbewerbsdruck feststellen. Eine erfolgreiche Marktteilnahme setzt die Aufrechterhaltung der Wettbewerbsfähigkeit angebotener Produkte voraus und mündet damit in einem verstärkten Innovationsdruck und letztendlich der Notwendigkeit, die Leistungsfähigkeit und Funktionalität der Produkte stetig zu erhöhen. Für komplexe technische Produkte betrifft diese Entwicklung neben dem Gesamtsystem auch sämtliche Teilsysteme und damit nicht zuletzt auch gegebenenfalls vorhandene Aktoren und Sensoren. Insbesondere in Kombination mit der rasanten Entwicklung im Bereich der Rechnertechnik sowie Mikro-Kontroller und der dadurch verfügbaren Rechenkapazitäten eröffnen sich in diesem Zusammenhang vielfältige, interessante Möglichkeiten zur Anwendung der modernen Methoden der System- und Regelungstheorie.

Diese Arbeit und die darin diskutierte Reglersynthese lässt sich in dem geschilderten Kontext als Beitrag zur Erhöhung der Leistungsfähigkeit und Präzision eines bestehenden Aktors auffassen. Aufgrund der Charakteristik der dabei betrachteten piezokeramischen Elemente setzt eine gezielte Vorgabe ihrer transversalen Auslenkung eine Beschreibung der Dynamik in Abhängigkeit von Ort und Zeit voraus. Zu diesem Zweck erfolgt im Anhang A die detaillierte Modellbildung der transversalen Dynamik des trimorphen Biegewandlers auf Basis der linearen Elastizitätstheorie und der Annahmen von Euler und Bernoulli. Als Resultat dessen wird die relevante Dynamik des Beispielsystems auf dem eindimensionalen örtlichen Gebiet $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ für $t > 0$ unter Berücksichtigung von viskoser und Kelvin-Voigt-Dämpfung durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial t^2} + \alpha_S \frac{\partial^4 w(v,t)}{\partial v^4} + 2\alpha_{KV} \frac{\partial^5 w(v,t)}{\partial v^4 \partial t} + 2\alpha_V \frac{\partial w(v,t)}{\partial t} = \alpha_{In} \frac{\partial^2 \chi(v)}{\partial v^2} V_{Pk}(t) \quad (1.1)$$

beschrieben. Die gegenüber beiden Unabhängigen konstanten Koeffizienten $\alpha_S, \alpha_{KV}, \alpha_V$ und α_{In} werden im Detail in Gleichung (A.24) definiert. Die Vervollständigung der Problembeschreibung erfordert die Angabe des Systemverhaltens auf dem Rand des örtlichen und des zeitlichen Gebiets. Für den Rand des örtlichen Gebiets $\partial\Omega = \{0, L\}$ beschreiben dazu die vier Randbedingungen

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(v, t)}{\partial v} \Big|_{v=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 w(v, t)}{\partial v^2} \Big|_{v=L} = 0, \quad \frac{\partial^3 w(v, t)}{\partial v^3} \Big|_{v=L} = 0 \quad (1.3)$$

eine linksseitige Einspannung des betrachteten Balkens. Ferner determinieren die Auslenkung und die zeitliche Änderung der Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$, beschrieben durch

$$w(v, 0) = w_0(v), \quad \frac{\partial w(v, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial w_0(v)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

die Anfangsbedingungen und damit den linken Rand des rechtsseitig offenen zeitlichen Intervalls. Als Lösung der voranstehenden Problembeschreibung wird die Auslenkung $w : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, t) \mapsto w(v, t)$ aufgefasst.

Ergänzend zur ungezwungenen Dynamik des trimorphen Biegewandlers beschreibt die rechte Seite von (1.1) die Möglichkeit zur Einflussnahme auf die Dynamik des Beispielsystems. Der inhomogene Term setzt sich dabei aus einer zeitlich vorzugebenden elektrischen Spannung $V_{PK}(t)$ und der durch die Bauform des Biegewandlers vorgegebenen Belegfunktion $\frac{\partial^2 \chi(v)}{\partial v^2}$ zusammen. Letztere erlaubt eine Unterscheidung des örtlichen Gebiets in einen Teil, der von den piezokeramischen Schichten belegt ist, und einen Teil ohne derartige Schichten. Im Fall des Beispielsystems beschreiben die Ausführungen in Abschnitt A.1.3, dass die spezifische Belegfunktion des exemplarisch betrachteten trimorphen Biegewandlers auf einen punktförmigen Stelleingriff am rechten Rand des örtlichen Gebiets führt.

Im Hinblick auf die Synthese einer Ausgangsrückführung spielt neben der eigentlichen Systemdynamik die Verfügbarkeit einer geeigneten Messgröße eine wichtige Rolle. Im Fall des Beispielsystems steht die Möglichkeit zur Messung der Auslenkung mittels einer Laser-Triangulation zur Verfügung, idealisiert wird daher eine punktförmige Messung der Auslenkung $w(v, t) \Big|_{v=v_{\text{Mess}}} = w(v_{\text{Mess}}, t)$ an einer Stelle $v_{\text{Mess}} \in \bar{\Omega}$ angenommen.

Die Anwendung weiterführender systemtheoretischer Konzepte setzt eine Überführung der Bewegungsgleichung des Beispielsystems in den Zustandsraum voraus, detaillierte Ausführungen dazu finden sich in Abschnitt 2.2.4 beziehungsweise Abschnitt 2.3.3. In Vorbereitung auf die Zustandsraumdarstellung des durch (1.1) - (1.4) beschriebenen Beispielsystems lässt sich zudem eine Systembeschreibung auf Basis einer Operatordarstellung gemäß (A.39) angeben. Während das detaillierte Vorgehen dazu in Abschnitt A.3 gezeigt wird, erfolgt an dieser Stelle lediglich eine kurze Vorstellung der im Folgenden verschiedentlich auftretenden Operatoren. Ausgehend von (1.1) werden durch

$$S(\cdot) = \alpha_S \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial v^4}, \quad D(\cdot) = \frac{\alpha_{KV}}{\alpha_S} S(\cdot) + \alpha_V(\cdot) = \alpha_{KV} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial v^4} + \alpha_V(\cdot) \quad (1.5)$$

formal der Steifigkeitsoperator und Dämpfungsoperator definiert. Die nachfolgenden Betrachtungen zur Repräsentation, Analyse und Regelung unendlich-dimensionaler Systeme werden in einem Rahmen durchgeführt, der stets eine Behandlung des durch die Gleichungen (1.1) - (1.4) beziehungsweise die Operatordarstellung gemäß (A.39) sowie eine punktförmige Messung der Auslenkung definierten Beispielsystems erlaubt.

2 Mathematische Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme

In der Literatur existieren verschiedene Ansätze zur mathematischen Beschreibung endlich- und unendlich-dimensionaler linearer zeitinvarianter Systeme. Die unterschiedlichen mathematischen Realisierungsformen ergeben sich zum Teil auf natürliche Weise durch verschiedene Herangehensweisen an die Thematik. Gebräuchliche Realisierungen resultieren dabei beispielsweise aus der mathematischen Modellbildung oder aus der Identifikation eines realen Systemverhaltens, umfassen aber auch bezüglich der Systemanalyse günstige Darstellungsformen. Bei endlich-dimensionalen Systemen stehen stellvertretend für die genannten Bereiche in der Regel gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung, das Übertragungsverhalten im Zeitbereich oder im Bildbereich der Laplace-Transformation sowie die Zustandsraumdarstellung eines Systems. Dabei existiert zur Darstellung und Behandlung endlich-dimensionaler linearer zeitinvarianter Systeme eine geschlossene Theorie, die weitreichende Aussagen für derartige Systeme erlaubt. Neben der äquivalenten Überführbarkeit der genannten Realisierungsformen ist im Endlich-dimensionalen insbesondere auch die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Systems stets gewährleistet und in diesem Zusammenhang die Korrektgestelltheit der Systemgleichungen. In Ermangelung einer geschlossenen Theorie erfolgt die Realisierung und Betrachtung unendlich-dimensionaler linearer zeitinvarianter Systeme dagegen in der Regel klassenbasiert, wobei die Handhabung allgemeinerer Systemklassen mit einem, aus Sicht eines Ingenieurs, nicht unerheblichen mathematischen Aufwand verbunden ist. Neben weiteren essentiellen systemtheoretischen Konzepten ist für die Elemente gängiger Systemklassen unendlich-dimensionaler Systeme die äquivalente Überführbarkeit verschiedener Darstellungsformen bekannt und zudem die Korrektgestelltheit zugehöriger Probleme bewiesen.

Hauptziel dieses Abschnitts ist die Einführung einer Systemklasse, die einen ausreichenden mathematischen Rahmen zur Behandlung des Beispielsystems bietet, sowie die Formulierung des Beispielsystems innerhalb dieser Systemklasse. Damit wird innerhalb dieses Abschnitts der Nachweis essentieller Systemeigenschaften des Beispielsystems auf den Nachweis der Zugehörigkeit zu einer geeigneten Systemklasse zurückgeführt. Gleichzeitig soll der vorliegende Abschnitt auch eine Brücke von der wohlbekannten Theorie endlich-dimensionaler Systeme zur Realisierungstheorie und klassenbasierten Darstellung unendlich-dimensionaler Systeme schlagen und damit einen unkomplizierten Einstieg in die Theorie unendlich-dimensionaler Systeme bieten. Einleitend beinhaltet Abschnitt 2.1 dazu einen Überblick über ausgewählte Teile der umfangreichen Theorie und Literatur zur Darstellung linearer unendlich-dimensionaler Systeme und die dabei gebräuchlichen Systemklassen. Daran schließt sich eine vergleichende Gegenüberstellung endlich-dimensionaler Systeme und unendlich-dimensionaler Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren an. Den Abschluss von Abschnitt 2.1 bilden die Ausführungen zu Spektral-Systemen mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren. Dieser Spezialfall der Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren setzt diagonalisierbare Systemope-

ratoren voraus und wird an dieser Stelle in Vorbereitung auf die Formulierung des Beispielsystems in Abschnitt 2.3 gezeigt.

Die Korrektgestelltheit und damit die Sinnhaftigkeit der Formulierung eines ungezwungenen linearen Systems im Zustandsraum lässt sich an der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu zulässigen Anfangsbedingungen festmachen. Abschnitt 2.2 dient daher der Analyse der Lösung des abstrakten Cauchy-Problems linearer ungezwungener Systeme und der Eingrenzung der Betrachtungen auf Systeme, denen gerade ein korrekt gestelltes abstraktes Cauchy-Problem zuzuordnen ist. Die Korrektgestelltheit des abstrakten Cauchy-Problems ist gleichzusetzen mit der Tatsache, dass der Systemoperator der infinitesimale Erzeuger einer zumindest stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum ist. Eine Verbindung zwischen dem endlich- und dem unendlich-dimensionalen Fall besteht darin, dass die Abbildung, die die Lösung über einem Zeitintervall determiniert, in beiden Fällen den Anforderungen an eine Halbgruppe genügt. Als ein weiterer zentraler Punkt werden in Abschnitt 2.2 die Eigenschaften festgestellt, denen der Systemoperator eines unendlich-dimensionalen Systems genügen muss, um infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe zu sein. Im Zuge dessen werden mit dem Hille-Yosida-Theorem und dem Lumer-Phillips-Theorem Sätze eingeführt, die die infinitesimalen Erzeuger stark stetiger beziehungsweise kontraktiver Halbgruppen charakterisieren. Für den Spezialfall eines diagonalisierbaren Systemoperators wird zudem für beide Erzeuger-Theoreme eine signifikant vereinfachte Form angegeben. Anschließend werden Hinweise zur Konstruktion des Zustandsraums gegeben, die unmittelbar aus den genannten notwendigen Eigenschaften infinitesimaler Erzeuger stark stetiger Halbgruppen hervorgehen. Darüber hinaus wird die Zustandsraumdarstellung des Beispielsystems eingeführt und der Nachweis erbracht, dass der Systemoperator des Beispielsystems über die notwendigen Eigenschaften des infinitesimalen Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe verfügt.

Im Anschluss an die Betrachtung ungezwungener unendlich-dimensionaler Systeme werden in Abschnitt 2.3, durch die Einführung der Pritchard-Salamon-Klasse, unendlich-dimensionale Systeme mit in Bezug auf den Zustandsraum unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren zugelassen. Die Einführung dieser Systemklasse ist durch die Unbeschränktheit des Eingangsoperators des Beispielsystems im Hinblick auf den Zustandsraum motiviert. Die Unbeschränktheit des besagten Operators lässt sich unmittelbar anhand der in Abschnitt C.2 zur Beurteilung der Beschränktheit von Ein-/Ausgangsoperatoren im Falle von Spektralsystemen mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren eingeführten Kriterien beurteilen. Ziel von Abschnitt 2.3 ist es, für Pritchard-Salamon-Systeme die Eigenschaften der Zeitbereichslösung festzustellen und das Ein-/Ausgangsverhalten derartiger Systeme im Zeitbereich und im Bildbereich der Laplace-Transformation einzuführen. Damit wird der eingangs angekündigte Bogen zwischen den aufgeführten Realisierungsformen geschlagen. Für das Beispielsystem wird zudem, gestützt auf die in Anhang C.4 hergeleiteten Kriterien, die Formulierung als Pritchard-Salamon-System gezeigt.

Die Betrachtungen in Kapitel 2 werden verschiedentlich durch die Inhalte von Anhang C ergänzt. Einige mathematische Details zu den Lösungsbegriffen des inhomogenen abstrakten Cauchy-Problems sowie einige hilfreiche Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen und ihrer Erzeuger finden sich ergänzend in Abschnitt C.1.

2.1 Einführung in die Realisierung endlich- und unendlich-dimensionaler Systeme

Zur Behandlung und Darstellung endlich-dimensionaler linearer zeitinvarianter Systeme steht eine wohlbekannte geschlossene Theorie zur Verfügung. Die Realisierung und Betrachtung unendlich-dimensionaler linearer zeitinvarianter Systeme erfolgt dagegen in der Regel klassenbasiert. Ziel dieses Abschnitts ist eine Einführung in die im regelungstechnischen Kontext gebräuchliche mathematische Realisierung unendlich-dimensionaler linearer zeitinvarianter Systeme. Da der Fokus dieser Arbeit auf linearen zeitinvarianten Systemen liegt, werden im Hinblick auf eine kompaktere Notation diese Eigenschaften für die letztgenannte Systemklasse und das endlich-dimensionale Pendant stillschweigend vorausgesetzt und stattdessen die Bezeichnung unendlich-dimensionale Systeme beziehungsweise endlich-dimensionale Systeme verwandt. Einleitend beinhaltet Abschnitt 2.1.1 dazu einen Überblick über ausgewählte Teile der umfangreichen Theorie und Literatur zur Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme. Neben den verschiedenen mathematischen Realisierungsformen derartiger Systeme werden auch verschiedene gebräuchliche Systemklassen benannt und in den Kontext eingeordnet. Nachfolgend zeigt Abschnitt 2.1.2 eine mathematisch summarische Gegenüberstellung der Realisierungen endlich-dimensionaler Systeme und unendlich-dimensionaler Systeme aus der Klasse der Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren. Die Ausführungen umfassen neben grundlegenden äquivalenten Varianten der Systemdarstellung im Zeit- und Frequenzbereich ausgewählte systemtheoretische Begrifflichkeiten im Zeitbereich. Der Schwerpunkt dieser Gegenüberstellung mit Übersichtscharakter liegt dabei nicht auf den mathematischen Details, sondern auf einem eingängigen Einstieg in die Thematik, realisiert durch eine enge Anknüpfung an die wohlbekannte Theorie endlich-dimensionaler Systeme. Dieses Vorgehen wird durch die Fokussierung auf eine Klasse unendlich-dimensionaler Systeme unterstützt, für die eine umfangreiche Theorie existiert ([CZ95; LGM99]) und für die zahlreiche Analogien zu endlich-dimensionalen Systemen bestehen. Während die gezielte Hervorhebung dieser Analogien als Orientierungshilfe beim Einstieg in die Theorie unendlich-dimensionaler Systeme dient, ist das kurze Aufzeigen der für den unendlich-dimensionalen Fall notwendigen mathematischen Generalisierungen als Vorbereitung auf detaillierte Diskussionen im Verlauf dieser Arbeit zu verstehen. Abschnitt 2.1.2 lässt sich damit als Bindeglied zwischen der Theorie der Realisierung endlich-dimensionaler Systeme einerseits und der Darstellung bestimmter unendlich-dimensionaler Systeme mit unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren in Abschnitt 2.3 auffassen.

Im abschließenden Abschnitt 2.1.3 werden die in Abschnitt 2.1.2 aufgeführten Darstellungsformen endlich- und unendlich-dimensionaler Systeme erneut aufgegriffen und für die spezielle Klasse der Spektral-Systeme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren diskutiert. Abschnitt 2.1.3 verdeutlicht damit die klaren Analogien zwischen dieser Unterklasse der Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein- und Ausgangsoperatoren und dem endlich-dimensionalen Pendant. Insbesondere wird an dieser Stelle die Erweiterung modaler Konzepte auf den unendlich-dimensionalen Fall veranschaulicht. Damit ist Abschnitt 2.1.3 als Vorbereitung auf die Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse und damit die Verwendung modaler Konzepte im

Fall unendlich-dimensionaler Systeme mit unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren in Abschnitt 2.3.3 zu verstehen.

2.1.1 Überblick über die Theorie der Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme

In frühen Arbeiten zu unendlich-dimensionalen Systemen lässt sich häufig ein fallspezifisches Vorgehen in Abhängigkeit von einer bestimmten mathematischen Realisierung eines spezifischen Systems beobachten. Anders als im Endlich-dimensionalen ist die äquivalente Überführbarkeit unterschiedlicher Realisierungsformen eines unendlich-dimensionalen Systems in dieser frühen Phase im Allgemeinen nicht bewiesen. Von den anfänglich beispielorientierten Betrachtungen hat sich die Behandlung unendlich-dimensionaler Systeme hin zu einem klassenbasierten Vorgehen entwickelt. Aktuell stehen zur Behandlung unendlich-dimensionaler Systeme umfangreiche Systemklassen zur Verfügung, für die jeweils weitreichende systemtheoretische Konzepte bekannt und bewiesen sind. Insbesondere umfassen diese Konzepte in der Regel für ein Element einer Systemklasse auch die äquivalente Überführbarkeit verschiedener Realisierungsformen innerhalb der Systemklasse.

Einleitend wird im Folgenden ein Überblick über die im regelungstechnischen Kontext gebräuchliche mathematische Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme vermittelt. Daran schließt sich die Einführung und Einordnung verschiedener gebräuchlicher Klassen unendlich-dimensionaler Systeme an. Die Auswahl der gezeigten Realisierungsformen sowie der aufgeführten Systemklassen resultiert dabei aus den Anforderungen innerhalb dieser Arbeit.

Realisierungsformen unendlich-dimensionaler Systeme

Durch unterschiedliche Herangehensweisen an die Thematik unendlich-dimensionaler Systeme ergeben sich auf natürliche Weise unterschiedliche Realisierungsformen derartiger Systeme. Die physikalische Modellbildung eines unendlich-dimensionalen Systems führt in der Regel auf partielle Differentialgleichungen, deren Analyse fallspezifische Aussagen über das betrachtete System ermöglicht. Eine Generalisierung systemanalytischer Betrachtungen auf eine Systemklasse ist beispielsweise anhand einer Operator Darstellung einer partiellen Differentialgleichung, wie sie für das Beispielsystem in Abschnitt A.3 gezeigt wird, denkbar. Zur systemtheoretischen Analyse umfassender Systemklassen sowie zur Reglersynthese erweist sich analog zum Fall endlich-dimensionaler Systeme eine Zustandsraumdarstellung auf Basis der vier noch zu definierenden Operatoren (A, B, C, D) als vorteilhaft. Mathematische Betrachtungen zu den Eigenschaften der Zeitbereichslösung eines in Zustandsraumdarstellung beschriebenen unendlich-dimensionalen Systems führen unter gewissen Annahmen bezüglich der beteiligten Operatoren auf eine zur Zustandsraumdarstellung äquivalente Halbgruppen-Darstellung unendlich-dimensionaler Systeme. Die Verifikation eines mathematischen Modells anhand der Identifikation eines realen Systems basiert dagegen häufig auf der Messung eines Übertragungsverhaltens am realen System, dabei kommen sowohl Zeitbereichs- als auch Frequenzbereichsmethodiken zum Einsatz. Der Vergleich ei-

nes mathematischen Modells in Halbgruppen-Darstellung mit dem Übertragungsverhalten des realen Systems erfordert somit entweder die Überführung der Zustandsraumdarstellung in eine korrekt gestellte Übertragungsfunktion oder den umgekehrten Weg. Die Realisierbarkeit einer Zustandsraumdarstellung gegebenenfalls irrationaler Übertragungs- bzw. Gewichtsfunktionen wird in zahlreichen Betrachtungen unterschiedlicher Autoren thematisiert. Motiviert durch Erkenntnisse im Bereich endlich-dimensionaler Systeme steht bei frühen Arbeiten [Bal66] die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit [Fuh74] einer zwingend unendlich-dimensionalen, minimalrealisierten Zustandsraumdarstellung eines derartigen Ein-/Ausgangsverhaltens im Mittelpunkt. Die Frage nach einer Minimalrealisierung eines in Form einer Übertragungsfunktion gegebenen unendlich-dimensionalen Systems in Zustandsraumdarstellung stellt in Analogie zu endlich-dimensionalen Systemen eine direkte Verbindung zur Steuer- und Beobachtbarkeit eines Systems her.

Einen umfangreichen Überblick über die Theorie der Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme zusammen mit der Kategorisierung der Realisierungsformen in

- partielle Differentialgleichungen,
- Zustands- bzw. Halbgruppen-Darstellung,
- Übertragungsverhalten zwischen definierten Ein- und Ausgängen,
- abstrakte lineare Systeme in Integraldarstellung nach Kálmán [KFA69]

sowie reichhaltige Quellenangaben beinhaltet [NS89]. Innerhalb dieser Arbeit wird die Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme mittels partieller Differentialgleichungen, in Zustands- bzw. Halbgruppen-Darstellung sowie in Form von Übertragungsfunktionen genutzt. Neben der schwerpunktmäßigen Betrachtung der Zustandsraumdarstellung wird die Überführung zwischen den genannten Realisierungsformen thematisiert.

Klassen unendlich-dimensionaler Systeme

Eine denkbare Klassifizierung der zahlreichen Arbeiten zur Realisierbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme im Zustandsraum lässt sich anhand der jeweils zugelassenen Systemklassen oder auch der angestrebten Struktur des Zustandsraums treffen. Die Verwendung einer bestimmten Systemklasse resultiert nicht selten aus einem Kompromiss zwischen dem Umfang der zugelassenen Systemklasse und des zur Handhabung dieser Klasse notwendigen mathematischen Aufwands. Einschränkungen der Allgemeingültigkeit werden zugunsten einfacher zu handhabender Systemklassen bzw. Formulierungen in Räumen mit mathematisch angenehmen Eigenschaften, wie beispielsweise Hilberträumen, in Kauf genommen. Die besagten Einschränkungen spiegeln sich beispielsweise in Restriktionen hinsichtlich der für eine Zustandsraumdarstellung in einer bestimmten Systemklasse zulässigen Operatoren oder hinsichtlich der Regularität der Lösung einer Zustandsraumdarstellung wider. Erwartungsgemäß bedingt eine allgemeinere Betrachtung in einer größeren Systemklasse einen komplexeren mathematischen Rahmen.

Neben der Zustandsraumdarstellung auf verallgemeinerten normierten Räumen (Lokal konvexe Räume) [Bal66], [Yam81] und [Yam82] wird häufig die Realisierbarkeit in Banachräumen [Wei89] oder Hilberträumen untersucht [Hel76], [DH76], [PS85], [Sal89]. Einen frühen Überblick über die historische Entwicklung der Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme im Zustandsraum gibt [Hel76]. Auf Basis der umfassenden Klasse der korrekt gestellten linearen Systeme („well-posed linear Systems“), die ursprünglich als „abstrakte lineare Systeme“ eingeführt wurden [Sal87; Sal89] bzw. [Wei89], wird in [Cur89b] die Überführbarkeit der Realisierungsformen sowie die Beziehungen verschiedener Systemklassen zueinander diskutiert. Ausgehend von den grundlegenden Arbeiten zur Definition der korrekt gestellten unendlich-dimensionalen Systeme sind zahlreiche weiterführende Arbeiten in diesem Bereich verfasst worden. Hilfreiche Darstellungen in Bezug auf die Formulierung der Zustandsraumdarstellung eines Systems in dieser Systemklasse sind beispielsweise in [TW03a; TW03b] zu finden. Der Bereich der optimalen und robusten Regelung für diese Systemklasse wird u.a. in [Sta98e; Sta98a] betrachtet. Stellvertretend für weitere Arbeiten sei neben dem bereits genannten Übersichtsaufsatz auf die mit Analogien zu endlich-dimensionalen Systemen versehene Übersicht in [Cur97], den Rückblick über die Realisierungstheorie unendlich-dimensionaler Systeme im Zustandsraum [JZ02] und die jeweils darin zitierte Literatur verwiesen. Selbst im Fall zulässiger Ein-/Ausgangsoperatoren ist im Allgemeinen für korrekt gestellte lineare Systeme eine aus Sicht der endlich-dimensionalen Systeme nicht direkt intuitive Verallgemeinerung der Übertragungsfunktion erforderlich. So verlangt die Definition der Ausgangsabbildung eines korrekt gestellten linearen Systems beispielsweise die Einführung der „Lebesgue-Erweiterung“ ([Cur97]) des Ausgangsoperators C .

Wohldefinierte lineare Systeme mit praktischer Relevanz sind in einer Unterklasse der korrekt gestellten linearen Systeme, den sogenannten „regulären linearen Systemen“ enthalten ([Wei94]). Die regulären linearen Systeme sind korrekt gestellte lineare Systeme, deren Übertragungsfunktion für unendlich hohe Frequenzen gegen einen starken Grenzwert konvergiert ([Wei94] (S. 833)). Reguläre lineare Systeme weisen demnach keine zu große Unstetigkeit im Fall einer sprungförmigen Anregung auf ([Wei94]), und ihre Zustandsraumdarstellung verfügt über einen Durchgriffsoperator gemäß der Definition aus [Wei94] (S. 833) oder [Sas02] (S. 16). Mathematisch gesehen besitzt die Sprungantwort eines regulären Systems einen Lebesgue-Punkt ([Els05] (S. 306)) zum Sprungzeitpunkt ([Wei94]). Das Übertragungsverhalten eines regulären linearen Systems lässt sich ohne die bei korrekt gestellten linearen Systemen notwendige Verallgemeinerung beschreiben, weist aber im Allgemeinen weiterhin die Lebesgue-Erweiterung der Ausgangsabbildung auf [Cur97; Sas02].

Die Betrachtungen in dieser Arbeit umfassen in erster Linie Pritchard-Salamon-Systeme [PS85; PS87b]. Im Kontext regelungstechnischer Fragestellungen sprechen eine Vielzahl angenehmer Eigenschaften von Pritchard-Salamon-Systemen für die Verwendung dieser Systemklasse. Ein zusätzliches entscheidendes Auswahlkriterium für diese Systemklasse ist ferner die Zugehörigkeit des Beispielsystems zur Pritchard-Salamon-Klasse. In gewisser Hinsicht lassen sich Pritchard-Salamon-Systeme als vergleichsweise große Klasse unendlich-dimensionaler Systeme auffassen, für die sich aus dem Endlich-dimensionalen bekannte regelungstechnische Konzepte geradewegs auf unendlich-dimensionale Systeme übertragen lassen.

Die Pritchard-Salamon-Klasse bildet eine Unterklasse der regulären linearen Systeme und schließt dabei ihrerseits alle Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren ein. Ferner enthält die Pritchard-Salamon-Klasse alle unendlich-dimensionalen Systeme, die unter der Bezeichnung „Nuclear Type“ ([Cur92b]) zusammengefaßt sind und damit über einen nuklearen Hankel-Operator verfügen ([Cur92b]). Eine übersichtliche grafische Darstellung der Beziehung verschiedener Systemklassen zueinander findet sich in [Sas02] (S. 21).

In Bezug auf die Betrachtung flexibler Strukturen sei an dieser Stelle zusätzlich auf die in [BC88b] eingeführte Systemklasse hingewiesen. Im Vergleich zur Pritchard-Salamon-Klasse sind in [BC88b] Systeme mit stärker unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren zulässig. Damit erstrecken sich die Betrachtungen aus [BC88b] auf eine größere Systemklasse, für die dennoch teilweise ähnlich angenehme Eigenschaften wie für Pritchard-Salamon-Systeme nachzuweisen sind. Allerdings existiert zu Pritchard-Salamon-Systemen eine detailliertere Theorie, die zudem alle an dieser Stelle benötigten Aspekte einschließt. Neben dem Beispielsystem sind in der Pritchard-Salamon-Klasse eine Vielzahl physikalisch bedeutsamer Systeme erfassbar. Eine detaillierte Benennung dieser Systeme schließt sich in Abschnitt 2.3.2 an, insbesondere bietet Tabelle 2.1 einen kompakten tabellarischen Überblick über derartige Systeme.

Eine Einordnung in den Kontext unendlich-dimensionaler Systeme, eine gegenüber [PS87b] überarbeitete Betrachtung sowie die Herleitung weiterführender Eigenschaften von Pritchard-Salamon-Systemen wird in [Cur+94] gegeben. Neben den genannten Systemklassen sind zudem verschiedene Algebren von Übertragungsfunktionen unendlich-dimensionaler Systeme bekannt. An dieser Stelle sei insbesondere auf die Callier-Desoer-Klasse ([CD78]) verwiesen. Der Zusammenhang zwischen der Callier-Desoer-Klasse und der Pritchard-Salamon-Klasse wird in [Cur92b] diskutiert, insbesondere wird dort die Zugehörigkeit von gleichzeitig exponentiell detektierbaren und exponentiell stabilisierbaren Pritchard-Salamon-Systemen zur Callier-Desoer-Klasse festgestellt ([Cur92b]).

2.1.2 Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren

Der vorliegende Abschnitt beinhaltet eine vergleichende Gegenüberstellung der Realisierungen endlich-dimensionaler Systeme und unendlich-dimensionaler Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren. Die Ausführungen thematisieren insbesondere die Analogien zwischen der Darstellung endlich-dimensionaler Systeme und der mathematischen Realisierung der betrachteten unendlich-dimensionalen Systeme. Gleichsam werden die Generalisierungen verdeutlicht, die, ausgehend von der im Endlich-dimensionalen bekannten Theorie, zur mathematischen Realisierung der betrachteten unendlich-dimensionalen Systeme notwendig sind. Da Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren eine Untermenge der Pritchard-Salamon-Systeme sind, aber gleichzeitig alle endlich-dimensionalen Systeme enthalten, ist dieser Abschnitt als Bindeglied zwischen der Theorie endlich-dimensionaler Systeme und den

Pritchard-Salamon-Systemen in Abschnitt 2.3 aufzufassen. Einleitend wird die Zeitbereichsdarstellung und anschließend die Frequenzbereichsdarstellung der betrachteten Systeme diskutiert.

Zustandsraumdarstellung

Im Endlich-dimensionalen ist die Zustandsraumdarstellung als eine der gebräuchlichsten Realisierungsformen linearer zeitinvarianter Systeme anzusehen. Sie ermöglicht die unkomplizierte Anwendung einer Vielzahl von Verfahren zur Systemanalyse und Reglersynthese. Detaillierte Ausführungen dazu finden sich in verschiedenen regelungstechnischen Grundlagenwerken [Fö13; Lun06]. Die Zustandsraumdarstellung von Halbgruppen-Regelsystemen mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren stimmt formal mit dem endlich-dimensionalen Pendant überein, die Systemgleichung und die Ausgangsgleichung lauten

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = A x(t) + B u(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t). \quad (2.2)$$

Die voranstehende Zustandsraumdarstellung kann als ein, um eine algebraische Ausgangsgleichung ergänztes, inhomogenes abstraktes Cauchy-Problem gemäß Anhang C.1 mit der speziellen Wahl des inhomogenen Terms zu $f(t) = B u(t)$ interpretiert werden. Die vektorielle Zustandsgleichung (2.1) besteht dabei aus einer Anzahl $n < \infty$ im Allgemeinen verkoppelter Differentialgleichungen, die jeweils erster Ordnung bezüglich der Zeit sind. Die Lösung $x(t)$ der Zustandsgleichung wird im Allgemeinen als Zustandsvektor bezeichnet, der zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Element des Zustandsraums ist. Der Zustandsraum wird mittels einer externen direkten Summe (Definition 16) der Form

$$x \in \mathcal{X} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{X}_i = \mathcal{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_n \quad (2.3)$$

eingeführt, wobei die Elemente der Räume $\mathcal{X}_i, i = 1, \dots, n$ Zustandsgrößen heißen. Für physikalisch bedeutsame endlich-dimensionale Systeme ist eine Interpretation der $\mathcal{X}_i, i = 1, \dots, n$ als Energiespeicher eines betrachteten Systems gebräuchlich, und die Anzahl der Zustandsgrößen n kann entsprechend der Anzahl der konzentrierten Energiespeicher des Systems gewählt werden. Die Zustandsgrößen sind im endlich-dimensionalen Fall reelle oder komplexe Zahlen $\mathcal{X}_i = \mathbb{K}, i = 1, \dots, n$, entsprechend besteht der Zustandsvektor zu einem festen Zeitpunkt aus einem n -Tupel reeller oder komplexer Zahlen. Der n -dimensionale Zustandsvektor kann damit für einen festen Zeitpunkt als Element eines n -dimensionalen unitären Vektorraums beziehungsweise Element eines n -dimensionalen euklidischen Vektorraums angesehen werden.

Die anschauliche Interpretation der Zustandsgrößen als Energiespeicher eines durch die Zustandsraumdarstellung (2.1) und (2.2) beschriebenen Systems kann aus dem Endlich-dimensionalen auf zahlreiche physikalisch bedeutsame unendlich-dimensionale Systeme übertragen werden. Ein wesentlicher Unterschied besteht darin, dass eine einzelne Zustandsgröße im Unendlich-dimensio-

nalen im Allgemeinen anschaulich einem örtlich verteilten, also einem räumlich kontinuierlichen Energiespeicher entspricht. Da der Zustandsvektor auch im Unendlich-dimensionalen zu einem festen Zeitpunkt vollständig den Inhalt der Energiespeicher und damit das beschriebene System charakterisiert, muss jede Komponente des Zustandsvektors $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix}^T$ den Energieinhalt eines über dem örtlichen Gebiet verteilten Energiespeichers wiedergeben. Die örtliche Abhängigkeit der Zustände wird implizit dadurch berücksichtigt, dass jede Zustandsgröße zu jedem Zeitpunkt Element eines Funktionenraums ist, $x_i(t) \in \mathcal{X}_i, i = 1, \dots, n$.

Während im Endlich-dimensionalen die Festlegung der $\mathcal{X}_i = \mathbb{K}, i = 1, \dots, n$ zu jeweils \mathbb{R} beziehungsweise \mathbb{C} nahezu systemunabhängig möglich ist, bildet die Festlegung geeigneter Funktionenräume einen elementaren Bestandteil der Formulierung einer korrekt gestellten Zustandsraumdarstellung eines unendlich-dimensionalen Systems und wird ausführlicher in Abschnitt 2.2.4 diskutiert.

Die Nutzung verschiedenster grundlegender Begrifflichkeiten wie beispielsweise der Stabilität eines Systems erfordert es, auf dem Zustandsraum einen Entfernungsbegriff zu etablieren. Der Zustandsraum wird dazu mit einer durch ein Innenprodukt induzierten Norm

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}^{\frac{1}{2}}$$

versehen. Üblicherweise wird dabei angestrebt, dass der Zustandsraum vollständig im Sinne der verwendeten Norm ist und damit den Anforderungen an einen Hilbertraum genügt. Darüber hinaus wird in der Regel die Erzeugung einer Produkttopologie (Satz 16) auf dem Zustandsraum gewünscht.

Jeder mit einem beliebigen Innenprodukt versehene endlich-dimensionale Zustandsraum ist vollständig im Sinne der durch das gewählte Innenprodukt induzierten Norm und genügt somit den Anforderungen an einen Hilbertraum. Darüber hinaus gilt im Endlich-dimensionalen die Normäquivalenz und durch verschiedene Normen induzierte Topologien sind äquivalent. Im Unendlich-dimensionalen gilt im Allgemeinen dagegen keine Äquivalenz zwischen unterschiedlichen Normen und entsprechend auch nicht für die aus der Verwendung unterschiedlicher Normen resultierenden Topologien. Um dem Zustandsraum eines unendlich-dimensionalen Systems die Eigenschaften eines Hilbertraums mit der gewünschten Struktur zu verleihen, sind daher bei der Wahl eines Innenprodukts auf dem Zustandsraum einige in Abschnitt 2.2.4 aufgeführte Kriterien zu beachten.

Charakteristisch für einen endlich-dimensionalen nichtleeren Vektorraum ist die Existenz einer Hamelbasis (Definition 21). Die Dimension eines solchen Vektorraums entspricht der Mächtigkeit einer Basis des Vektorraums. Somit kann im Endlich-dimensionalen jedes Element des Zustandsraums $x \in \mathcal{X}$ als Linearkombination der Elemente einer Basis $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^n}$ des Zustandsraums, den sogenannten Basisvektoren oder Basiselementen dargestellt werden, es gilt

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle_{\mathcal{X}} u_i. \quad (2.4)$$

Ein unendlich-dimensionaler Raum besitzt gerade keine endlich-dimensionale Basis. Die Darstellung jedes Elements eines derartigen Raums kann also im Allgemeinen nicht als endliche Linearkombination von Basiselementen erfolgen. Hinsichtlich unendlich-dimensionaler Räume sind die in Anhang B.5.3 eingeführten erweiterten Basisbegriffe und gegebenenfalls die Darstellung der Elemente eines derartigen Raums durch unendliche Reihen, ähnlich einer Fourierentwicklung, anzuwenden.

Neben dem Zustandsraum werden die Räume \mathcal{U} und \mathcal{Y} der Ein- und Ausgangsgrößen eingeführt. Bei der Betrachtung endlich-dimensionaler Systeme handelt es sich bei \mathcal{U} und \mathcal{Y} um Vektorräume mit einer endlichen Dimension entsprechend der Anzahl der Ein- und Ausgänge $p < \infty$ beziehungsweise $q < \infty$ eines betrachteten Systems. Eine übliche Festlegung der Räume der Ein- und Ausgangsgrößen wäre $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ beziehungsweise $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$. Obwohl es sich bei den Ein- und Ausgangsgrößen in der Regel um physikalisch sinnvolle Signale handelt, werden die zugrunde liegenden Räume im Hinblick auf eine mathematisch konsistente Behandlung dennoch häufig als komplexe Hilberträume angenommen.

Die allgemeine Theorie unendlich-dimensionaler Systeme umfasst eine Betrachtung unendlich-dimensionaler Ein- und Ausgangsräume. Im Hinblick auf physikalisch sinnvolle Systeme werden innerhalb dieser Arbeit analog zum Endlich-dimensionalen in der Regel jedoch endlich-dimensionale Ein- und Ausgangsräume $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ beziehungsweise $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ vorausgesetzt. Die im Rahmen der Zustandsraumdarstellung eines endlich-dimensionalen Systems auftretenden linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}), & B &\in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X}), \\ C &\in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), & D &\in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

werden durch endlich-dimensionale Matrizen passender Dimension

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{K}^{n \times n} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, & B &\in \mathbb{K}^{n \times p} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}, \\ C &\in \mathbb{K}^{q \times n} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, & D &\in \mathbb{K}^{q \times p} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \end{aligned} \quad (2.6)$$

realisiert. Dabei wird A als Systemmatrix, B als Eingangsmatrix, C als Ausgangsmatrix und D als Durchgangsmatrix bezeichnet ([Fö13]). Die im Endlich-dimensionalen auftretenden Abbildungen sind sowohl beschränkt als auch kompakt. Die zeitliche Änderung der Zustände in (2.1), beziehungsweise der Verlauf der Ausgangsgrößen in (2.2), wird im Fall eines unendlich-dimensionalen Systems durch die linearen Operatoren

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X}, & B : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{X}, \\ C : \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{Y}, & D : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{Y} \end{aligned} \quad (2.7)$$

realisiert, deren Nomenklatur analog zum endlich-dimensionalen Fall

$$\begin{aligned} A : & \text{ Systemoperator,} & B : & \text{ Eingangoperator,} \\ C : & \text{ Ausgangoperator,} & D : & \text{ Durchgangoperator} \end{aligned}$$

lautet. Als grundlegender Unterschied zu endlich-dimensionalen Systemen kann im Allgemeinen die Stetigkeit oder äquivalent die Beschränktheit aller zur Realisierung der Zustandsraumdarstellung eines unendlich-dimensionalen Systems benötigten Operatoren in Bezug auf den Zustandsraum nicht vorausgesetzt werden. Beispielsweise sind die in vielen physikalisch bedeutsamen verteiltparametrischen Vorgängen auftretenden Differentialoperatoren bei gebräuchlicher Festlegung des Zustandsraums nicht stetig und demnach auch nicht beschränkt. Für anschauliche Ausführungen zur Unbeschränktheit von Differentialoperatoren und der Bedeutsamkeit der Festlegung des Definitionsbereichs unbeschränkter Operatoren sei beispielsweise auf [Rob01] (S. 79) verwiesen.

Für Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren wird daher als Generalisierung abweichend von (2.5) ein auf dem Zustandsraum unbeschränkter Systemoperator

$$\begin{aligned} A &\notin \mathcal{L}(\mathcal{X}) & B &\in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X}) \\ C &\in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) & D &\in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

angenommen.

Zeitbereichslösung des ungezwungenen Systems

Essentiell für die Korrektgestelltheit eines linearen Systems sind die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $x(t)$ der Zustandsgleichung 2.1. Unter der Annahme eines ungezwungenen Systems reduziert sich die Zustandsgleichung (2.1) wegen $B = 0$ auf ein Anfangswert-/ oder Cauchy-Problem.

Im Endlich-dimensionalen erzeugt die Systemmatrix $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ mittels der als Transitionsmatrix bezeichneten Matrixexponentialfunktion

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \quad (2.9)$$

über einem Zeitintervall $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine auf dem Zustandsraum gleichmäßig stetige Halbgruppe $\mathcal{T}_{e^{At}} = \{e^{At}\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ entsprechend Definition 2 auf Seite 44. Die Konvergenz der voranstehenden Potenzreihe ist für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ im Sinne der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$ gesichert. Unter Annahme gegebener Anfangsbedingungen $x_0 \in \mathcal{X}$ ist die Lösung dann für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eindeutig durch

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (2.10)$$

festgelegt.

Im unendlich-dimensionalen Fall widerspricht die Unbeschränktheit des Systemoperators den Voraussetzungen an den infinitesimalen Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe, deren Definition in Abschnitt 2.2.2 eingeführt wird. Insbesondere ist die Konvergenz der Matrixexponentialfunktion aus (2.9) für einen unbeschränkten Operator nicht zu erwarten. Um dennoch eine vergleichsweise praktikable Theorie anwenden zu können, werden Restriktionen bezüglich der „zugelassenen Unbeschränktheit“ des Systemoperators eingeführt. Daraus resultiert ein Kompromiss

zwischen der Klasse der beschreibbaren unendlich-dimensionalen Systeme und dem dazu notwendigen mathematischen Rahmen. Die Restriktionen bezüglich der Unbeschränktheit des Systemoperators orientieren sich an den Eigenschaften der Lösung eines deterministischen ungezwungenen Systems, deren Verlauf für gegebene Anfangsbedingungen und ein festes System für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eindeutig feststeht. Aus dem Wunsch nach der Existenz einer Lösung sowie einem „angenehmen“ Verhalten der Lösung eines durch einen Systemoperator definierten homogenen abstrakten Cauchy-Problems folgt die Forderung, dass ein Systemoperator infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}) \\ t &\mapsto \Phi(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

auf dem Zustandsraum ist. Die stark stetige Halbgruppe \mathcal{T}_Φ übernimmt die Rolle der durch die Systemmatrix endlich-dimensionaler Systeme erzeugten gleichmäßig stetigen Halbgruppe, weitere Ausführungen dazu folgen im Abschnitt 2.2.2.

Unter der Annahme, dass der Systemoperator infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum ist, existiert zum homogenen abstrakten Cauchy-Problem, definiert durch ein ungezwungenes System, im Allgemeinen genau dann eine starke Lösung im Sinne von Definition 97, wenn der Anfangswert im Definitionsbereich des Systemoperators $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ liegt ([EN00] (S. 145)). Die zudem eindeutige starke Lösung lautet dann

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot)x_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathcal{X}, \\ t &\mapsto x(t) = \Phi(t)x_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Unendlich-dimensionale Systeme, bei denen einzig der Systemoperator unbeschränkt ist, dieser aber dennoch eine stark stetige Halbgruppe auf dem Zustandsraum erzeugt, werden als Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren bezeichnet ([Kou93] (S. 19)). Aufgrund der eindeutigen Zuordnung zwischen dem infinitesimalen Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe und der erzeugten Halbgruppe werden derartige Systeme äquivalent durch $\Sigma(A, B, C, D)$ oder $\Sigma(\Phi(\cdot), B, C, D)$ repräsentiert. Der Nachweis, dass ein gegebener unbeschränkter Systemoperator der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum ist, gestaltet sich im Allgemeinen als nicht trivial. Der Bemühung, einfache Kriterien für einen solchen Nachweis einzuführen, sind die Abhandlungen über Erzeuger-Theoreme in Abschnitt 2.2.3 geschuldet.

Alle Aussagen, die in diesem Abschnitt nachfolgend für Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren unter Verwendung einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ getroffen werden, gelten auch für endlich-dimensionale Systeme mit der zugeordneten gleichmäßig stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}_{e^{At}} = \{e^{At}\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$.

Ein-/Ausgangsverhalten im Zeitbereich

Im Folgenden sei die Korrektgestelltheit des homogenen abstrakten Cauchy-Problems vorausgesetzt. Die Lösung der Zustandsgleichung im Zeitbereich wird unter der Voraussetzung von $x_0 \in \mathcal{X}$

sowie ausreichender Integrierbarkeit des Integranden, formal durch

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

beschrieben. Die Definitions- und Bildbereiche der in (2.13) miteinander verknüpften Operatoren sind unter Berücksichtigung von (2.8) sowie (2.11) sowohl im Endlich-dimensionalen als auch im Unendlich-dimensionalen kompatibel. Die voranstehende Lösung der Zustandsgleichungen im Zeitbereich erweist sich damit hinsichtlich dieses Aspekts als sinnvoll formuliert. Gleiches gilt für die zugehörige algebraische Ausgangsgleichung (2.2).

Die Lösung von (2.1) über einem Zeitintervall besteht aus einer Aneinanderreihung der Zustände zu jedem Zeitpunkt des Zeitintervalls. Insbesondere im Fall unendlich-dimensionaler Systeme ist die Lösung zu jedem Zeitpunkt Element eines Funktionenraums. Die Regularität der Lösung kann daher sowohl hinsichtlich der Zeit als auch hinsichtlich des Orts beurteilt werden, letztendlich also bezüglich aller Unabhängigen. Der Einfluss des zeitlichen Verlaufs der Eingangsgröße auf den zeitlichen Verlauf der Lösung wird in (2.13) deutlich. Anschaulich gesprochen muss der inhomogene Term der Systemgleichung $Bu(t)$ über einem Zeitintervall ein angenehmes Verhalten besitzen, d.h. beispielsweise einen hinreichend glatten Verlauf, um die Integrierbarkeit des Integranden und folglich eine gewünschte Regularität der Lösung hinsichtlich des zeitlichen Verlaufs zu gewährleisten.

Damit die durch (2.13) beschriebene Funktion den Anforderungen an eine milde Lösung (Definition 98, Seite 322) des inhomogenen abstrakten Cauchy-Problems, beziehungsweise der Systemgleichung gemäß (2.1) genügt, also die Lösung zumindest einen hinsichtlich der Zeit stetigen Verlauf mit Werten aus dem Zustandsraum besitzt $x(t) \in C([0, t_e]; \mathcal{X})$, muss der inhomogene Term über einem betrachteten Zeitintervall zumindest absolut Lebesgue-integrierbar sein und Werte aus dem Zustandsraum aufweisen ([Paz83] (S. 106), [EN00] (S. 436)). Dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral (Satz 55) folgend, ergibt das Integral eines über dem Integrationsintervall Lebesgue-integrierbaren Integranden eine absolut stetige Funktion, die somit auch stetig ist.

Hier gelten im Einzelnen die in Abschnitt C.1 definierten Regularitätsbegriffe von Lösungen abstrakter Cauchy-Probleme. Eine umfangreiche Diskussion unterschiedlicher Lösungsbegriffe, speziell im Kontext der Halbgruppen, erfolgt beispielsweise in [Paz83] oder [EN00]. Die Ein-/Ausgangsabbildung im Zeitbereich ergibt sich formal durch Einsetzen von (2.13) in die Ausgangsgleichung der Zustandsraumdarstellung (2.2). Auf einem kompakten Zeitintervall $t \in [0, t_e]$ ergibt sich unter der Annahme verschwindender Anfangsbedingungen für alle hier betrachteten Systeme eine beschränkte lineare Abbildung ([CZ95] (S. 175))

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} : L^2([0, t_e], \mathcal{U}) &\rightarrow L^2([0, t_e], \mathcal{Y}) \\ u &\mapsto \mathfrak{G}u = y \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit

$$y(t) = \mathfrak{G}u(t) = \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad t \in [0, t_e]. \quad (2.15)$$

Die Impulsantwort oder Gewichtungsmatrix der an dieser Stelle zugelassenen Systeme ist durch $g(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t)$ definiert. Formal kann die Impulsantwort unter der Annahme verschwindender Anfangsbedingungen sowie einer impulsförmigen Eingangsgröße zum Zeitpunkt $t = 0$ aus (2.15) abgeleitet werden. Im Fall endlich-dimensionaler Systeme findet sich die Definition der Impulsantwort beispielsweise in [Fö13; Lun05], wobei für exponentiell stabile Systeme $g(t) \in L^1([0, \infty), \mathbb{C}^{q \times p})$ gilt ([CS01] (S. 3)). Die Impulsantwort eines unendlich-dimensionalen Systems der betrachteten Systemklasse wird beispielsweise in [CZ95] (S. 179) definiert. Falls dabei $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p, \mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ mit $p, q < \infty$ gilt und ein exponentiell stabiles unendlich-dimensionales System mit $D = 0$ vorliegt, so gilt für die Impulsantwort eines solchen Systems $g(t) = C\Phi(t)B \in L^1([0, \infty); \mathbb{C}^{q \times p})$ ([Sas02] (S. 64)). Unter den genannten Annahmen lautet die Ein-/Ausgangsabbildung ausgedrückt auf Basis der Impulsantwort

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad t \geq 0. \quad (2.16)$$

Gramsche Operatoren und Hankel-Operator

Die Steuer-/ und Beobachtbarkeitsoperatoren eines Halbgruppen-Regelsystems mit beschränkten Ein-/ und Ausgangsoperatoren lauten unter der Annahme von $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p, \mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ bezüglich eines endlichen Zeithorizonts in Übereinstimmung mit dem endlich-dimensionalen Fall

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\tau : L^2([0, \tau]; \mathbb{C}^p) &\rightarrow \mathcal{X} \\ u &\mapsto \mathcal{B}_\tau u = \int_0^\tau \Phi(t)B u(t)dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\tau : \mathcal{X} &\rightarrow L^2([0, \tau]; \mathbb{C}^q) \\ x &\mapsto \mathcal{C}_\tau x = C\Phi(\cdot)x. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dabei gilt $\mathcal{B}_\tau \in \mathcal{L}(L^2([0, \tau]; \mathbb{C}^p), \mathcal{X})$ und $\mathcal{C}_\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, L^2([0, \tau]; \mathbb{C}^q))$, siehe [CZ95] (S. 144) beziehungsweise [CZ95] (S. 155). Für zusätzlich exponentiell stabile Systeme lassen sich darüber hinaus der Steuer-/ und Beobachtbarkeitsoperator \mathcal{B}_∞ beziehungsweise \mathcal{C}_∞ hinsichtlich eines unendlichen Zeithorizonts definieren. Sowohl im Endlich-dimensionalen als auch im Unendlich-dimensionalen kommt den Steuer-/Beobachtbarkeitsoperatoren eine besondere Bedeutung im Hinblick auf die Analyse der Steuerbarkeit beziehungsweise der Beobachtbarkeit eines Systems zu. Entsprechende Ausführungen finden sich in Abschnitt 3.3.1 und in [CZ95].

Sowohl für endlich-dimensionale Systeme als auch für die hier zugelassenen unendlich-dimensionalen Systeme lassen sich auf Basis der zu den Steuer-/ und Beobachtbarkeitsoperatoren jeweils adjungierten Operatoren die Steuer- und Beobachtbarkeits-Gramschen definieren. Ausgehend von

$$\langle \mathcal{B}_\tau u, x \rangle_{\mathcal{X}} = \langle u, \mathcal{B}_\tau^* x \rangle_{L^2([0, \infty); \mathbb{C}^p)} \quad (2.19)$$

folgt $(\mathcal{B}_\tau^* x)(t) = B^* \Phi^*(\tau - t)x$ für $t \in [0, \tau]$ und damit die Steuerbarkeits-Gramsche zu

$$\mathcal{W}_C = \mathcal{B}_\tau \mathcal{B}_\tau^* = \int_0^\tau \Phi(t) B B^* \Phi^*(t) dt. \quad (2.20)$$

Hinsichtlich der Beobachtbarkeits-Gramschen ergibt sich aus dem Ansatz $\langle \mathcal{C}_\tau x, y \rangle_{L^2([0, \infty); \mathbb{C}^q)} = \langle x, \mathcal{C}_\tau^* y \rangle_{\mathcal{X}}$ der adjungierte Beobachtbarkeits-Operator

$$\mathcal{C}_\tau^* y = \int_0^\tau \Phi^*(t) C^* y(t) dt, \quad \forall y \in L^2([0, \infty); \mathbb{C}^q) \quad (2.21)$$

und damit die gesuchte Gramsche zu

$$\mathcal{W}_O = \mathcal{C}_\tau^* \mathcal{C}_\tau = \int_0^\tau \Phi^*(t) C^* C \Phi(t) dt. \quad (2.22)$$

Im endlich-dimensionalen Fall lässt sich aus der Definitionen von \mathcal{W}_C und \mathcal{W}_O erkennen, dass die Eigenwerte der Steuer-/Beobachtbarkeits-Gramschen sich aus den Singulärwerten der Steuerbeziehungsweise Beobachtbarkeitsoperatoren ergeben. Da die Eigenwerte der Gramschen endlich-dimensionaler Systeme summierbar sind, sind die Steuer- bzw. Beobachtbarkeitsoperatoren gemäß den Klassifizierungen in Anhang B.4.5 Hilbert-Schmidt. Das Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren genügt stets den Anforderungen an einen nuklearen Operator, somit sind \mathcal{W}_C und \mathcal{W}_O nuklear, vergleiche Anhang B.4.5. Für die angenommene Untermenge der hier zugelassenen Systemklasse unendlich-dimensionaler Systeme lässt sich Theorem 3.1 aus [CS01] (S. 11) entnehmen, dass sowohl der Steuerbarkeitsoperator (2.20) als auch der Beobachtbarkeitsoperator (2.22) Hilbert-Schmidt sind und die Verknüpfungen dieser Operatoren untereinander oder mit ihren jeweiligen Adjungierten jeweils nuklear sind. Im Endlich-dimensionalen findet sich die Definition quantitativer Strukturmaße auf Basis der Gramschen Operatoren in [Ben86]. Im Unendlich-dimensionalen erfolgt die qualitative Beurteilung anhand der Gramschen Operatoren beispielsweise in Theorem 4.1.7 beziehungsweise Corollary 4.1.14 aus [CZ95].

Exponentiell stabilen Systemen der hier zugelassenen Systemklasse unendlich-dimensionaler Systeme und damit auch exponentiell stabilen endlich-dimensionalen Systemen ist auf Basis der Verknüpfung von Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsoperator

$$\begin{aligned} (\Gamma_g u)(\cdot) &= (\mathcal{C}_\infty (\mathcal{B}_\infty u))(\cdot) = \int_0^\infty C e^{(t+\tau)A} B u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty g(t+\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.23)$$

ein Hankel-Operator

$$\begin{aligned}\Gamma_g : L^2([0, \infty); \mathbb{C}^p) &\rightarrow L^2([0, \infty); \mathbb{C}^q) \\ u &\mapsto y = (\Gamma_g u)(\cdot)\end{aligned}\tag{2.24}$$

zugeordnet. Aufgrund der bereits genannten Hilbert-Schmidt Eigenschaft von Steuer- und Beobachtbarkeitsoperator lässt sich unmittelbar schließen, dass Γ_g nuklear ist. Der identische Schluss folgt wegen $g(t) \in L^1([0, \infty); \mathbb{C}^{q \times p})$. Die Nuklearität des Hankel-Operators spielt insbesondere im Hinblick auf endlich-dimensionale Approximationen eines der betrachteten Systeme eine wesentliche Rolle ([CS01]). Detaillierte Betrachtungen zu Hankel-Operatoren finden sich beispielsweise in [Pel03] und [Par07].

Stabilität stark stetiger Halbgruppen

Das Verhalten der einem System zugeordneten Halbgruppe für $t \rightarrow \infty$ ist Basis für die verschiedenen, in Abschnitt 3.2.1 eingeführten Stabilitätsbegriffe stark stetiger Halbgruppen. Im Gegensatz zum endlich-dimensionalen Fall gilt dabei im Allgemeinen nicht die Äquivalenz aller in Abschnitt 3.2.1 aufgeführten Stabilitätsbegriffe. Maßgeblich für die exponentielle Stabilität (Definition 9) einer stark stetigen Halbgruppe ist ihre Wachstumsgrenze ω_0 (Definition 5). Falls für $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die Wachstumsgrenze echt negativ ist, ist die stark stetige Halbgruppe exponentiell stabil und damit auch stabil im Sinne aller in Definition 10 genannten Stabilitätsbegriffe. Aufgrund der eindeutigen Zuordnung zwischen einer stark stetigen Halbgruppe und ihrem infinitesimalen Erzeuger A liegt der Gedanke nahe, dass die Stabilität von \mathcal{T}_Φ und damit des von \mathcal{T}_Φ repräsentierten Systems auch anhand von Eigenschaften des Systemoperators A zu ermitteln ist. Für ein endlich-dimensionales System ist ein echt negativer Realteil aller Eigenwerte $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, \dots, n$ der Systemmatrix A als notwendiges und hinreichendes Kriterium für Stabilität bekannt. Dieses einfach zu handhabende Kriterium ist im Endlich-dimensionalen gültig, weil die Spektralschranke (Definition 78) der Systemmatrix im Endlich-dimensionalen mit der Wachstumsgrenze der zugeordneten gleichmäßig stetigen Halbgruppe übereinstimmt. Für unendlich-dimensionale Systeme gilt diese Übereinstimmung im Allgemeinen nicht. Satz 69 beziehungsweise Satz 53 definieren eine Untermenge von unendlich-dimensionalen Systemen beziehungsweise eine Klasse von Systemoperatoren, für die $\omega_0 = s(T)$ gilt und damit aus $s(T) < 0$ die exponentielle Stabilität des Systems folgt.

Frequenzbereichsdarstellung

Die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Systemgleichungen (2.1)-(2.2) führt formal auf eine Systemdarstellung der betrachteten unendlich-dimensionalen Systeme im Bildbereich der Laplace-Transformation. Wird die Existenz der Laplace-Transformierten aller beteiligten Funktionen vorausgesetzt, gilt in einer Darstellung mittels der Rosenbrock-Systemmatrix

$$P(s) \begin{pmatrix} X(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ Y(s) \end{pmatrix}.\tag{2.25}$$

Die Rosenbrock-Systemmatrix bildet die komplexe Variable $s \in \mathbb{C}$ auf einen linearen Operator ab. Im Unendlich-dimensionalen ist die Darstellung mittels der Rosenbrock-Systemmatrix wenig verbreitet. Die Zuordnung eines Zustandsvektors $X(s)$ zur Kombination aus einem gegebenen Eingangsvektor $U(s)$ sowie den Anfangsbedingungen x_0 geschieht unter Verwendung der Resolvente

$$R(s, A) = (sI - A)^{-1}.$$

Die Resolvente $R(s, A) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ entspricht der Laplace-Transformierten der stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ und ist unter der Annahme einer Wachstumsgrenze ω_0 von $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ zumindest für $s > \omega_0$ korrekt gestellt (Lemma 2.1.11, [CZ95] (S. 24)). Ferner entspricht die Übertragungsfunktion eines Systems $\Sigma(\Phi(\cdot), B, C, D)$ der Laplace-Transformierten der Impulsantwort $g(t)$ des gleichen Systems. Für endlich-dimensionale Systeme findet sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix beispielsweise in [Fö13] (S. 284). Die ausführliche Einführung der Resolvente erfolgt in Abschnitt B.7.1.

Das Ein-/Ausgangsverhalten im Frequenzbereich folgt aus (2.25) in Abhängigkeit vom Eingangsvektor sowie den Anfangsbedingungen zu

$$\begin{aligned} Y(s) &= (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0 \\ &= (CR(s, A)B + D)U(s) + CR(s, A)x_0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die Vernachlässigung der Eigenbewegungen eines Systems durch die Annahme $x_0 = 0$ führt auf das Übertragungsverhalten eines Systems

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (2.27)$$

mit $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Für Ein-/Ausgangsoperatoren endlichen Rangs $\mathcal{L}(\mathbb{C}^p, \mathcal{X})$ beziehungsweise $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{C}^q)$ mit $p, q < \infty$ erfolgt zu einem gegebenen s die Abbildung eines Eingangsvektors auf einen Ausgangsvektor durch $G(s) \in \mathbb{C}^{q \times p}$.

Für unendlich-dimensionale Systeme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren endlichen Rangs wird in [CW92] die Formulierung als Übertragungsfunktion diskutiert. Dort findet sich darüber hinaus eine Einführung in die algebraischen Eigenschaften derartiger Übertragungsfunktionen. Eine ausführliche Behandlung endlich-dimensionaler LZI-Systeme im Frequenzbereich findet sich beispielsweise in [SP05] oder in Kombination mit einer Betrachtung der algebraischen Eigenschaften von Übertragungsmatrizen in [Rai94].

Das Übertragungsverhalten von Systemen mit einer endlich-dimensionalen Zustandsraumdarstellung $n < \infty$ lässt sich stets durch Übertragungsmatrizen mit Einträgen aus gebrochen rationalen Funktionen realisieren. Die Übertragungsfunktionen unendlich-dimensionaler Systeme sind stets nicht rationale Funktionen ([Bal66] (S. 1), [CM09] (S. 1)). Übertragungsfunktionen unendlich-dimensionaler Systeme hängen dabei nicht nur von den zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungen ab, sondern werden darüber hinaus auch wesentlich von den zugehörigen Randbedingungen bestimmt. Hinsichtlich der Darstellung derartiger Übertragungsfunktionen existieren verschiedene Möglichkeiten, die in Abschnitt 2.3 betrachtet werden. Einen umfangreichen Überblick

zum Übertragungsverhalten unendlich-dimensionaler Systeme bietet [CM09]. Insbesondere die dort aufgeführte geschlossene Darstellung der Übertragungsfunktionen unendlich-dimensionaler Systeme bietet eine interessante Möglichkeit zur Beschreibung eines Systems im Frequenzbereich.

2.1.3 Spektral-Systeme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren

Innerhalb dieses Abschnitts wird die Realisierung von Halbgruppen-Regelsystemen mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren aufgezeigt, deren Systemoperator A ein diagonalisierbarer Operator gemäß Definition 82 aus Abschnitt B.8.1 ist, für den somit also $A \in \mathcal{O}_D$ gilt. Die zugehörige Systemklasse wird an dieser Stelle als Spektral-System mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren bezeichnet. Die gesonderte Aufführung der Realisierung dieser Systemklasse begründet sich in erster Linie in der direkten Übertragbarkeit der aus dem Endlich-dimensionalen bekannten modalen Konzepte auf Spektral-Systeme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren. Darüber hinaus genügt der Systemoperator des Beispielsystems den Anforderungen an einen diagonalisierbaren Operator, und die Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse kann als Erweiterung der folgenden Ausführungen auf unbeschränkte Ein-/Ausgangsoperatoren angesehen werden.

Falls ein diagonalisierbarer Systemoperator eines solchen Spektral-Systems zusätzlich den Anforderungen an einen Riesz-Spektraloperator aus Definition 83 genügt und damit $A \in \mathcal{O}_R$ gilt, handelt es sich, der Nomenklatur aus [CZ95] (S. 141) folgend, bei dem zugehörigen System um ein Riesz-Spektral-System. Die Theorie dieser Systemklassen wird unter anderem ausführlich in [CZ95] behandelt.

Eigenwertproblem des Systemoperators

Sowohl im endlich-dimensionalen Fall als auch im Unendlich-dimensionalen lautet das Eigenwertproblem des Systemoperators $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ formal

$$(A - \lambda I)v = 0. \quad (2.28)$$

Dabei werden die λ als Eigenwerte von A und die nicht trivialen $v \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}$ als Eigenvektoren oder Rechtseigenvektoren von A bezeichnet ([ZF97] (S. 247)). Die Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators A^* heißen dagegen Linkseigenvektoren w von A . Bei der Systemmatrix eines endlich-dimensionalen Systems $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ handelt es sich um einen Endomorphismus, dessen Spektrum (Definition 75) ausschließlich aus Eigenwerten besteht. Diese Tatsache erlaubt eine vollständige Charakterisierung der Systemmatrix auf Basis ihrer Eigenwerte und verdeutlicht die Bedeutsamkeit der Lage der Eigenwerte von A im Hinblick auf verschiedene weiterführenden Analysen endlich-dimensionaler Systeme. Das Spektrum eines unbeschränkten Operators auf unendlich-dimensionalen Räumen besteht dagegen im Allgemeinen nicht ausschließlich aus Eigenwerten, vielmehr gilt generell Definition 76. Im Allgemeinen kann daher nicht von einer vollständigen Charakterisierung des Systemoperators eines unendlich-dimensionalen Systems durch seine Eigenwerte und Eigenvektoren ausgegangen werden.

Diagonalisierbare Systemoperatoren dagegen lassen sich gerade vollständig durch ihre Eigenwerte und Eigenvektoren charakterisieren und es gilt $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$ (Satz 53, **RSO4**). Daher sind diagonalisierbare Systemoperatoren in gewisser Weise als eine Generalisierung diagonalisierbarer Systemmatrizen endlich-dimensionaler Systeme aufzufassen. Für $A \in \mathcal{O}_D$ erleichtern sich die Darstellung und verschiedenste Betrachtungen des zugehörigen Systems auf vielfältige Weise. Insbesondere lassen sich in einem derartigen Fall unter anderem explizite Darstellungen für die Elemente des Zustandsraum, die systembeschreibenden Operatoren aus Gleichung (2.8) und die gegebenenfalls zugehörige stark stetige Halbgruppe auf Basis der Eigenvektoren von A und A^* angeben. Abschnitt B.8.2 enthält mit Satz 53 eine Aufzählung ausgewählter Eigenschaften diagonalisierbarer Operatoren.

Zustandsraumdarstellung

Hinsichtlich der Räume und Signale gelten die in Abschnitt 2.1.2 getroffenen Annahmen. Insbesondere gilt $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ und $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$. Die Beschreibung eines Spektral-Systems mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren im Zustandsraum basiert auf den Gleichungen (2.1) und (2.2). Da für $A \in \mathcal{O}_D$ die Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von A eine Rieszbasis (Definition 64) des Zustandsraums bilden, lassen sich unter Verwendung der biorthogonalen Menge aus den Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ alle Elemente des Zustandsraums in einer Reihe der Eigenvektoren entwickeln, es gilt

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}} v_i, \\ &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, v_i \rangle_{\mathcal{X}} w_i, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Während im Fall eines endlich-dimensionalen Systems die Konvergenz einer analog zu (2.29) gebildeten Reihe unter der Annahme endlicher Koeffizienten-Funktionale außer Frage steht, kann für die in (2.29) auftretende unendliche Reihe nicht zwingend Konvergenz für beliebige x erwartet werden, vergleiche Anhang B.5.3. Der Zustandsraum ist für den Fall $A \in \mathcal{O}_D$ mit einer durch das Innenprodukt $\langle x, y \rangle_{\mathcal{X}} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}} \overline{\langle y, w_i \rangle_{\mathcal{X}}}$ induzierten Norm $\|x\|_{\mathcal{X}}^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |x_i^*|^2$ mit $x_i^* = \langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}}$ vollständig. Unter Ausnutzung der Rieszbasis des Zustandsraums und der voranstehenden Norm lassen sich die Elemente des Zustandsraum auf einfache Weise durch

$$\mathcal{X} = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} x_i^* v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |x_i^*|^2 < \infty \right\} \quad (2.30)$$

charakterisieren, wobei die voranstehende Bedingung äquivalent zu $\{x_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ ist.

Das Einsetzen von (2.29) in die Zustandsraumdarstellung aus (2.1) und (2.2) sowie anschließende Ausnutzung der Biorthogonalität der Mengen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ führt auf eine Darstellung der

Zustandsgleichung in den Eigenräumen. Es gilt

$$\dot{x}_i^*(t) = \lambda_i x_i^*(t) + b_i^{*T} u(t), \quad t \geq 0, \quad x_i^*(0) = x_{i,0}^*, \quad (2.31)$$

$$y(t) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} c_i^* x_i^*(t) + Du(t), \quad (2.32)$$

mit $x_{i,0}^* = \langle x_0, w_i \rangle_{\mathcal{X}}$, $b_i^{*T} u = \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{X}} = \langle Bu, w_i \rangle_{\mathcal{X}}$ und $c_i^* = Cv_i$ für alle $i \in \mathbb{I}^+$.

Die betrachteten Spektral-Systeme werden durch die in Gleichung (2.7) definierten Abbildungen beschrieben. Die Operatoren der Zustandsraumdarstellung besitzen die in Gleichung (2.8) benannten Eigenschaften. Die Berücksichtigung von (2.29) führt auf eine Reihendarstellung

$$Ax = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \lambda_i \langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}} v_i \quad (2.33)$$

des Systemoperators. Mit Gleichung (B.81) aus **RSO3** Satz 53 steht eine explizite Charakterisierung des Definitionsbereichs $\mathcal{D}(A)$ von A zur Verfügung. Die Anwendung des Innenprodukts auf Bu und anschließende Nutzung der Eigenschaften des Innenprodukts ergeben

$$\langle Bu, w_i \rangle_{\mathcal{X}} = \langle u, B^* w_i \rangle_{\mathcal{U}} = \overline{\langle B^* w_i, u \rangle_{\mathcal{U}}}. \quad (2.34)$$

Unter der Annahme $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ mit $p < \infty$ folgt unter Verwendung des Innenprodukts $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^p} = x^T \bar{y}$ $\forall x, y \in \mathbb{C}^p$ unmittelbar

$$\overline{\langle B^* w_i, u \rangle_{\mathcal{U}}} = \left(\overline{B_1^* w_i} \quad \dots \quad \overline{B_p^* w_i} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Die Wohldefiniertheit des Innenprodukts erfordert, dass sich sowohl die Entwicklungskoeffizienten des Eingangsoperators als auch die Eingangssignale im Eingangsraum befinden. Das Bild des i -ten Linkseigenvektors unter der j -ten Zeile des adjungierten Eingangsoperators $B^* = \begin{pmatrix} B_1^* & \dots & B_p^* \end{pmatrix}^T$ und der konjugiert-komplexen Bildung wird durch $b_{j,i}^* = \overline{B_j^* w_i}$, $j = 1, \dots, p$ bezeichnet. Mit

$$b_i^* = \begin{pmatrix} b_{1,i}^* & \dots & b_{p,i}^* \end{pmatrix}^T \quad (2.36)$$

und den stets reellen Eingangssignalen $\bar{u} = u$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Bu, w_i \rangle_{\mathcal{X}} &= \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}} \\ &= b_i^{*T} u. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Darstellung des Eingangsoperators unter Berücksichtigung der oben genannten Rieszbasis des Zustandsraums lautet damit

$$Bu = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}} v_i. \quad (2.38)$$

Der Ausgangsoperator in der Rieszbasis des Zustandsraums folgt unmittelbar aus der Berücksichtigung von Gleichung (2.29) in der Ausgangsgleichung (2.2) zu

$$Cx = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle x c_i^*, \quad (2.39)$$

wobei für einen Ausgangsoperator der Form $C = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_q \end{pmatrix}^T$ abkürzend

$$c_i^* = \begin{pmatrix} C_1 v_i & \dots & C_q v_i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_{1,i}^* & \dots & c_{q,i}^* \end{pmatrix}^T, \quad \forall i \in \mathbb{I}^+ \quad (2.40)$$

gilt. In Analogie zum Endlich-dimensionalen bleibt die Darstellung von D von der Wahl einer Basis des Zustandsraums unbeeinflusst.

Zeitbereichslösung des ungezwungenen Systems

Im Gegensatz zu allgemeinen Systemoperatoren gestaltet sich die Überprüfung, ob es sich bei einem $A \in \mathcal{O}_D$ um den infinitesimalen Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe handelt, als vergleichsweise einfach. Laut **RSO5**) aus Satz 53 ist die Bedingung $\sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) < \infty$ notwendig und hinreichend dafür, dass ein diagonalisierbarer Operator infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum ist. Die gegebenenfalls von einem diagonalisierbaren Systemoperator erzeugte stark stetige Halbgruppe lässt sich unmittelbar in Spektraldarstellung angeben (Satz 53, **RSO5**), Gleichung (B.84)). Die in (2.12) beschriebene Lösung des durch einen derartigen Systemoperator definierten homogenen abstrakten Cauchy-Problems lautet

$$x(t) = \Phi(t)x_0 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i t} \langle x_0, w_i \rangle v_i, \quad t \geq 0. \quad (2.41)$$

Ein Vergleich mit der Lösung im Fall der diagonalisierbaren Systemmatrix eines endlich-dimensionalen Systems erlaubt, auf einer anschaulichen Ebene und mit nötiger Vorsicht, diagonalisierbare Operatoren als eine Generalisierung diagonalähnlicher Matrizen auf den unendlich-dimensionalen Fall zu interpretieren.

Falls eine stark stetige Halbgruppe von einem diagonalisierbaren Operator A erzeugt wird, stimmt ihre Wachstumsgrenze mit der Spektralschranke des infinitesimalen Erzeugers überein (Satz 53, **RSO5**)). Die exponentielle Stabilität der betreffenden stark stetigen Halbgruppe folgt dann aus $\sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ und lässt sich somit anhand des Realteils der Eigenwerte von A überprüfen. Damit gilt für durch diagonalisierbare Systemoperatoren repräsentierte unendlich-dimensionale Halbgruppen-Regelsysteme auch hinsichtlich eines Stabilitätskriteriums die Analogie zum Endlich-dimensionalen.

Ein-/Ausgangsverhalten im Zeitbereich

Das Berücksichtigen von Gleichung (2.41) in der Zeitbereichslösung eines allgemeinen Halbgruppen-Regelsystems mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren gemäß Gleichung (2.13) führt

unter Verwendung von Gleichung (2.37) auf

$$x(t) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i t} \langle x_0, w_i \rangle_{\mathcal{X}} v_i + \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i(t-\tau)} b_i^{*T} u(\tau) v_i d\tau \quad t \geq 0. \quad (2.42)$$

Die in Gleichung (2.14) definierte und durch Gleichung (2.15) beschriebene Ein-/Ausgangsabbildung lautet unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.37) und (2.40) im Fall eines der betrachteten Spektral-Systeme

$$y(t) = \mathfrak{G}u(t) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i t} c_i^* \langle x_0, w_i \rangle_{\mathcal{X}} + \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i(t-\tau)} c_i^* b_i^{*T} u(\tau) d\tau \quad t \geq 0. \quad (2.43)$$

Gleichermaßen lässt sich für ein derartiges System die Impulsantwort angeben und damit eine Ein-/Ausgangsabbildung im Zeitbereich entsprechend Gleichung (2.15) aufstellen. Auf die explizite Darstellung der Impulsantwort, der Steuer-/Beobachtbarkeitsoperatoren bezüglich eines unendlichen Zeithorizonts, der Gramschen-Operatoren und des Hankel-Operators wird an dieser Stelle verzichtet. Die jeweiligen Darstellungen lassen sich aus den bisherigen Betrachtungen ableiten.

Frequenzbereichsdarstellung

Im Falle $A \in \mathcal{O}_D$ zeigt Gleichung (B.83) aus Satz 53 **RSO4** die explizite Reihendarstellung der zugeordneten Resolvente. Im Bildbereich der Laplace-Transformation gilt mit den Gleichungen (2.37) und (2.40) für die explizite Darstellung der Übertragungsfunktion in Spektralform [CW92] (S. 79)

$$G(s) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{c_i^* b_i^{*T}}{s - \lambda_i} + D, \quad \operatorname{Re}(s) > \omega_0 < \infty. \quad (2.44)$$

Die Spektralform der Übertragungsfunktion lässt sich auf einfache Weise zur Bestimmung einer endlich-dimensionalen Approximation der exakten Übertragungsfunktion heranziehen. Im Falle der Approximation von $G(s)$ auf Basis eines Abbruchs der Reihe in (2.44) bleiben die Pole von $G(s)$ erhalten, allerdings entsprechen die Nullstellen der Approximation nicht exakt denen von $G(s)$. Die Konvergenz der in (2.44) auftretenden Reihe wird im Allgemeinen als langsam bezeichnet ([CW92] (S. 79)). Eine exakte Bestimmung der Nullstellen der Übertragungsfunktion eines unendlich-dimensionalen Systems ist gegebenenfalls auf Basis einer Darstellung durch ein unendliches Produkt möglich ([Goo70]). Für das Beispielsystem werden im Verlauf dieser Arbeit drei Darstellungsformen der Übertragungsfunktion ermittelt und vergleichend gegenübergestellt.

2.2 Dynamisches Verhalten ungezwungener linearer Systeme

Dieser Abschnitt widmet sich der Betrachtung des dynamischen Verhaltens ungezwungener linearer Systeme im Zeitbereich. Im Mittelpunkt steht dabei die Frage nach den Eigenschaften der

Lösung eines, einem solchen System zugeordneten, abstrakten Cauchy-Problems und den Bedingungen, die ein Systemoperator erfüllen muss, um zu garantieren, dass das zugeordnete abstrakte Cauchy-Problem korrekt gestellt ist. Die Anfangswertprobleme endlich-dimensionaler ungezwungener linearer Systeme sind stets korrekt gestellt, demnach existiert zu jedem Anfangswert aus dem Zustandsraum genau eine Lösung. Die Lösungen zu unterschiedlichen Anfangswerten werden über dem Zeitintervall mittels einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe determiniert, die ihrerseits durch die stets beschränkte Systemmatrix in eindeutiger Weise erzeugt wird. Im Allgemeinen ist jeder infinitesimale Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe beschränkt. Mit dem Zulassen allgemeiner unbeschränkter Systemoperatoren lässt sich die Korrektheitsstellung des zugeordneten Anfangswertproblems generell nicht garantieren. Diese Tatsache motiviert die Einschränkung der Betrachtungen auf Systeme, deren Systemoperator jeweils infinitesimaler Erzeuger einer zumindest stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum ist und die innerhalb dieser Arbeit daher als Halbgruppen-Regelsysteme bezeichnet werden. Ergänzend zu den Zeitbereichsbetrachtungen innerhalb dieses Abschnitts beinhaltet Abschnitt B.7.1 die Einführung der Resolvente und damit die Diskussion der entsprechenden Zusammenhänge im Bildbereich der Laplace-Transformation.

In Abschnitt 2.2.1 werden einleitend die Anforderungen an die starke Lösung eines abstrakten Cauchy-Problems eines ungezwungenen linearen Systems festgestellt. Damit ein abstraktes Cauchy-Problem korrekt gestellt ist, muss die mittels der Zeit parametrisierte Menge von Abbildungen, die die Lösung zu gegebenen Anfangsbedingungen über einem Zeitintervall determiniert, zumindest den Anforderungen an eine stark stetige Halbgruppe genügen. Aus diesem Grund beinhaltet Abschnitt 2.2.2 die Definition allgemeiner sowie gleichmäßig und stark stetiger Halbgruppen. Um den eindeutigen Zusammenhang zwischen dem Systemoperator eines Systems und der gegebenenfalls von diesem Operator erzeugten stark stetigen Halbgruppe zu verdeutlichen, enthält Abschnitt 2.2.2 ferner die Charakterisierung der infinitesimalen Erzeuger gleichmäßig und stark stetiger Halbgruppen. Im Hinblick auf die Erzeuger-Theoreme wird in Abschnitt 2.2.2 abschließend eine Klassifizierung stark stetiger Halbgruppen auf Basis der Wachstumsgrenze der Halbgruppe vorgenommen.

Nachfolgend dient Abschnitt 2.2.3 der Einführung des Hille-Yosida-Theorems und des Lumer-Phillips-Theorems, die jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen an einen linearen Operator formulieren, damit dieser der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe beziehungsweise einer kontraktiven Halbgruppe ist. Ausgehend vom Lumer-Phillips-Theorem wird zudem eine leicht zu überprüfende notwendige und hinreichende Bedingung für einen diagonalisierbaren Operator hergeleitet, unter der dieser der Erzeuger einer kontraktiven Halbgruppe auf dem Zustandsraum ist.

Im Unendlich-dimensionalen hängen die Eigenschaften eines Operators vom zugrunde liegenden Raum ab, daher bildet die problemspezifische Realisierung des Zustandsraums einen wesentlichen Bestandteil der Formulierung einer korrekt gestellten Zustandsraumdarstellung eines unendlich-dimensionalen Systems. Abschließend wird in Abschnitt 2.2.4 die Konstruktion des Zustandsraums des ungezwungenen Beispielsystems demonstriert. Dabei wird eine Zustandsraumdarstellung er-

zeugt, sodass der Systemoperator den in Satz 3 genannten notwendigen Bedingungen genügt, um der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum zu sein.

2.2.1 Abstraktes Cauchy-Problem

Unter der Annahme eines Banachraums \mathcal{X} sowie eines linearen Operators $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ wird ein homogenes Anfangswertproblem der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t)}{\partial t} &= A x(t) \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2.45}$$

mit Anfangswerten $x_0 \in \mathcal{X}$ synonym als abstraktes Cauchy-Problem zu $(A, \mathcal{D}(A))$ und x_0 bezeichnet ([EN00] (S. 145)). Das durch (2.45) definierte Problem geht für $f(t) = 0, \forall t \geq 0$ als Sonderfall aus dem in Abschnitt C.1 definierten inhomogenen abstrakten Cauchy-Problem hervor. In der regelungstechnisch gebräuchlichen Nomenklatur entspricht (2.45) der Zustandsgleichung innerhalb einer Zustandsraumdarstellung eines deterministischen ungezwungenen linearen zeitinvarianten Systems. Der Operator A in (2.45) nimmt die Rolle des Systemoperators ein, \mathcal{X} bezeichnet den Zustandsraum. Zu einem abstrakten Cauchy-Problem wird gewöhnlich eine eindeutige starke Lösung $x(t)$ gemäß Definition C.1.2 gesucht, die als solche für $t \geq 0$ im Definitionsbereich des Systemoperators verläuft, d.h. $x(t) \in \mathcal{D}(A) \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Definition einer starken Lösung beinhaltet insbesondere auch die Differenzierbarkeit der Lösung. Die Definition verschiedener Lösungsbegriffe wird in Abschnitt C.1.2 vorgenommen.

Ein abstraktes Cauchy-Problem wird als korrekt gestellt bezeichnet, falls eine Lösung zu dem Problem existiert, diese ferner eindeutig ist und in gewissem Sinn eine stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen aufweist. Diese charakteristischen Eigenschaften korrekt gestellter abstrakter Cauchy-Probleme gehen auf [Had02] zurück. Eine ausführliche Erläuterung zu den Prinzipien von Hadamard und deren Wurzeln findet sich in [HP57] (S. 617ff), weitere Ausführungen dazu sind beispielsweise [Str95] (S. 28) oder [EN00] (S. 151) zu entnehmen. Die aus verschiedenen Anfangswerten resultierenden Lösungen des abstrakten Cauchy-Problems werden im regelungstechnischen Kontext als Zustandstrajektorien bezeichnet, beide Begriffe werden im Folgenden synonym verwendet.

Die Korrektgestelltheit eines homogenen abstrakten Cauchy-Problems lässt sich unmittelbar an die Eigenschaften des in (2.45) auftretenden Systemoperators A knüpfen. Aus [EN00] (S. 151) entstammt der folgende Satz, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Korrektgestelltheit eines homogenen abstrakten Cauchy-Problems formuliert.

Satz 1 *Das zu einem abgeschlossenen Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ gehörige abstrakte Cauchy-Problem ist genau dann korrekt gestellt, wenn A eine stark stetige Halbgruppe auf \mathcal{X} erzeugt.*

Die Definition abgeschlossener Operatoren findet sich in Definition 53 auf Seite 255, ein Beweis zu Satz 1 wird in [EN00] geführt. Die Existenz einer starken Lösung eines abstrakten Cauchy-Problems ist für den Fall, dass der Systemoperator infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen

Halbgruppe $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf \mathcal{X} ist, für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ gesichert ([Paz83] (S. 100), [EN00] (S. 145)). Für diesen Fall lautet die gesuchte Lösung in Abhängigkeit von gegebenen Anfangsbedingungen $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, ausgedrückt durch die vom Systemoperator erzeugte stark stetige Halbgruppe $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot)x_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathcal{X}, \\ t &\mapsto \Phi(t)x_0 = x(t). \end{aligned} \tag{2.46}$$

In den folgenden Abschnitten wird der Begriff der Halbgruppe im Kontext des abstrakten Cauchy-Problems eingeführt und darüber hinaus der Zusammenhang zwischen einer Halbgruppe und ihrem infinitesimalen Erzeuger erläutert.

2.2.2 Operatorhalbgruppen und ihre infinitesimalen Erzeuger

Innerhalb dieser Arbeit werden unendlich-dimensionale Systeme vorausgesetzt, für die sich die Lösung des abstrakten Cauchy-Problems (2.45) mittels einer stark stetigen Halbgruppe darstellen lässt. Satz 1 folgend kommt diese Voraussetzung einer Fokussierung auf korrekt gestellte Probleme gleich.

Der vorliegende Abschnitt dient der Einführung stark stetiger Halbgruppen. Im Anschluss an die Definition allgemeiner Halbgruppen erfolgt dazu eine Differenzierung von Halbgruppen anhand der gleichmäßigen und der starken Stetigkeit und damit im Sinne unterschiedlicher Operatortopologien. Anschließend wird auf Basis der Charakterisierung des infinitesimalen Erzeugers gleichmäßig beziehungsweise stark stetiger Halbgruppen eine eindeutige Verknüpfung zwischen den Halbgruppen und dem das abstrakte Cauchy-Problem beschreibenden Systemoperator hergestellt. Die im Fall unendlich-dimensionaler Systeme im Allgemeinen zu erwartenden unbeschränkten Systemoperatoren genügen aufgrund ihrer Unbeschränktheit nicht den Anforderungen an den infinitesimalen Erzeuger gleichmäßig stetiger Halbgruppen. Die Ausführungen zu gleichmäßig stetigen Halbgruppen und den zugehörigen infinitesimalen Erzeugern sind daher der Verdeutlichung von Analogien und Unterschieden zwischen den Lösungen endlich- und unendlich-dimensionaler Systeme geschuldet.

Abschließend beinhaltet der vorliegende Abschnitt eine weiterführende Klassifizierung stark stetiger Halbgruppen auf Basis der Wachstumsgrenze der Halbgruppe. Diese Klassifizierung wird im Hinblick auf die Erzeuger-Theoreme und insbesondere das Lumer-Phillips-Theorem in Abschnitt 2.2.3 vorgenommen. Eine weitere Spezifizierung bestimmter Untermengen stark stetiger Halbgruppen erfolgt im Hinblick auf das Beispielsystem zusätzlich in Abschnitt D.2.1.

Operatorhalbgruppen

In Abhängigkeit von gegebenen Anfangsbedingungen x_0 wird die Lösung des abstrakten Cauchy-Problems gemäß (2.46) für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch eine noch näher zu beschreibende Abbildung $\Phi(t)$ determiniert. Eine Charakterisierung von $\Phi(t)$ erfolgt in [EN00] mittels der „Gesetzmäßigkeiten

des Determinismus“, die entsprechenden Eigenschaften finden sich in der folgenden Definition der Halbgruppe.

Definition 1 (Halbgruppe) Es sei \mathcal{X} ein Banachraum und $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine durch $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $t \mapsto \Phi(t)$ definierte Menge beschränkter linearer Operatoren. Falls

$$\mathbf{HG1}) \Phi(0) = I,$$

$$\mathbf{HG2}) \Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_2) \Phi(t_1), \quad t_1, t_2 \geq 0$$

gilt, wird \mathcal{T}_Φ als Halbgruppe bezeichnet. □

Die Eigenschaft **HG1)** besagt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anwendung des linearen Operators $\Phi(0)$ auf den Anfangszustand gerade wieder den Anfangszustand ergibt und entsprechend muss $\Phi(0)$ die Identität auf dem Zustandsraum sein. **HG2)** spiegelt wider, dass sich, ausgehend von einem Anfangszustand, das identische Element des Zustandsraums ergibt, unabhängig davon, ob man ein betrachtetes Zeitintervall in einem einzelnen Schritt oder in mehreren Teilschritten durchläuft.

Eine Menge von Operatoren $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ besitzt mit der Multiplikation gemäß **HG2)** eine Verknüpfung, deren Resultat wiederum in der Menge liegt. Zusammen mit der aus **HG2)** folgenden Assoziativität

$$(\Phi(t_1) \Phi(t_2)) \Phi(t_3) = \Phi(t_1) (\Phi(t_2) \Phi(t_3)) \quad (2.47)$$

dieser Verknüpfung genügt die Menge \mathcal{T}_Φ den Bedingungen einer Halbgruppe. Aufgrund ihrer Elemente und der Abhängigkeit von einer einzelnen Unabhängigen sollte eine Halbgruppe entsprechend Definition 1 präziser als einparametrische Operatorhalbgruppe bezeichnet werden. Abkürzend wird im Folgenden weiterhin die weithin gebräuchliche Terminologie Halbgruppe verwendet. Eine Halbgruppe besitzt mit der Identität nach **HG1)** ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation und genügt somit den Anforderungen eines Monoids ([How95] (S. 2), [JS00] (S. 8)). Eine Einführung in die Halbgruppen-Theorie zusammen mit einer Einordnung in den mathematischen Kontext findet sich u.a. in [Hil48; HP57; Paz83; How95] oder [Bey07]. Für eine mathematisch abstraktere Interpretation der Abbildung $t \mapsto \Phi(t)$ als Homomorphismus zwischen zwei Halbgruppen sei auf [EN00] (S. 8) verwiesen.

Gleichmäßig und stark stetige Halbgruppen

Eine weiterführende Klassifizierung von Halbgruppen kann basierend auf den jeweiligen spezifischen topologischen Eigenschaften vorgenommen werden. Dieser Abschnitt dient der Einführung gleichmäßig stetiger und stark stetiger Halbgruppen, wobei es sich bei der Stetigkeit im starken Sinn um eine schwächere topologische Eigenschaft handelt. Die Lösung des abstrakten Cauchy-Problems eines endlich-dimensionalen Systems lässt sich stets durch eine gleichmäßig stetige Halbgruppe darstellen, und diese gleichmäßig stetige Halbgruppe ist eindeutig durch die beschränkte

Systemmatrix determiniert. Der Systemoperator A eines unendlich-dimensionalen Systems ist im allgemeinen Fall nicht beschränkt und erzeugt demnach keine gleichmäßig stetige Halbgruppe. Allerdings lassen sich bestimmte unendlich-dimensionale Systeme durch stark stetige Halbgruppen darstellen. Die Lösung eines zugehörigen abstrakten Cauchy-Problems weist dann ähnlich angenehme Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften auf wie die Lösungen abstrakter Cauchy-Probleme definiert durch beschränkte Systemoperatoren. Innerhalb dieser Arbeit wird die Eigenschaft der „Cesáro-Summierbarkeit“ [EN00] nicht explizit eingeführt, daher wird auf die weithin für stark stetige Halbgruppen gebräuchliche Bezeichnung als C_0 -Halbgruppe verzichtet.

Die unmittelbare Gegenüberstellung der beiden unterschiedlichen Klassen von Halbgruppen verdeutlicht in der folgenden Definition die Unterschiede zwischen dem endlich-dimensionalen und dem unendlich-dimensionalen Fall.

Definition 2 (Gleichmäßig und stark stetige Halbgruppe) Sei \mathcal{X} ein Banachraum und $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Halbgruppe auf \mathcal{X} gemäß Definition 1. Dann heißt \mathcal{T}_Φ

TGS1) gleichmäßig stetige Halbgruppe, falls $\lim_{t \rightarrow +0} \|\Phi(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = 0$;

TSS1) stark stetige Halbgruppe, falls $\lim_{t \rightarrow +0} \|\Phi(t)x_0 - x_0\|_{\mathcal{X}} = 0, \forall x_0 \in \mathcal{X}$; □

Die Bedingung **TGS1)** enthält eine äquivalente Darstellung der Konvergenz einer Operatorfolge im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie, entsprechend Definition 49 oder ([DS58] (S. 475)). Folglich zeichnet sich eine gleichmäßig stetige Halbgruppe durch die Konvergenz der Abbildung $\Phi(t)$ im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie gegen die Identität auf dem Raum \mathcal{X} aus, während sich t rechtsseitig an Null annähert. Gleichbedeutend zur Konvergenz aus **TGS1)** ist die Stetigkeit der Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}) \\ t &\mapsto \Phi(t) \end{aligned} \tag{2.48}$$

im Sinne der Operatornorm auf dem in Abschnitt Anhang B.4.2 definierten Raum der beschränkten linearen Operatoren $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ ([EN00] (S. 8)).

Die Bedingung **TSS1)** ist eine äquivalente Formulierung der Konvergenz im Sinne der starken Operatortopologie gemäß Definition 49 **OK2)**. Bei dieser Form der Konvergenz besitzt das Bild $\Phi(t)x_0$, im Sinne der Norm von \mathcal{X} , einen punktweise stetigen Übergang gegen x_0 an jedem Element $x_0 \in \mathcal{X}$, während sich t rechtsseitig an Null annähert. Gleichbedeutend mit der Konvergenz aus **TSS1)** ist die Stetigkeit der Zustandstrajektorien

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot)x_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathcal{X} \\ t &\mapsto \Phi(t)x_0 \end{aligned} \tag{2.49}$$

für alle $x_0 \in \mathcal{X}$.

Sowohl in **TGS1**) als auch in **TSS1**) wird die Stetigkeit der Abbildung aus (2.48) vom Zeitintervall auf den Raum der beschränkten linearen Operatoren betrachtet ([EN00] (S. 36)). Allerdings wird der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ jeweils mit einer unterschiedlichen Topologie ausgestattet. Im Fall der gleichmäßig stetigen Halbgruppe liegt die Konvergenz der Operatorfolge gemäß **TGS1**) im Sinne der Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ und damit im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie (Definition 49, **OK1**)) vor. Für stark stetige Halbgruppen gilt dagegen die schwächere punktweise Konvergenz des Bildes $\Phi(t)x_0 \rightarrow x_0$ für $t \rightarrow 0$ an jeder Stelle x_0 des Raums \mathcal{X} im Sinne der Norm von \mathcal{X} und damit im Sinne der starken Operatortopologie (Definition 49, **OK2**)). Falls ein lineares, ungezwungenes System durch eine zumindest stark stetige Halbgruppe zu beschreiben ist, verläuft nach (2.49) jede seiner Zustandstrajektorien (2.49) zu jedem gegebenen $x_0 \in \mathcal{X}$ in Abhängigkeit von der Zeit stetig. Anschaulich ist, unabhängig von einem gegebenen Anfangszustand x_0 , bei kleinen zeitlichen Schritten somit nicht mit beliebig großen Änderungen der Zustandsgrößen zu rechnen.

Infinitesimaler Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe

Da ein Systemoperator A die Eigenschaften eines linearen Systems wiedergibt und bei gegebenen Anfangsbedingungen x_0 die Abbildung $\Phi(t)$ die Zustandstrajektorie determiniert, ist ein Zusammenhang zwischen dem Systemoperator und der Menge von Abbildungen \mathcal{T}_Φ zu erwarten. Aus [EN00] (S. 17) ist der folgende Satz bekannt.

Satz 2 (Erzeuger gleichmäßig stetiger Halbgruppen) *Es sei \mathcal{X} ein Banachraum. Dann existiert zu jeder gleichmäßig stetigen Halbgruppe \mathcal{T}_Φ auf \mathcal{X} eine Darstellung der Form*

$$\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}_{e^{At}} = \{e^{At}\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}, \quad (2.50)$$

mit einem $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. □

Ein Beweis zu Satz 2 wird in [EN00] (S. 17) geführt, eine Entsprechung von Satz 2 findet sich beispielsweise auch in [Paz83] (S. 2). Unter Annahme einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe gemäß Definition 2 lauten die Zustandstrajektorien eines abstrakten Cauchy-Problems unter Verwendung von Satz 2 und der Annahme beliebiger Anfangsbedingungen $x_0 \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} e^{A(\cdot)}x_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathcal{X} \\ t &\mapsto e^{At}x_0 = x(t). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Die Definition der Exponentialfunktion e^{At} beruht auf der Operatorfolge

$$\sum_{i=0}^I \frac{A^i t^i}{i!} \rightarrow e^{At} \text{ für } I \rightarrow \infty, \quad (2.52)$$

deren Konvergenz für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie (Definition 49) für alle beschränkten Systemoperatoren $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ gewährleistet ist ([EN00]). Es gilt

$$e^{At} = \lim_{I \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^I \frac{A^i t^i}{i!}. \quad (2.53)$$

Mittels gleichmäßig stetiger Halbgruppen in Zusammenhang mit dem zugehörigen beschränkten Systemoperator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ im abstrakten Cauchy-Problem lassen sich insbesondere alle endlich-dimensionalen linearen zeitinvarianten Systeme beschreiben. Die in Satz 2 geschilderte Zuordnung zwischen einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe und einem beschränkten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ kann eindeutig anhand der zeitlichen Differentiation der Abbildung aus $e^{A(\cdot)} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ erfolgen. Aus der Stetigkeit der Abbildung $e^{A(\cdot)} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ sowie den in Definition 1 auf Seite 43 genannten Eigenschaften von Operatorhalbgruppen **HG1**) und **HG2**) folgt die Differenzierbarkeit von e^{At} für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezüglich der Zeit, und $\Phi(t) = e^{At}$ erfüllt die Differentialgleichung ([EN00] (S. 16))

$$\begin{aligned} \frac{de^{At}}{dt} &= Ae^{At}, \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ e^{At} &= I, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Aus der Differentialgleichung (2.54) geht hervor, dass die zeitliche Änderung von $\Phi(t) = e^{At}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ den Systemoperator

$$A = \left. \frac{de^{At}}{dt} \right|_{t=0} \quad (2.55)$$

festlegt. Ist $\Phi(t) = e^{At}$ bekannt, ermöglicht Gleichung (2.55) die eindeutige Bestimmung des dem zugeordneten Cauchy-Problems zugehörigen Systemoperators A . Aufgrund der Betrachtung infinitesimal kleiner zeitlicher Schritte trägt ein auf Basis von (2.55) definiertes A die Bezeichnung infinitesimaler Erzeuger der gleichmäßig stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_{e^{At}} = \{e^{At}\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$.

Umgekehrt stellt die Beschränktheit eine notwendige und hinreichende Bedingung für einen Systemoperator A dar, um der infinitesimale Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe zu sein (Satz 2). Aus der zeitlichen Differenzierbarkeit von $e^{A(\cdot)} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ folgt die Differenzierbarkeit der Zustandstrajektorien (2.51) bezüglich der Zeit an jedem Punkt des Raums \mathcal{X} . Zu jeder festen Anfangsbedingung $x_0 \in \mathcal{X}$ sind die Zustandstrajektorien damit die eindeutige starke Lösung des abstrakten Cauchy-Problems zu A ([EN00]).

Infinitesimale Erzeuger stark stetiger Halbgruppen

In diesem Abschnitt erfolgt die eindeutige Zuordnung des infinitesimalen Erzeugers A zu einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_{\Phi} = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ anhand der zeitlichen Differentiation der Abbildung aus (2.49). Darüber hinaus werden die Anforderungen aufgeführt, denen ein linearer Operator A genügen muss, um infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe \mathcal{T}_{Φ} zu sein.

Abgesehen von differenzierbaren stark stetigen Halbgruppen (Definition 102) impliziert die Stetigkeit der Zustandstrajektorien (2.49) nicht ihre Differenzierbarkeit an allen Punkten $x \in \mathcal{X}$ ([DL92] (S. 315), [CZ95] (S. 20)). Die Untermenge der $x \in \mathcal{X}$, auf der $\Phi(t)x$ zeitlich differenzierbar ist, wird daher besonders hervorgehoben und als Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ des noch einzuführenden infinitesimalen Erzeugers bezeichnet. Die zugehörige Definition 3 stammt aus [DL92] (S. 315).

Definition 3 (Definitionsbereich infinitesimaler Erzeuger stark stetiger Halbgruppen) Die Menge aller $x \in \mathcal{X}$ für die $\Phi(t)x$ für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar ist, heißt $\mathcal{D}(A)$ und es gilt

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Phi(h)x - x}{h} \text{ existiert und liegt in } \mathcal{X} \right\}. \quad (2.56)$$

Stellvertretend für die Differenzierbarkeit der Abbildung $t \mapsto \Phi(t)x$ für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ reicht es aus, die rechtsseitige Differenzierbarkeit zum Zeitpunkt Null zu betrachten. Mit

$$\frac{\Phi(h)x - x}{h} = A_h x \quad (2.57)$$

muss für die rechtsseitige Differenzierbarkeit auf dem Zeitintervall $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, aufgrund der Eigenschaften der Operatorhalbgruppe $\Phi(t+h) = \Phi(t)\Phi(h)$, der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Phi(t+h)x - \Phi(t)x}{h} = \Phi(t) \lim_{h \rightarrow 0+} A_h x \quad (2.58)$$

existieren. Für stark stetige Halbgruppen \mathcal{T}_Φ folgt aus der Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes die Existenz des linksseitigen Grenzwertes ([EN00] (S. 48), 1.1 Lemma) und somit die Differenzierbarkeit von $t \mapsto \Phi(t)x$ auf dem Zeitintervall $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Mit Definition 3 liegt eine Charakterisierung des Definitionsbereichs einer stark stetigen Halbgruppe durch die $x \in \mathcal{X}$ vor, für die der Grenzübergang (2.58) existiert. Allerdings beinhaltet Definition 3 weder einen expliziten Ausdruck für den besagten Definitionsbereich noch für alle $x \in \mathcal{D}(A)$. Eine Formulierung der Elemente des Definitionsbereichs eines infinitesimalen Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe lässt sich beispielsweise für die Erzeuger aus der Klasse der diagonalisierbaren Operatoren \mathcal{O}_D in Form einer Reihenentwicklung explizit angeben (Satz 53).

An die Stelle der Definition des infinitesimalen Erzeugers einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe auf Basis von (2.55) tritt im Fall des infinitesimalen Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe Definition 4.

Definition 4 (Infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe) Der Operator, der durch den Grenzübergang

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0+} A_h x$$

definiert ist und den dicht in \mathcal{X} liegenden Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ besitzt, heißt infinitesimaler Erzeuger der stark stetigen Halbgruppe $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$. \square

Die Definition dichter Teilmengen erfolgt in Definition 30. Verschiedene nützliche Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen und ihrer infinitesimalen Erzeuger sind in Abschnitt C.1.3 und den dort

genannten Quellen aufgeführt. Basierend auf Definition 4 formuliert der folgende Satz die notwendigen Eigenschaften des infinitesimalen Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe, die als wichtige Anhaltspunkte für die Konstruktion des Zustandsraums in Abschnitt 2.2.4 dienen. Die Herleitung von Satz 3 findet sich beispielsweise in [DL92] (S. 316), [EN00] (S. 51) oder in [CZ95] (S. 23).

Satz 3 *Der infinitesimale Erzeuger A einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist ein linearer, abgeschlossener und dicht definierter Operator.*

Eine unmittelbare Verknüpfung zwischen der Korrektgestelltheit eines abstrakten Cauchy-Problems und der Eigenschaft eines zugeordneten Operators, infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe zu sein, findet sich bereits in Satz 1 auf Seite 41. Während Satz 2 auf Seite 45 notwendige und hinreichende Bedingungen an den infinitesimalen Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe formuliert, schränkt Satz 3 die zulässigen unbeschränkten Operatoren, die als infinitesimale Erzeuger stark stetiger Halbgruppen in Frage kommen, ein.

Die dichte Definition des Systemoperators bedeutet, dass der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ ein dichter Untervektorraum von \mathcal{X} ist und damit $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$ gilt. Folglich enthält das orthogonale Komplement des Definitionsbereichs $\mathcal{D}(A)$ in \mathcal{X} lediglich die Null $\mathcal{D}(A)^\perp = \{0\}$. Die in Satz 3 genannte dichte Einbettung hängt von der Wahl des Zustandsraums ab. Ansätze zum Nachweis der Abgeschlossenheit eines linearen Operators folgen in Abschnitt 2.2.4. Mathematisch generalisierte Betrachtungen, die auf die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines dem Systemoperator zugeordneten abstrakten Cauchy-Problems führen, ohne die dichte Definition des Systemoperators zu verlangen, finden sich in [PS87a]. Ansätze zur Behandlung von Systemen mit nicht dicht definierten Systemoperatoren im regelungstechnischen Kontext enthält beispielsweise [Fu06]. Derartige Ansätze werden an dieser Stelle nicht weiter verfolgt.

Wachstumsgrenze stark stetiger Halbgruppen

Neben den definitionsgemäß vorhandenen Eigenschaften besitzt jede stark stetige Halbgruppe weitere Merkmale, die unter anderem die Stetigkeit auf kompakten Zeitintervallen oder kompakten Untermengen des Raums \mathcal{X} betreffen ([EN00] (S. 37)). Insbesondere aus der gleichmäßigen Stetigkeit einer stark stetigen Halbgruppe auf einem kompakten Zeitintervall folgt dabei die exponentielle Beschränktheit auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und damit die Existenz der sogenannten Wachstumsgrenze $\omega_0 < \infty$ ([EN00] (S. 39)). Der folgende Satz basiert auf einer Proposition, die zusammen mit einem zugehörigen Beweis in [EN00] (S. 39) zu finden ist. Inhaltlich trifft Satz 4 eine Aussage über die Existenz exponentieller oberer Beschränkungen stark stetiger Halbgruppen.

Satz 4 *Für jede stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ existieren Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\|\Phi(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad (2.59)$$

für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.

Gestützt auf die Existenz exponentieller oberer Beschränkungen gemäß Satz 4 erfolgt die Definition der Wachstumsgrenze stark stetiger Halbgruppen entsprechend [EN06] (S. 188). Die Definition der Wachstumsgrenze basiert auf der größten unteren Schranke aller ω , für die (2.59) gilt.

Definition 5 (Wachstumsgrenze einer stark stetigen Halbgruppe) Es sei \mathcal{T}_Φ eine stark stetige Halbgruppe und A ihr infinitesimaler Erzeuger, dann wird

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_0(\mathcal{T}_\Phi) = \omega_0(A) \\ &= \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} \mid \exists M_\omega \geq 1, \text{ sodass } \|\Phi(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}\end{aligned}\quad (2.60)$$

$$= \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} \mid \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\omega t} \|\Phi(t)\| = 0 \right\} \quad (2.61)$$

als Wachstumsgrenze der stark stetigen Halbgruppe \mathcal{T}_Φ bezeichnet. \square

Insbesondere die in (2.61) aufgeführte Definition der Wachstumsgrenze von \mathcal{T}_Φ impliziert die unmittelbare Abhängigkeit der gleichmäßigen exponentiellen Stabilität einer stark stetigen Halbgruppe aus Definition 9 von ihrer Wachstumsgrenze ω_0 .

Weiterführende Klassifikationen stark stetiger Halbgruppen auf Basis von (2.59) beziehungsweise der dort auftretenden Konstanten ω und M sind u.a. aus [EN00] (S. 40) bekannt und innerhalb der folgenden Definition zusammengefasst.

Definition 6 (Klassifizierung stark stetiger Halbgruppen) Es sei $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine stark stetige Halbgruppe. Dann heißt \mathcal{T}_Φ

KSSH1) gleichmäßig beschränkt, falls (2.59) mit der Wahl $\omega = 0$ und $M \geq 1$ gilt;

KSSH2) kontraktiv, falls (2.59) mit der Wahl $M = 1$ und $\omega = 0$ gilt;

KSSH3) quasi-kontraktiv, falls (2.59) mit der Wahl $M = 1$ und für ein $\omega \geq 0$ gilt. \square

Die aufgeführten Spezialfälle stark stetiger Halbgruppen besitzen zum Teil angenehmere mathematische Eigenschaften, als es bei allgemeinen stark stetigen Halbgruppen der Fall ist. Als Folge dessen vereinfachen sich einige weiterführende Betrachtungen für derartige Spezialfälle. Stellvertretend dafür sei an dieser Stelle die Charakterisierung der Erzeuger stark stetiger Halbgruppen in Abschnitt 2.2.3 genannt. Im Hinblick auf die Systemanalyse des Beispielsystems sei ferner darauf hingewiesen, dass jede kontraktive Halbgruppe oder äquivalent Kontraktionshalbgruppe auch den Anforderungen an eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe genügt. Darüber hinaus wird in [EN00] gezeigt, dass eine Operatorhalbgruppe auf einem vollständigen Vektorraum genau dann stark stetig ist, wenn sie schwach stetig ist und demnach also starke und schwache Operatortopologie in diesem Zusammenhang austauschbar sind. Im Hinblick auf die Analyse des Beispielsystems

werden in Abschnitt D.2.1 einige weiterführende Klassifizierungen stark stetiger Halbgruppen eingeführt.

2.2.3 Erzeuger-Theoreme

Dieser Abschnitt beinhaltet zwei Theoreme, die notwendige und hinreichende Bedingungen an einen linearen Operator formulieren, damit dieser der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe beziehungsweise einer kontraktiven Halbgruppe ist. Falls ein Systemoperator eines der aufgeführten Theoreme erfüllt, folgt anhand von Satz 1 die Korrektgestelltheit des durch ihn definierten abstrakten Cauchy-Problems. Einführend dient das wohlbekannte Hille-Yosida-Theorem der Betrachtung vergleichsweise allgemeiner Operatoren. Anschließend wird mittels des Lumer-Phillips-Theorems der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe charakterisiert. Beide Erzeuger-Theoreme vereinfachen sich für den Spezialfall eines diagonalisierbaren Operators auf eine einfache Bedingung bezüglich der Realteile der Eigenwerte des betreffenden Operators. Satz 53 enthält eine aus dem Hille-Yosida-Theorem abzuleitende notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein diagonalisierbarer Operator eine stark stetige Halbgruppe auf dem Zustandsraum erzeugt. An dieser Stelle wird zusätzlich auf Basis des Lumer-Phillips-Theorems eine notwendige und hinreichende Bedingung für einen diagonalisierbaren Operator hergeleitet, damit dieser Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf dem Zustandsraum ist.

Das Hille-Yosida-Theorem

Das Hille-Yosida-Theorem wird von verschiedenen Autoren in unterschiedlichen Formulierungen verwendet. Die in Satz 5 aufgeführte Variante ist an [DS58] (S. 624) angelehnt und bezieht sich auf den allgemeinen Fall einer nicht weiter klassifizierten, stark stetigen Halbgruppe. Darüber hinaus finden sich Formulierungen des genannten Theorems beispielsweise in [CZ95] (S. 26), [LGM99] (S. 28) oder [EN00] (S. 77). Die wesentlich vereinfachten Formulierungen für den Fall kontraktiver sowie quasi-kontraktiver Halbgruppen werden beispielsweise in [EN00] rezipiert.

Satz 5 (Hille-Yosida-Theorem) *Es sei \mathcal{X} ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ abgeschlossen und dicht definiert. A ist genau dann der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe, falls reelle Zahlen M und ω existieren, sodass $s \in \rho(A)$ für alle $\operatorname{Re}(s) > \omega$ und*

$$\|R(s, A)^r\| \leq M (s - \omega)^{-r}$$

für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt.

□

Die detaillierte Definition der Resolvente $R(s, \cdot)$ wird in Abschnitt B.7.1 vorgenommen. Im konkreten Anwendungsfall muss neben den Nachweisen der Abgeschlossenheit und der dichten Definition eines Operators A die Existenz der entsprechenden Konstanten M und ω unter Berücksichtigung aller Potenzen $r \in \mathbb{N}$ der Resolvente gezeigt werden ([CZ95] (S. 30)). Diese Problemstellung stammt aus der ursprünglichen Idee, die Matrixexponentialfunktion im Falle eines unbeschränkten

Operators A durch den gegebenenfalls existierenden Grenzwert einer Folge beschränkter Operatoren auszudrücken ([EN00] (S. 73)). Anstelle des unbeschränkten Operators A wird als Basis für die Folge beschränkter Operatoren die per Definition auf der Resolventenmenge beschränkte Resolvente $R(s, A) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ von A genutzt.

Da zur Anwendung des Hille-Yosida-Theorems in dieser allgemeinen Form die Resolvente bekannt sein muss und zudem alle Potenzen $r \in \mathbb{N}$ einzubeziehen sind, wird die praktische Anwendbarkeit dieses Satzes allgemein als eingeschränkt bezeichnet werden ([EN00], [Wer11] (S. 377)). Für den Fall eines diagonalisierbaren Operators $A \in \mathcal{O}_D$ nimmt das Hille-Yosida-Theorem die stark vereinfachte Form entsprechend **RSO5** aus Satz 53 an. Für $A \in \mathcal{O}_D$ ist $\sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) < \infty$ notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass A infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist.

Satz 5 nimmt speziell zur Charakterisierung kontraktiver beziehungsweise quasi-kontraktiver Halbgruppen eine vereinfachte Form an. Diese Tatsache lässt sich anschaulich direkt aufgrund der von diesen speziellen stark stetigen Halbgruppen erfüllten Bedingungen bezüglich der Wachstumsgrenze ω und der Konstanten M einsehen. Die mathematischen Ausführungen dazu finden sich beispielsweise in [EN00], [Wer11] oder [Paz83]. An dieser Stelle wird auf weiterführende Betrachtungen verzichtet, da infinitesimale Erzeuger kontraktiver Halbgruppen im folgenden Abschnitt mittels des Lumer-Phillips-Theorems gesondert charakterisiert werden.

Das Lumer-Phillips-Theorem

Das Lumer-Phillips-Theorem ([LP61]) formuliert die Äquivalenz zwischen der Aussage, dass ein Operator der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe ist und der m -Dissipativität (Abschnitt B.4.7) des Operators. Das Lumer-Phillips-Theorem lässt sich als Spezialfall des Hille-Yosida Theorems interpretieren und ist in verschiedenen Formulierungen beispielsweise in [Paz83] (S. 14), [EN00] (S. 83), [LGM99] (S. 33), oder [TW09] (S. 108) nachzuschlagen. Einige weiterführende Definitionen und Sätze zu dissipativen und m -dissipativen Operatoren finden sich in Anhang B.4.7 sowie den dort genannten Literaturstellen.

Satz 6 (Lumer-Phillips-Theorem) *Ein Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ist genau dann der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf \mathcal{X} , wenn A m -dissipativ ist.* \square

Ein Beweis zu Satz 6 findet sich beispielsweise in [Paz83] (S. 14). Die Anwendung des Hille-Yosida-Theorems in der Formulierung nach Satz 5 zum Nachweis, dass ein Operator der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist, erfordert die Abschätzung aller natürlichen Exponenten der Resolvente des Operators. Der Nachweis der m -Dissipativität eines Operators und damit der Tatsache, dass ein Operator eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt, lässt sich dagegen auf Basis einer der Aussagen aus Satz 30 führen, d.h. in diesem Fall muss lediglich die Resolvente selbst abgeschätzt werden.

Aus dem Lumer-Phillips-Theorem folgt als Konsequenz der Charakterisierung eines m -dissipativen Operators gemäß Satz 31 unmittelbar eine alternative Formulierung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen an einen Operator, um infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe zu sein. Der folgende Satz entstammt ursprünglich [LP61] (S. 687), entspricht in der aufgeführten Form allerdings dem Korollar 4.4 aus [Paz83] (S. 15). Ein zugehöriger Beweis findet sich in beiden genannten Quellen.

Satz 7 *Es sei \mathcal{X} ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein linearer Operator. A generiert genau dann eine Kontraktionshalbgruppe, wenn*

KHG1) *A dicht definiert und abgeschlossen ist und*

KHG2) *sowohl A als auch A^* dissipativ sind.* □

Da im Allgemeinen nicht zwingend $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ gilt, lässt sich aus der Dissipativität eines Operators A nicht in jedem Fall die Dissipativität des zugehörigen adjungierten Operators A^* folgern. Besitzen ein Operator A und der zugehörige adjungierte Operator identische Definitionsbereiche $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$, gilt die Eigenschaft der Dissipativität gleichsam für A und für A^* oder für keinen der beiden Operatoren ([DL92] (S. 338)).

In Anhang B.6.1 wird die Übereinstimmung der Definitionsbereiche eines diagonalisierbaren Operators und des zugehörigen adjungierten Operators gezeigt. Somit ist die letztgenannte Charakterisierung eines infinitesimalen Erzeugers einer Kontraktionshalbgruppe für diagonalisierbare Systemoperatoren im Allgemeinen und für das Beispielsystem, dessen Systemoperator gemäß Abschnitt 3.1.3 diagonalisierbar ist, im Speziellen vorteilhaft.

Das Lumer-Phillips-Theorem im Fall diagonalisierbarer Operatoren

Im Folgenden sei $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein diagonalisierbarer Operator, dessen Eigenwerte zu den Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ mit $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bezeichnet werden. Dann ist A gemäß der Ausführungen aus Abschnitt B.8.2 dicht definiert und abgeschlossen, ferner ist Satz 54 folgend der zu A adjungierte Operator A^* ebenfalls diagonalisierbar. Das Spektrum des adjungierten Operators A^* gleicht, abgesehen von der konjugiert komplexen Bildung, dem Spektrum von A , die Definitionsbereiche beider Operatoren stimmen überein. Demnach ist A^* dann und nur dann dissipativ, wenn A dissipativ ist. Folglich genügt ein diagonalisierbarer Operator den Anforderungen aus Satz 7 genau dann, wenn er dissipativ ist.

Der eingangs angenommene Operator $A \in \mathcal{O}_D$ besitzt die Darstellung $Ax = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \lambda_i \langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}} v_i$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$. Der Zustandsraum wird zu $\mathcal{X} = \mathcal{H}_0$ angenommen und für $\alpha = 0$ mit der Norm gemäß (B.126) von Seite 301 induziert durch das Innenprodukt entsprechend (B.127) ausgestattet. Die Eigenschaften von A und die Berücksichtigung des genannten Innenprodukts in der Definition

der Dissipativität (Definition 54) führen auf

$$\operatorname{Re}(\langle Ax, x \rangle_{\mathcal{X}}) = \operatorname{Re} \left(\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \lambda_i |\langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}}|^2 \right) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \quad (2.62)$$

Da das Quadrat der Beträge der Entwicklungskoeffizienten stets reell und nicht-negativ ist, folgt aus

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) |\langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}}|^2 \leq \sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}}|^2 \quad (2.63)$$

$$\leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \quad (2.64)$$

die Dissipativität eines diagonalisierbaren Operators, falls

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0, \quad \forall i \in \mathbb{I}^+. \quad (2.65)$$

Falls kein Eigenwert eines diagonalisierbaren Operators einen positiven Realteil besitzt, ist dies eine hinreichende Bedingung für die Dissipativität eines betreffenden Operators. Um zu überprüfen, ob ein diagonalisierbarer Operator eine kontraktive Halbgruppe erzeugt, steht damit ausgehend von Satz 7 ein sehr einfaches hinreichendes Kriterium zur Verfügung.

Kontraktive Halbgruppen zeichnen sich Definition 6 folgend durch die Erfüllung von (2.59) mit $M = 1$ und $\omega_0 = 0$ für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ aus, es muss also $\|\Phi(t)\| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelten. Das Einsetzen der Darstellung einer Halbgruppe eines diagonalisierbaren Operators in die Norm des Zustandsraums führt auf

$$\|\Phi(t)x\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)t} |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad (2.66)$$

$$\leq \sup_{i \in \mathbb{I}^+} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)t} \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, w_i \rangle|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (2.67)$$

Falls $A \in \mathcal{O}_D$ einen Eigenwert mit einem Realteil größer Null aufweist, kann aufgrund von $\omega_0 = \sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i)$ weder die Bedingung **KSSH2**) noch die Bedingung **KSSH1**) zur Klassifizierung stark stetiger Halbgruppen aus Definition 6 erfüllt werden. In einem derartigen Fall ist die Wachstumsgrenze (Definition 5) größer als Null und ein derartiger Operator ist nicht der infinitesimale Erzeuger einer gleichmäßig beschränkten oder kontraktiven Halbgruppe. Falls $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i \in \mathbb{I}^+$, gilt in (2.66) $\sup_{i \in \mathbb{I}^+} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)t} \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Damit kann $\sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ auch als notwendige Bedingung für die Dissipativität und damit auch die m-Dissipativität eines diagonalisierbaren Operators angesehen werden.

Der hinreichende Teil des vorab bewiesenen Kriteriums für die m-Dissipativität eines diagonalisierbaren Operators lässt sich auch direkt aus Satz 29 ableiten. Mit dem eingangs vorausgesetzten $A \in \mathcal{O}_D$ gilt $(sI - A) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} (s - \lambda_i) \langle \cdot, w_i \rangle_{\mathcal{X}} v_i$. Unter Verwendung der Norm des Zustandsraums

und der Abschätzung $|s - \lambda_i|^2 = \operatorname{Re}(s - \lambda_i)^2 + \operatorname{Im}(s - \lambda_i)^2 \geq \operatorname{Re}(s - \lambda_i)^2$ folgt

$$\|(sI - A)x\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |s - \lambda_i|^2 |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad (2.68)$$

$$\geq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(s - \lambda_i)^2 |\langle x, w_i \rangle|^2. \quad (2.69)$$

Unter der Annahme von $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i \in \mathbb{I}^+$ gilt $\operatorname{Re}(s - \lambda_i) \geq \operatorname{Re}(s) = s$ für alle $i \in \mathbb{I}^+$ und $s \in (0, \infty)$ und dementsprechend

$$\|(sI - A)x\|^2 \geq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(s - \lambda_i)^2 |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad (2.70)$$

$$\geq s^2 \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), s \in (0, \infty) \quad (2.71)$$

$$\Rightarrow \|(sI - A)x\| \geq s \|x\|. \quad (2.72)$$

Dabei ist $\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, w_i \rangle|^2$. Falls alle Eigenwerte von $A \in \mathcal{O}_D$ einen nicht-positiven Realteil besitzen, ist A somit gemäß Satz 29 dissipativ, folglich auch m-dissipativ und damit Erzeuger einer kontraktiven Halbgruppe auf X .

Kommentar zu den Erzeuger-Theoremen

Für diagonalisierbare Operatoren stehen an dieser Stelle einfach zu handhabende notwendige und hinreichende Kriterien zur Verfügung, mittels derer überprüft werden kann, ob ein Operator dieser Klasse eine stark stetige Halbgruppe oder sogar eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt. Um den Anforderungen im ersten Fall zu genügen, muss der Realteil der Eigenwerte eines betrachteten Operators dieser Klasse eine endliche obere Schranke besitzen. Zur Erfüllung des zweiten Falls darf darüber hinaus kein Eigenwert einen positiven Realteil aufweisen. In beiden Fällen liegen also lediglich Beschränkungen bezüglich des Realteils der Eigenwerte eines diagonalisierbaren Operators vor. Dies entspricht der Lokalisierung der Eigenwerte des Operators in einer linken Halbebene der komplexen Zahlenebene. Eine weiterführende Klassifizierung der gegebenenfalls erzeugten stark stetigen Halbgruppe durch Einschränkungen hinsichtlich des Imaginärteils der Eigenwerte findet im Zuge der Systemanalyse des Beispielsystems in Abschnitt 3.2 statt.

2.2.4 Zustandsraumdarstellung des ungezwungenen Beispielsystems

Die Eigenschaften eines linearen Operators auf einem unendlich-dimensionalen Raum hängen wesentlich vom zugrunde liegenden Raum sowie dem Definitionsbereich des betreffenden Operators ab. Die problemspezifische Realisierung des Zustandsraums bildet daher einen wesentlichen Bestandteil der Formulierung einer korrekt gestellten Zustandsraumdarstellung eines unendlich-dimensionalen Systems. Dieser Abschnitt zeigt einen Weg, um orientiert am Beispielsystem den Zustandsraum derart zu konstruieren, dass der Systemoperator den in Satz 3 auf Seite 48 genannten notwendigen Bedingungen genügt, um der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum zu sein. Die Erfüllung dieser notwendigen Bedingungen schafft Satz

1 auf Seite 41 folgend die Grundvoraussetzungen, damit ein durch den Systemoperator definiertes abstraktes Cauchy-Problem überhaupt korrekt gestellt sein kann. Insbesondere sind durch die Festlegung des Zustandsraums die dichte Definition (Abschnitt B.4) sowie die Abgeschlossenheit (Definition 53) des Systemoperators zu gewährleisten.

Einleitend erfolgt dazu eine kompakte Zusammenfassung der Anforderungen an die generelle mathematische Struktur des Zustandsraums. Die zentralen Forderungen bestehen darin, dass der Zustandsraum mit der Produkttopologie versehen ist und dass es sich um einen Hilbertraum handelt. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Rolle des Innenprodukts des Zustandsraums. Anschließend werden die Definition des Systemoperators des Beispielsystems sowie die Festlegung des zugrunde liegenden Zustandsraums vorgenommen. Die Definition der Teilräume des Zustandsraums beruht auf einem in Abschnitt A.3.1 eingeführten Raum und der in Abschnitt B.9.2 beschriebenen Konstruktion von Raumskalen. Als Resultat steht dann die Zustandsraumdarstellung des ungezwungenen Beispielsystems zur Verfügung.

Abschließend wird der Nachweis geführt, dass der Systemoperator des Beispielsystems den notwendigen Anforderungen an den infinitesimalen Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum genügt. Der Nachweis, dass der Systemoperator diagonalisierbar ist und der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum ist, erfolgt in Kapitel 3.

Bemerkungen zur mathematische Struktur des Zustandsraums

Bestandteile der mathematischen Formulierung eines unendlich-dimensionalen Systems im Zustandsraum sind die Festlegung des Zustandsraums und die Ausstattung des Zustandsraums mit einer gewünschten Topologie. Häufig wird dabei für den Zustandsraum die Struktur eines Hilbertraums angestrebt. Da der Zustandsraum einen Einfluss auf die Eigenschaften des Systemoperators besitzt, sind bei der Festlegung des Zustandsraums zudem die aus den Forderungen an die Eigenschaften des Systemoperators resultierenden Einschränkungen zu beachten. Innerhalb dieser Arbeit wird eine Zustandsraumdarstellung des Beispielsystems in einem Hilbertraum formuliert, bei der der Systemoperator ein diagonalisierbarer Operator und infinitesimaler Erzeuger einer zumindest stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum ist. Daher ist insbesondere Satz 3 zu beachten.

Im Folgenden wird der Zustandsraum als externe direkte Summe (Definition 16) der Form

$$\mathcal{X} = \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{X}_j, \quad n < \infty$$

angenommen. Damit werden lediglich endlich viele Teilräume zugelassen, wobei jeder einzelne Teilraum durchaus unendlich-dimensional sein kann. Als ein wichtiges Instrument zur Festlegung eines geeigneten Zustandsraums wird an dieser Stelle die problembezogene Definition eines Innenprodukts und die damit verbundene Wahl der Teilräume $\mathcal{X}_j, j = 1, \dots, n < \infty$ gesehen. Die Abhängigkeit der Eigenschaften des Systemoperators vom verwendeten Innenprodukt und damit

auch den verwendeten Teilräumen wird durch das Beispiel 2.3.8 und die Übung 2.25 in [CZ95] verdeutlicht. Die einfließenden Teilräume werden an dieser Stelle nicht detailliert betrachtet. Allerdings wird eine Definition der Teilräume vorausgesetzt, die eine Einhaltung aller aus der angestrebten Struktur des Zustandsraums und den gewünschten Eigenschaften des Systemoperators resultierenden Forderungen ermöglicht. Für das Beispielsystem bezieht sich diese Voraussetzung insbesondere auf die dichte Definition des Steifigkeitsoperators und damit auf die zugehörige Festlegung eines grundlegenden Raumes in Abschnitt A.3.1. Erst ein Innenprodukt ermöglicht eine einfache Einführung weitreichender Begrifflichkeiten, wie beispielsweise der Orthogonalität oder einer kanonischen Norm. Der Zustandsraum \mathcal{X} wird als Vektorraum (Definition 14) über dem Körper der komplexen oder reellen Zahlen eingeführt und mit einem Innenprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{X}} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (2.73)$$

versehen. Die Eigenschaften, denen eine Abbildung genügen muss, um ein Innenprodukt zu sein, finden sich in Definition 56 auf Seite 260. Der mit dem Innenprodukt versehene Vektorraum wird als Innenprodukt- oder Prähilbertraum bezeichnet. Durch das Innenprodukt kann jedem Element aus dem Zustandsraum eine Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \|x\|_{\mathcal{X}} = \langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (2.74)$$

zugewiesen werden. Die durch ein Innenprodukt definierte Norm wird als kanonische Norm bezeichnet ([Heu92] (S. 148)). Eigenschaften von Normen finden sich in Anhang B.3 oder beispielsweise in [Heu92] (S. 148) sowie [Wer11] (S. 204ff). Als Spezialfall eines normierten Raumes kann auf jedem Prähilbertraum mittels der Norm ein Abstandsbegriff

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}} \quad (2.75)$$

und damit eine Metrik eingeführt werden. Mit Hilfe der Metrik besteht die Möglichkeit, zu jedem Element x eines metrischen Raums M Umgebungen zu definieren. Ein Beispiel für Umgebungen sind offene Kugeln $B_{c_1}(x) = \{x_1 \in M \mid \|x - x_1\|_{\mathcal{X}} < c_1, c_1 > 0\}$ aus Elementen x_1 , die einen bestimmten Abstand c_1 zu x unterschreiten.

Bezogen auf den Zustandsraum \mathcal{X} lässt sich damit auf Basis der Menge aller offenen Teilmengen des Zustandsraums eine Topologie von \mathcal{X} einführen ([Jä05]). Dabei führen äquivalente Normen (Definition 33) auf gleichwertige Topologien. Da im Unendlich-dimensionalen allerdings nicht grundsätzlich von Normäquivalenz auszugehen ist, bedingen nicht äquivalente Normen auf dem Zustandsraum auch unterschiedliche Topologien und in Folge dessen verschiedene Konvergenzbegriffe ([Wer11]). Im Folgenden wird angenommen, dass die Norm auf dem Zustandsraum \mathcal{X} stets Satz 16 genügt, und damit der Zustandsraum mit der Produkttopologie $\mathcal{X} = \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{X}_j, n < \infty$

ausgestattet ist. Entsprechend **PT2**) aus Satz 16 gilt damit insbesondere

$$\begin{pmatrix} x_{1,i} \\ \vdots \\ x_{j,i} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix} \text{ hinsichtlich } \|\cdot\|_p \Leftrightarrow (x_{1,i}) \rightarrow x_1 \wedge \cdots \wedge (x_{j,i}) \rightarrow x_j. \quad (2.76)$$

Darüber hinaus ergibt sich aus **PT3**) (Satz 16) die Vollständigkeit von \mathcal{X} , falls alle Teilräume $\mathcal{X}_j, j = 1, \dots, n < \infty$ vollständig sind.

Ein im Sinne einer kanonischen Norm vollständiger Prähilbertraum ist ein Hilbertraum. Vollständigkeit ist eine wichtige Eigenschaft eines Raumes, wobei die Wahl der Nomenklatur bereits auf die Aussage der Eigenschaft hindeutet. Anschaulich formuliert „fehlen“ in einem vollständigen Raum keine Elemente. Mathematisch wird dieser Sachverhalt dadurch ausgedrückt, dass jede Cauchy-Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ (Definition 29), die in einem vollständigen Raum definiert ist, auch in diesem Raum konvergiert, ihr Grenzwert also in dem Raum liegt

$$x_i \rightarrow x \in X \quad \text{für} \quad i \rightarrow \infty. \quad (2.77)$$

Um für einen Prähilbertraum die Vollständigkeit nachzuweisen, gilt es, für alle Cauchy-Folgen die Konvergenz gemäß Definition B.2 zu überprüfen. Als Sonderfall der in Definition B.2 auftretenden Metrik wird dabei (2.75) folgend eine Metrik aus der kanonischen Norm (2.74) berücksichtigt.

Definition der Zustandsraumdarstellung des ungezwungenen Beispielsystems

Als Ausgangspunkt für die Festlegung der Zustandsraumdarstellung des ungezwungenen Beispielsystems dient die in Abschnitt A.3 eingeführte zugehörige Operatordarstellung. Aufgrund der beiden im System vorhandenen Energiespeicher wird der Zustandsraum als direkte Summe aus den zwei im Folgenden noch zu spezifizierenden Funktionenräumen \mathcal{X}_1 und \mathcal{X}_2 eingeführt. Die endliche Anzahl von Teilräumen bedingt die Äquivalenz von direkter Summe und Produktraum $\mathcal{X} = \bigoplus_{i=1}^2 \mathcal{X}_i = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Ausgehend von der starken Formulierung der Operatorgleichung gemäß Anhang A.3.5 folgt durch eine physikalisch bedeutsame Festlegung der Zustandsgrößen zu Auslenkung und Geschwindigkeit

$$\mathcal{X} \ni x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} w(v,t) & \frac{\partial w}{\partial t}(v,t) \end{pmatrix}^T \quad (2.78)$$

formal der Systemoperator zu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -S & -D \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Die örtliche Abhängigkeit der Auslenkung und Geschwindigkeit des Beispielsystems ist implizit in den Zuständen enthalten. S bezeichnet den in Abschnitt A.3.2 definierten und analysierten Steifigkeitsoperator des Beispielsystems, während D den Dämpfungsoperator entsprechend Abschnitt A.3.3 kennzeichnet.

Eine alternative, ebenfalls physikalisch zu interpretierende Wahl der Zustände wird beispielsweise in [Gil73] gezeigt. Um die Definition eines abstrakten Cauchy-Problems zu vervollständigen, müssen die Anfangsbedingungen ebenfalls in den Zustandsraum übertragen werden, es gilt

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} w(v,0) & \frac{\partial w}{\partial t}(v,0) \end{pmatrix}^T. \quad (2.80)$$

Die Festlegung der Topologie des Zustandsraums erfolgt durch die Einführung eines Innenprodukts, das die im System gespeicherte Energie wiedergibt. Für die Summe aus potentieller und kinetischer Energie gilt

$$2(E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}) = \int_{\Omega} \alpha_S \left| \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right|^2 dv + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w(v,t)}{\partial t} \right|^2 dv. \quad (2.81)$$

Auf Basis der Wahl der Zustandsvariablen entsprechend (2.78) folgt mit dem Steifigkeitsoperator S formal

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}} &= \langle S^{\frac{1}{2}} x_1, S^{\frac{1}{2}} x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle \\ &= \int_{\Omega} S^{\frac{1}{2}} x_1 \overline{S^{\frac{1}{2}} x_1} dv + \int_{\Omega} x_2 \overline{x_2} dv. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Aus den in Abschnitt A.3.2 gezeigten Eigenschaften des Steifigkeitsoperators folgt, dass bei einer Festlegung des Zustandsraums zu

$$\mathcal{X} = \mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}}) \times L^2(\Omega) = H_{\frac{1}{2}} \times H \quad (2.83)$$

die Sesquilinearform aus (2.82) den Anforderungen an ein Innenprodukt auf dem Zustandsraum genügt. Die Festlegung der Teilräume des Zustandsraums beinhaltet unterschiedlich starke Forderungen bezüglich der Glattheitseigenschaften der beiden Zustandsgrößen. Entsprechend (2.83) wird für die erste Komponente des Zustandsvektors die Zugehörigkeit zum Definitionsbereich der Quadratwurzel des Steifigkeitsoperators gefordert. Beide Teilräume des Zustandsraums sind Hilberträume, deren Eigenschaften ausführlich im Anhang in den Abschnitten A.3.1 und B.9.2 diskutiert werden.

Gemäß den bisherigen Betrachtungen ist der Zustandsraum unter Berücksichtigung des Innenprodukts aus (2.82) mit der Produkttopologie ausgestattet. Die Berücksichtigung von $p = 2$ in **PT1** aus Satz 16 führt auf $\|x\|_{\mathcal{X}} = (\|x_1\|_{\mathcal{X}_1}^2 + \|x_2\|_{\mathcal{X}_2}^2)^{\frac{1}{2}}$. Im Fall des Beispielsystems gilt $\|x_1\|_{\mathcal{X}_1}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle_{H_{\frac{1}{2}}}$ sowie $\|x_2\|_{\mathcal{X}_2}^2 = \langle x_2, x_2 \rangle_H$ und damit

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{X}}^2 &= \langle x, x \rangle_{\mathcal{X}} = \langle x_1, x_1 \rangle_{H_{\frac{1}{2}}} + \langle x_2, x_2 \rangle_H \\ &= \|x_1\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 + \|x_2\|_H^2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Mit der Wahl $p = 2$ genügt die Norm des Zustandsraums **PT1** aus Satz 16, es gilt $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus_p \mathcal{X}_2$. Da es sich im Fall des Beispielsystems bei \mathcal{X}_1 und \mathcal{X}_2 um vollständige Räume handelt, folgt gemäß **PT3** aus Satz 16 auch die Vollständigkeit des Zustandsraums bezüglich der in (2.84) definierten kanonischen Norm. Da die kanonische Norm durch ein Innenprodukt induziert wird, handelt es sich bei dem definierten Zustandsraum um einen Hilbertraum.

Eigenschaften des Systemoperators

Dieser Abschnitt dient dem Nachweis, dass der Systemoperator $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ der Zustandsraumdarstellung des ungezwungenen Beispielsystems den aus Abschnitt 2.2.2 bekannten notwendigen Eigenschaften des infinitesimalen Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe genügt. Demnach ist zu zeigen, dass A dicht definiert und abgeschlossen ist.

Die dichte Definition von A wird aus den Betrachtungen zur Wahl von H und der dichten Definition des Steifigkeitsoperators in Anhang A.3.1 abgeleitet und an dieser Stelle als gegeben vorausgesetzt. Eine hinreichende Bedingung für dichte Definition eines linearen Operators findet sich darüber hinaus in [NS] (S. 486). Die mathematische Definition eines abgeschlossenen Operators findet sich zusammen mit einer anschaulichen Interpretation der Abgeschlossenheit im Hinblick auf die Abbildung konvergenter Folgen in Definition 53. Der Nachweis der Abgeschlossenheit eines linearen Operators kann anhand verschiedener Vorgehensweisen erfolgen. Zum einen lässt sich die Definition der Abgeschlossenheit in Definition 53 unmittelbar als konstruktiv im Hinblick auf die Beweisführung zur Abgeschlossenheit eines Operators ansehen. Ein Ansatz, nach dem die Abgeschlossenheit von A folgt, falls die Resolventenmenge von A nicht leer ist, findet sich beispielsweise in [TW09] (S. 32). Für das Beispielsystem wird die Abgeschlossenheit des Systemoperators auf Basis von Satz 27 nachgewiesen. Entsprechend Satz 27 folgt die Abgeschlossenheit von $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, falls ein beschränkter inverser Operator $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ existiert. Dabei ist zu beachten, dass ein linearer Operator nach Definition 38 nur dann invertierbar ist, wenn sein Nullraum ausschließlich die Null enthält (Definition 17).

Die formale Berechnung des inversen Systemoperators auf Basis von $AA^{-1} = I$ führt auf

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -S^{-1}D & -S^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Der Steifigkeitsoperator ist laut Abschnitt A.3.2 koerziv, woraus gemäß den Ausführungen zu den Eigenschaften koerziver Operatoren in Abschnitt B.6.2 die Existenz des beschränkten und ebenfalls koerziven inversen Steifigkeitsoperators S^{-1} folgt. Aufgrund seiner Koerzitivität (**SON1**), Definition 72) gilt für den Steifigkeitsoperator mit $c_1 > 0$

$$\frac{1}{c_1} \langle Sy, y \rangle \geq \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathcal{D}(S) \quad (2.86)$$

Durch die Substitution $y = S^{-1}x$ folgt $\|S^{-1}x\|^2 \leq \frac{1}{c_1} \langle SS^{-1}x, S^{-1}x \rangle$. Mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und $SS^{-1} = I$ lässt sich die Ungleichung zu

$$\|S^{-1}x\|^2 \leq \frac{1}{c_1} \langle SS^{-1}x, S^{-1}x \rangle \leq \frac{1}{c_1} \|x\| \|S^{-1}x\| \quad (2.87)$$

$$\Leftrightarrow \|S^{-1}x\| \leq \frac{1}{c_1} \|x\| \quad (2.88)$$

umformulieren. Der inverse Systemoperator ist eine beschränkte Abbildung $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, falls sich eine positive Konstante c finden lässt, sodass

$$\|A^{-1}x\|_{\mathcal{X}} \leq c \|x\|_{\mathcal{X}} \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T \in \mathcal{X}. \quad (2.89)$$

Auf Basis der linken Seite der zuletzt aufgeführten Ungleichung und der durch Gleichung (2.84) auf dem Zustandsraum definierten Norm

$$\|A^{-1}x\|_{\mathcal{X}} = \left\| \begin{pmatrix} -S^{-1}D & -S^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}} \quad (2.90)$$

$$= \|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}Dx_1 + S^{\frac{1}{2}}S^{-1}x_2\|^2 + \|x_1\|^2 \quad (2.91)$$

wird zunächst eine Abschätzung mittels der Minkowski-Ungleichung (Dreiecksungleichung) entsprechend [AF03] (S. 25) vorgenommen. Demnach ist das Quadrat der Norm einer Summe nicht größer als das Quadrat der Summe der Normen der einzelnen Summanden

$$\|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}Dx_1 + S^{\frac{1}{2}}S^{-1}x_2\|^2 + \|x_1\|^2 \leq \left(\|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}Dx_1\| + \|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}x_2\| \right)^2 + \|x_1\|^2. \quad (2.92)$$

Die Abschätzung des Quadrats der Summe der beiden Normen erfolgt auf Basis des folgenden aus [AF03] (S. 23) bekannten Satzes.

Satz 8 *Es sei $1 \leq p < \infty$ und $a, b \geq 0$, dann gilt*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p). \quad (2.93)$$

Die Normen erfüllen die Forderungen bezüglich a und b , zudem gilt in diesem Fall $p = 2$, daher folgt

$$\left(\|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}Dx_1\| + \|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}x_2\| \right)^2 + \|x_1\|^2 \leq 2 \|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}Dx_1\|^2 + 2 \|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}x_2\|^2 + \|x_1\|^2. \quad (2.94)$$

Die Terme der rechten Seite der Ungleichung werden separat betrachtet. Unter Berücksichtigung der für den Dämpfungsoperator des Beispielsystems in Anhang A.3.3 angenommenen Struktur $D = \alpha_{SD}S + \alpha_V$ lautet der erste Term der rechten Seite

$$2 \|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}Dx_1\|^2 = 2 \|S^{\frac{1}{2}}(\alpha_{SD} + \alpha_V S^{-1})x_1\|^2. \quad (2.95)$$

Die Ungleichung (2.89) muss für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T \in \mathcal{X}$ erfüllt sein, demnach werden $x_1 \in H_{\frac{1}{2}}$ betrachtet. Durch Berücksichtigung der Norm $\|x\|_{H_{\frac{1}{2}}} = \|S^{\frac{1}{2}}x\|$ auf \mathcal{X}_1 in (2.95) und der Beschränktheit von $(\alpha_{SD} + \alpha_V S^{-1})$ folgt mit einem $c_1 > 0$

$$2 \|S^{\frac{1}{2}}(\alpha_{SD} + S^{-1}\alpha_V)x_1\|^2 = 2 \|(\alpha_{SD} + S^{-1}\alpha_V)x_1\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 \leq c_1 \|x_1\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2. \quad (2.96)$$

Wobei in Abschnitt A.3.2 die Herleitung von S^{-1} gezeigt wird und auf die Kompaktheit der Abbildung $S^{-1} : H \rightarrow \mathcal{D}(S)$ geschlossen wird.

Im zweiten zu untersuchenden Term aus Ungleichung (2.94) gilt für die Quadratwurzel des inversen Steifigkeitsoperators

$$S^{\frac{1}{2}}S^{-1} = S^{-\frac{1}{2}} : H \rightarrow \mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}}) = H_{\frac{1}{2}}.$$

Da der Bildbereich $\mathcal{R}(S^{-\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}\left(S^{\frac{1}{2}}\right)$ stetig und dicht in H eingebettet ist (Abschnitt B.9.2), lässt sich eine positive Konstante c_2 finden, sodass

$$2 \|S^{-\frac{1}{2}}x_2\|^2 \leq c_2 \|x_2\|^2 \quad \forall x_2 \in H. \quad (2.97)$$

Zur Abschätzung des verbleibenden Terms aus (2.94) wird die stetige Einbettung von $\mathcal{D}\left(S^{\frac{1}{2}}\right) = H_{\frac{1}{2}}$ in H , ausgedrückt durch den Einbettungsoperator $i : H_{\frac{1}{2}} \subset H^{2,2}(\Omega) \rightarrow H, x \mapsto ix$, ausgenutzt. Ohne explizite Aufführung des Einbettungsoperators gilt

$$\|x_1\| \leq c_3 \|x_1\|_{H_{\frac{1}{2}}}. \quad (2.98)$$

Die Ungleichung (2.94) lässt sich somit zu

$$2 \|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}Dx_1\|^2 + 2 \|S^{\frac{1}{2}}S^{-1}x_2\|^2 + \|x_1\|^2 \leq c_1 \|x_1\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 + c_2 \|x_2\|^2 + c_3 \|x_1\|_{H_{\frac{1}{2}}} \quad (2.99)$$

$$\leq c \left(\|x_1\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 + \|x_2\|^2 \right) \quad (2.100)$$

$$= c \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}}^2 \quad (2.101)$$

umformulieren. Demnach erfüllt der inverse Systemoperator die eingangs für seine Beschränktheit formulierte Bedingung (2.89), somit gilt $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ und folglich ist der Systemoperator abgeschlossen.

Aufgrund seiner dichten Definition und Abgeschlossenheit erfüllt der Systemoperator zumindest die notwendigen Bedingungen an den infinitesimalen Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe. In Abschnitt 3.2.2 erfolgt eine detaillierte Betrachtung hinsichtlich der tatsächlich vom Systemoperator generierten stark stetigen Halbgruppe. Der Nachweis, dass die Eigenvektoren des Systemoperators eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden, wird in Abschnitt 3.1.3 gezeigt.

2.3 Systeme mit unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren

Mit der Einführung der Pritchard-Salamon-Klasse wird in diesem Abschnitt der mathematische Rahmen definiert, um unendlich-dimensionale Systeme mit im gewissen Umfang unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren klassenweise systematisch handhaben zu können. Die Verwendung der Pritchard-Salamon-Klasse begründet sich nicht zuletzt durch die Möglichkeit, das Beispielsystem als Pritchard-Salamon-System zu formulieren. Zugleich existiert für diese Systemklasse eine umfassende und zugleich ausgereifte Theorie, die eine Vielzahl systemtheoretischer Aspekte abdeckt und dabei unter bestimmten Bedingungen klare Analogien zum endlich-dimensionalen Fall aufweist. Der fallspezifische Nachweis einzelner Eigenschaften eines betrachteten Systems lässt sich damit bei der klassenbezogenen Behandlung durch den nicht selten einfacher zu führenden Nachweis der Klassenzugehörigkeit des betreffenden Systems ersetzen. Für Elemente der

Pritchard-Salamon-Klasse sind dabei insbesondere die essentiellen Aussagen zur Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Zeitbereichslösung einer Zustandsraumdarstellung unter Berücksichtigung einer sinnvollen Klasse von Eingangssignalen hervorzuheben. Die Pritchard-Salamon-Klasse lässt sich damit als Verallgemeinerung der Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren aus Abschnitt 2.1.2 beziehungsweise im Hinblick auf das Beispielsystem als Generalisierung der in 2.1.3 vorgestellten Spektral-Systeme auffassen.

Einleitend wird anhand der Zeitbereichslösung linearer Systeme die Problematik im Fall unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren erläutert. An diese Motivation schließt sich die Definition der Pritchard-Salamon-Klasse sowie die Diskussion wesentlicher Eigenschaften dieser Systemklasse an. Die Ausführungen umfassen insbesondere Aussagen zur Lösung von Pritchard-Salamon-Systemen im Zeitbereich und die Definition der Übertragungsfunktion dieser Systemklasse im Bildbereich der Laplace-Transformation. Weiterführende Betrachtungen in Abschnitt C.3 ergänzen zudem die in diesem Abschnitt definierten wesentlichen Eigenschaften von Pritchard-Salamon-Systemen.

Insbesondere finden sich dort hilfreiche Eigenschaften der Steuer- und Beobachtbarkeitsoperatoren, Betrachtungen zur Dualität, die Definition des Hankel-Operators und die kopprime Zerlegung der Übertragungsfunktion von Pritchard-Salamon-Systemen.

Der grundlegenden Definition der Pritchard-Salamon-Klasse folgt die Formulierung des Beispielsystems als Pritchard-Salamon-System, wobei in der verfügbaren Literatur an dieser Stelle keine explizite Formulierung eines identischen Euler-Bernoulli-Balkens innerhalb dieser Systemklasse ausfindig gemacht werden konnte. Diese Formulierung schließt eine Wahl der notwendigen Räume sowie den Nachweis der Zulässigkeit des Ein-/ und des Ausgangsoperators des Beispielsystems im Sinne der betrachteten Systemklasse ein. Zusätzlich erfolgt eine Einordnung der gewählten Formulierung im Hinblick auf eine gebräuchliche Formulierung allgemeiner unendlich-dimensionaler Systeme sowie der im Hinblick auf die endlich-dimensionale Approximation des Beispielsystems bedeutsame Nachweis der Nuklearität des Hankel-Operators des Beispielsystems. Die Ausführungen stützen sich dabei auf die einfachen Kriterien zur Überprüfung der Zugehörigkeit zur Pritchard-Salamon-Klasse, deren Herleitung sich für eine bestimmte Klasse unendlich-dimensionaler Systeme in Abschnitt C.4 findet.

Den Abschluss dieses Abschnitts bildet die Definition verschiedener Darstellungsformen der Übertragungsfunktion des Beispielsystems im Bildbereich der Laplace-Transformation. Die abschließenden Ausführungen umfassen ferner eine Parametrierung des Übertragungsverhaltens des mathematischen Modells des Beispielsystems auf Basis der aus der Messung des Übertragungsverhaltens des realen Beispielsystems gewonnenen Daten.

2.3.1 Problemstellung

Die Zustandsraumdarstellung eines unendlich-dimensionalen Systems lautet unter Berücksichtigung von Zustandsgleichung und Ausgangsgleichung

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = A x(t) + B u(t) \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (2.102)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t). \quad (2.103)$$

Bereits in Abschnitt 2.1.2 wird der Zusammenhang einer derartigen Zustandsraumdarstellung zu einem inhomogenen abstrakten Cauchy-Problem (C.1) hergestellt. In Anlehnung an die Überlegungen zur Lösung beziehungsweise zu den Zustandstrajektorien $x(t)$ eines ungezwungenen Systems aus Abschnitt 2.2 wird für den Systemoperator $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ gefordert, der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}) \\ t &\mapsto \Phi(t) \end{aligned} \quad (2.104)$$

auf dem Zustandsraum zu sein. Mathematisch einschränkend, aber realitätsnah, wird an dieser Stelle eine endliche Anzahl p bzw. q von Ein- und Ausgängen vorausgesetzt, wobei die Räume der Ein- und Ausgangssignale komplexe Hilberträume sind. Damit gilt

$$\mathcal{U} = \mathbb{C}^p \quad \text{und} \quad \mathcal{Y} = \mathbb{C}^q \quad \text{mit} \quad p, q < \infty. \quad (2.105)$$

Physikalisch sinnvolle Signale sind als Elemente der reellen Zahlen zu erwarten. Dennoch ist die Verwendung komplexer Räume im Hinblick auf die algebraische Abgeschlossenheit des Körpers der komplexen Zahlen und eine konsistente Definition des Zustandsraums und der Räume der Ein-/Ausgangssignale sinnvoll.

Hinsichtlich der in Abschnitt 2.1.2 vorgestellten Klasse der Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren enthält [CZ95] (S. 140) ausführliche Betrachtungen bezüglich der Lösungseigenschaften, die an dieser Stelle nicht explizit aufgeführt werden. Statt dessen werden durch das Zulassen im gewissen Rahmen unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren

$$B \notin \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X}) \quad \text{und} \quad C \notin \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

Systeme berücksichtigt, deren Behandlung die Definition einer erweiterten Systemklasse erfordert. Zur Andeutung der daraus erwachsenden Problematik sowie als Motivation für die folgenden Ausführungen dient die Ein-/Ausgangsabbildung im Zeitbereich

$$\mathfrak{G}u(t) = C \Phi(t)x_0 + C \int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau + D u(t). \quad (2.106)$$

Im Kern des Integrals dient das Bild des Eingangssignals am Eingangoperator $B u(t)$ zu jedem Zeitpunkt als Urbild für die in (2.104) aufgeführte, auf dem Zustandsraum beschränkte, stark stetige

Halbgruppe. Eine sinnvolle Definition dieses Integralkerns beinhaltet demnach, dass kein Konflikt zwischen dem Bildbereich des Eingangsoperators und dem Definitionsbereich der stark stetigen Halbgruppe auftritt. Die Einhaltung dieser Bedingung kann im Allgemeinen für unbeschränkte Eingangsoperatoren nicht gewährleistet werden. Um Aussagen über die Lösung von Systemen mit unbeschränkten Ein-/Ausgangsabbildungen treffen zu können, erweist sich demnach der bisherige mathematische Rahmen als unzureichend.

Als Generalisierung der Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren existieren eine Vielzahl von Systemklassen, die zum Teil in 2.1.1 aufgeführt sind. Im Folgenden wird eine Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse [PS87b] vorgeschlagen.

2.3.2 Die Pritchard-Salamon-Klasse

Mit der Einführung der ursprünglich in [PS85; Sal85] und [PS87b] definierten und etablierten Pritchard-Salamon-Klasse wird ein mathematischer Rahmen bereitgestellt, der die systematische Behandlung einer Vielzahl unendlich-dimensionaler Systeme mit im gewissen Maße unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren und insbesondere auch des Beispielsystems erlaubt. Innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse lassen sich jegliche Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren beschreiben sowie alle Systeme, die unter der Bezeichnung „Nuclear Type“ ([Cur92b]) zusammengefaßt sind und damit einen nuklearen Hankel-Operator besitzen ([Cur92b]). Darüber hinaus zählen zu den Pritchard-Salamon-Systemen zahlreiche verschiedenartige Totzeit-Systeme („Neutral Systems“, „Retarded Systems“ ([NG04])) sowie sowohl parabolische als auch hyperbolische Systeme mit, in gewissem Rahmen, unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren. Einen Überblick über Beispiele dynamischer Systeme, die in der Pritchard-Salamon-Klasse enthalten sind, gibt Tabelle 2.1 und die dort genannte Literatur. Daraus lässt sich entnehmen, dass auch eine Anzahl unendlich-dimensionaler Systeme mit punktförmigen Stelleingriffen, Randeingriffen oder punktförmigen Messungen in der Pritchard-Salamon-Klasse formulierbar sind. Die Limitierungen der Pritchard-Salamon-Systeme im Hinblick auf die zulässige Unbeschränktheit von Ein-/Ausgangsoperatoren lässt sich beispielsweise den expliziten Hinweisen aus [Cur88] oder [Kau93] (S. 28) entnehmen. Dort wird insbesondere angemerkt, dass die Vorgabe von Dirichlet-Randbedingungen in der Regel auf für diese Systemklasse zu stark unbeschränkte Eingangsoperatoren führt. In [Log92] (S. 115) findet sich das Beispiel eines Totzeit-behafteten Systems mit unendlich vielen Polen auf der imaginären Achse, das sich nicht in dieser Systemklasse beschreiben lässt.

In [Cur88] wird die Formulierung eines bereits in [BCS88] vorgestellten Euler-Bernoulli-Balkens in der Pritchard-Salamon-Klasse gezeigt. Das Balkenmodell in [Cur88] beziehungsweise die unterschiedlichen in [BCS88] eingeführten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich allerdings gegenüber dem Beispielsystem in Bezug auf die Dämpfungsmodelle und/oder die Randbedingungen. In den zur Verfügung stehenden Quellen konnte keine Formulierung eines mit dem Beispielsystem identischen Euler-Bernoulli-Balkens in der Pritchard-Salamon-Klasse gefunden werden. Daher

Anwendung	Quelle
Verschiedene Totzeit-behaftete Systeme mit Totzeiten im Eingang und Ausgang („Retarded-Systems“)	[PS85],[Log92], [Keu93]
Verschiedene Totzeit-behaftete Systeme mit Totzeiten im Eingang und Ausgang („Neutral-Systems“)	[Sal85], [PS87b], [Log92]
Endlich-dimensionale Systeme mit Totzeit-behaftetem Ausgang	[Log91]
Parabolische Systeme mit im gewissen Maße unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren	[PS87b]
Wärmeleitung mit Vorgabe der Neumann-Randbedingungen	[PS87b], [Log92], [Keu93]
Wärmeleitung mit Vorgabe der Dirichlet-Randbedingungen und punktförmiger Messung	[Log92]
Wärmeleitung mit punktförmigem Stelleingriff und punktförmiger Messung	[BK95]
Wärmeleitung mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren	[Keu93]
Hyperbolische Systeme mit im gewissen Maße unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren	[PS87b]
Wellengleichung mit Vorgabe der Dirichlet-Randbedingungen und verteilter Messung	[PS87b],[Log92]
Wellengleichung mit Vorgabe der Neumann-Randbedingungen und punktförmiger Messung der Geschwindigkeit	[Sal85],[Log92]
Euler-Bernoulli-Balken mit Kelvin-Voigt-Dämpfung, beidseitig freiem Ende und Randeingriff.	[Cur88],[BCS88], [CBL92]

Tabelle 2.1: Beispiele für Pritchard-Salamon-Systeme.

wird angenommen, dass im Rahmen dieser Arbeit erstmals die Formulierung exakt dieser Systemdynamik innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse vorgenommen wird.

Für die ursprünglich im Hinblick auf den Entwurf linear quadratischer Regler für unendlich-dimensionale Systeme eingeführte Pritchard-Salamon-Klasse existiert eine umfangreiche Theorie, die eine Vielzahl systemtheoretischer Aspekte abdeckt und dabei insbesondere im Falle zulässig stabilisierbarer und zulässig detektierbarer Pritchard-Salamon-Systeme klare Analogien zum endlich-dimensionalen Fall aufweist.

Neben den Ausführungen in den eingangs genannten Publikationen sei dazu auf die Betrachtungen grundlegender Eigenschaften von Pritchard-Salamon-Systemen in [Log91; Log92; Cur92b; CZ94; Cur+94; Cur96] verwiesen. Angesichts des im Verlauf dieser Arbeit durchgeführten Entwurfs endlich-dimensionaler Regler sei auf die Existenzaussagen zu stabilisierenden endlich-dimensionalen Reglern für zulässig stabilisierbare und zulässig detektierbare Pritchard-Salamon-Systeme entsprechend Corollary 22. aus [Log92] (S. 124) hingewiesen. Ebenfalls bedeutsam im Hinblick auf die Regelung von Pritchard-Salamon-Systemen ist die Abgeschlossenheit dieser Systemklasse gegenüber statischen und dynamischen Ausgangsrückführungen ([Log92], [Keu93], [Cur+94]).

Verschiedene Aspekte der optimalen und robusten Regelung von Systemen dieser Systemklasse werden in [Kou92b; Kou92a; Kou93], [CP94], [BK94; BDKI94; BIK94; BK95] oder [ID07] diskutiert. Insbesondere bezüglich des Entwurfs \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler ist zu betonen, dass die Ein-/Ausgangsstabilität zulässig stabilisierbarer und zulässig detektierbarer Pritchard-Salamon-Systeme äquivalent zur exponentiellen Stabilität derartiger Systeme ist. Damit ist für diese Unterklasse der Pritchard-Salamon-Systeme die Zugehörigkeit zu \mathcal{H}_∞ äquivalent zur exponentiellen Stabilität.

Darüber hinaus ist [Cur88] wegen eines besonderen Bezugs auf die Behandlung von diagonalisierbaren Operatoren innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse zu berücksichtigen. Die Ausführungen in [SC00; Sas02] thematisieren die im Hinblick auf den Entwurf endlich-dimensionaler Regler bedeutsame Fragestellung der Approximation von Pritchard-Salamon-Systemen.

Die im Folgenden angegebene Definition der Pritchard-Salamon-Klasse zeigt, dass analog zu der in Abschnitt 2.1.2 aufgeführten Systemklasse vorausgesetzt wird, dass der Systemoperator eines Pritchard-Salamon-Systems infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist. Im Gegensatz zu den Halbgruppen-Regelsystemen aus Abschnitt 2.1.2 oder Abschnitt 2.1.3 liegt der Definition der Pritchard-Salamon-Systeme anstelle des Zustandsraums allerdings eine Raumskala zugrunde, deren Notwendigkeit sich aus der Berücksichtigung unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren ergibt. Aus der Verwendung einer Raumskala erwächst die Frage nach der Korrektheit eines Pritchard-Salamon-Systems auf den innerhalb der Raumskala verwendeten Räumen. Daher schließen sich an die eigentliche Definition der Systemklasse die Betrachtungen zu Einschränkungen und Erweiterungen der einem System zugeordneten stark stetigen Halbgruppe an. Im Hinblick auf das Beispielsystem erfolgt anschließend die Einführung regulärer Pritchard-Salamon-Systeme, die eine echte Unterklasse allgemeiner Pritchard-Salamon-Systeme bilden. Da die Pritchard-Salamon-Klasse nicht die Verwendung beliebiger unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren erlaubt, werden nachfolgend, unter Verwendung der Steuer- und Beobachtbarkeitsoperatoren, im Sinne dieser Systemklasse zulässige Ein-/Ausgangsoperatoren charakterisiert. Den Abschluß dieses Abschnittes bildet die Definition des Übertragungsverhaltens regulärer Pritchard-Salamon-Systeme im Bildbereich der Laplace-Transformation. Für weiterführende Betrachtungen und Eigenschaften der verwendeten Systemklasse sei zudem auf Abschnitt C.3 hingewiesen.

Definition der Pritchard-Salamon-Klasse

Zur Behandlung unendlich-dimensionaler Systeme mit im gewissen Rahmen unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren erfolgt in Anlehnung an [Kou93] (S. 22) und [Cur+94] (S. 11) die Festlegung der Menge der Pritchard-Salamon-Systeme, die auch als Pritchard-Salamon-Klasse [PS87b] bezeichnet wird.

Definition 7 (Pritchard-Salamon-System) Ein dynamisches System der Form

$$x(t) = \Phi(t) x_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{V} \quad (2.107)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (2.108)$$

mit

DPSC1) stetig und dicht ineinander eingebetteten Hilberträumen

$$\mathcal{W} \hookrightarrow_d \mathcal{V}, \quad (2.109)$$

DPSC2) einer stark stetigen Halbgruppe $\Phi(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, die eine Einschränkung auf eine stark stetige Halbgruppe auf \mathcal{W} besitzt,

DPSC3) im Sinne von Definition 8 für $\Phi(t)$ zulässigen Ein-/Ausgangsoperatoren $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ beziehungsweise $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ sowie einem Durchgriffsoperator $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$

und Eingangssignalen $u \in L^2_{\text{lok}}([0, \infty), \mathcal{U})$ wird als Pritchard-Salamon-System bezeichnet. \square

In der Definition der Pritchard-Salamon-Systeme lassen sich (2.107) und (2.108) äquivalent auch durch eine Zustandsraumdarstellung bestehend aus (2.102) sowie (2.108) ersetzen. Den Ausführungen zur Konstruktion von Raumskalen aus Abschnitt B.9 folgend, dient in der ursprünglichen Definition der Pritchard-Salamon-Klasse ([PS87b] (S. 22)) der mittels des ungezwungenen Systems definierte Zustandsraum als Pivotraum einer Raumskala

$$\mathcal{W} \hookrightarrow_d \mathcal{X} = \mathcal{X}^d \hookrightarrow_d \mathcal{V}. \quad (2.110)$$

Dabei werden sowohl der Zustandsraum \mathcal{X} als auch die Räume \mathcal{W}, \mathcal{V} als Hilberträume angenommen, die so geartete stetige dichte Einbettungen besitzen, dass die Relation nach (2.110) erfüllt ist. Die Betrachtungen in [PS87b] verdeutlichen, dass gewisse Systeme Definition 7 genügen, aber nicht konsistent unter Verwendung einer Raumskala nach (2.110) innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse zu definieren sind. Insbesondere kann für derartige Systeme die Korrektgestelltheit innerhalb des auf Basis des ungezwungenen Systems eingeführten Zustandsraums nicht gezeigt werden [BC88b]. In nachfolgenden Veröffentlichungen wie [Cur+94] oder [Keu93] wird auf eine explizite Aufführung des Zustandsraums in der Definition von Pritchard-Salamon-Systemen verzichtet und es gilt (2.109). In [Sas02] (S. 21) wird zudem auf die gebräuchliche Wahl von entweder $\mathcal{X} = \mathcal{W}$ oder $\mathcal{X} = \mathcal{V}$ hingewiesen. Für die in Definition 7 auftretenden Operatoren gilt

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\in \mathcal{L}(\mathcal{V}), & B &\in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \\ C &\in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y}), & D &\in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Im Rahmen der vorangehenden Betrachtungen ungezwungener Systeme wird lediglich die von einem Systemoperator erzeugte stark stetige Halbgruppe auf dem Zustandsraum betrachtet. Die Lösung eines Systems der Pritchard-Salamon-Klasse wird unter noch näher zu definierenden Bedingungen strukturell durch (2.107) beschrieben, die Ausgangstrajektorie folgt (2.108). Die Regularität der Lösung hängt für $u \in L^2_{\text{lok}}([0, \infty), \mathcal{U})$ von der Wahl der Anfangsbedingungen ab ([Cur+94] (S. 11)), weitere Betrachtungen dazu schließen sich an. Anhand der Lösung, der Ausgangstrajektorie und den Eigenschaften der beteiligten Operatoren (2.111) ist ersichtlich, dass die stark stetige Halbgruppe eines Pritchard-Salamon-Systems auf allen Räumen der zugrunde liegenden Raumskala definiert sein muss.

Einschränkungen und Erweiterungen der stark stetigen Halbgruppe

Im Fall von Halbgruppen-Regelsystemen mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren erzeugt der Systemoperator voraussetzungsgemäß eine stark stetige Halbgruppe auf dem Zustandsraum. Die im Rahmen der Pritchard-Salamon-Klasse zugelassenen unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren erfordern die Existenz dem System eindeutig zugeordneter stark stetiger Halbgruppen auf den in (2.109) auftretenden Räumen \mathcal{W}, \mathcal{V} . Die gesuchten Halbgruppen werden in diesem Fall durch eindeutig definierte Erweiterungen oder gegebenenfalls Einschränkungen des im Zustandsraum definierten Systemoperators erzeugt. Eine detaillierte Beschreibung eines mathematischen Rahmens derartiger Konstruktionen unter Berücksichtigung spezieller Annahmen hinsichtlich \mathcal{V} wird in [TW09] vorgenommen. Allgemeine Ausführungen über invariante Unterräume von stark stetigen Halbgruppen und daraus resultierende Erkenntnisse hinsichtlich der Einschränkungen der jeweiligen Erzeuger sowie der Einschränkung der stark stetigen Halbgruppen finden sich in [Paz83].

Im Folgenden wird die Existenz eines dem System zugeordneten Systemoperators $A^\mathcal{V}$ angenommen, der darüber hinaus der infinitesimale Erzeuger der stark stetigen Halbgruppe $\{\Phi^\mathcal{V}(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ sei. Falls der Zustandsraum des ungezwungenen Systems entsprechend (2.110) Bestandteil der zugrunde liegenden Raumskala ist, wird $A^\mathcal{V}$ als eindeutige Erweiterung zu A angesehen, während $\{\Phi^\mathcal{V}(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die Erweiterung zu der von A erzeugten Halbgruppe $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ist. Darüber hinaus wird eine Einschränkung von $A^\mathcal{V}$ auf einen Operator $A^\mathcal{W} : \mathcal{D}(A^\mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{W}$ angenommen, der eine stark stetige Halbgruppe $\{\Phi^\mathcal{W}(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit $\Phi^\mathcal{W}(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{W}), t \mapsto \Phi^\mathcal{W}(t)$ auf \mathcal{W} erzeugt. Entsprechend einer Einschränkung linearer Operatoren nach Definition 40 gilt $\mathcal{D}(A^\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{D}(A^\mathcal{V})$ und

$$A^\mathcal{W}x = A^\mathcal{V}x \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^\mathcal{W}) \quad (2.112)$$

mit $\mathcal{D}(A^\mathcal{W}) = \{x \in \mathcal{D}(A^\mathcal{V}) | A^\mathcal{W}x \in \mathcal{W}\}$, vergleiche dazu auch [Cur+94] (S. 8). Bezüglich der stark stetigen Halbgruppe liegt demnach für alle Räume der Raumskala aus (2.109) beziehungsweise (2.110) eine Definition vor. Damit sind alle Fälle von Urbildbereichen der stark stetigen Halbgruppe, die in der Lösung (2.107) beziehungsweise der Ausgangstrajektorie eines Pritchard-Salamon-Systems (2.108) auftreten können, abgedeckt. Die gemäß Satz 4 auf Seite 48 zu jeder stark stetigen Halbgruppe existierende Wachstumsgrenze muss für die Halbgruppen $\mathcal{T}_\Phi, \mathcal{T}_{\Phi^\mathcal{W}}, \mathcal{T}_{\Phi^\mathcal{V}}$

nicht zwingend übereinstimmen. Falls eine Unterscheidung der Wachstumsgrenzen der genannten Halbgruppen notwendig ist, erfolgt deren Benennung durch $\omega_0, \omega_0^{\mathcal{W}}, \omega_0^{\mathcal{V}}$. Falls einem Pritchard-Salamon-System exponentiell stabile stark stetige Halbgruppe auf \mathcal{W} und \mathcal{V} zugeordnet sind, wird das System als exponentiell stabil bezeichnet.

Auf die in diesem Abschnitt eingeführte explizite Kennzeichnung der stark stetigen Halbgruppen wird innerhalb der Definition der Pritchard-Salamon-Klasse (Definition 7) verzichtet. Aufgrund der Eindeutigkeit der Erweiterungen und Einschränkungen wird die Kennzeichnung im folgenden ebenfalls vernachlässigt.

Reguläre Pritchard-Salamon-Systeme

Pritchard-Salamon-Systeme, die zusätzlich die durch (H3) aus [PS87b] (S. 125) gegebene Bedingung

$$\mathcal{D}(A^{\mathcal{V}}) \xhookrightarrow{\mathbf{d}} \mathcal{W} \quad (2.113)$$

erfüllen, werden als reguläre ([CZ94] (S. 131), [SC00] (S. 4595)) oder glatte („smooth“) ([Kau93] (S. 22), [Sas02] (S. 21)) Pritchard-Salamon-Systeme bezeichnet. Die Hervorhebung derartiger Systeme liegt in ihren angenehmen Eigenschaften begründet. Zur Abhängigkeit der Eigenschaften der Pritchard-Salamon-Systeme von (2.113) sei auf die Betrachtungen in [Cur+94] verwiesen. Laut Lemma 2.6 aus [Cur+94] (S. 8) stimmen für reguläre Pritchard-Salamon-Systeme das Spektrum der Erweiterung $A^{\mathcal{V}}$ und der Einschränkung $A^{\mathcal{W}}$ von A überein. Es gilt dann

$$\sigma(A^{\mathcal{W}}) = \sigma(A^{\mathcal{V}}) \quad (2.114)$$

und damit auch $\sigma_p(A^{\mathcal{W}}) = \sigma_p(A^{\mathcal{V}})$. Proposition 2.7 aus [Cur+94] (S. 9) gibt Bedingungen dafür an, dass auch die Wachstumsgrenzen der Halbgruppen $\mathcal{T}_{\Phi^{\mathcal{W}}}$ und $\mathcal{T}_{\Phi^{\mathcal{V}}}$ übereinstimmen.

Zulässige Ein-/Ausgangsoperatoren

Ein wesentlicher Bestandteil verschiedener Klassen unendlich-dimensionaler Systeme bildet die Definition der im Sinne der jeweiligen Klasse zulässigen Ein-/Ausgangsoperatoren. Im Folgenden werden die im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse zulässigen Ein-/Ausgangsoperatoren charakterisiert, dabei wird die allgemeine Definition der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsoperatoren aus Abschnitt C.2.3 vorausgesetzt.

Das Einsetzen der Lösung der Zustandsgleichung (2.107) in die Ausgangsgleichung (2.108) führt auf das Ein-/Ausgangsverhalten von Pritchard-Salamon-Systemen im Zeitbereich. Analog zu (2.15) gilt formal

$$y(t) = \mathfrak{G}u(t) = C\Phi(t)x_0 + C \int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau + D u(t). \quad (2.115)$$

Die Kompatibilität zwischen dem Bildbereich des Eingangsoperators $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ und dem Urbildbereich der stark stetigen Halbgruppe wird durch die im vorangehenden Abschnitt eingeführte Erweiterung der Halbgruppe gewährleistet. Der erzwungene Anteil der Ausgangstrajektorie $y(t)$ in Gleichung (2.115) wird durch die sukzessive Anwendung des Ausgangsoperators C und des Steuerbarkeitsoperators nach (C.18) beziehungsweise (C.19) beschrieben. Der Integrand des Integrals aus Gleichung (C.18) oder aus Gleichung (C.19) kann im Allgemeinen für beliebige $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ Element von \mathcal{V} sein, die korrekte Interpretation dieser Integrale wird in [Kau93] erläutert. Der Verlauf des freien Anteils der Lösung ist nur von den Anfangsbedingungen abhängig, bezüglich derer eine Wahl in \mathcal{V} denkbar ist. Die Zustandstrajektorien verlaufen damit nicht zwingend im Definitionsbereich des Ausgangsoperators, d.h. nicht alle denkbaren Kombinationen von Ein-/Ausgangsoperatoren mit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ und $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ führen auf ein wohldefiniertes oder korrekt gestelltes Ein-/Ausgangsverhalten im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse.

Diejenigen Ein-/Ausgangsabbildungen, die auf eine wohldefinierte Gleichung für das Ein-/Ausgangsverhalten führen, werden daher hervorgehoben und als zulässige Ein-/Ausgangsoperatoren zu einer stark stetigen Halbgruppe \mathcal{T}_Φ im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse definiert ([PS87b], [Kau93] oder [Cur+94]).

Definition 8 (Zulässige Ein-/Ausgangsoperatoren) Es seien $\mathcal{W}, \mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ Hilberträume.

ZIO1) $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ wird als zulässiger Eingangsoperator zu einer stark stetigen Halbgruppe $\Phi(t)$ bezeichnet, falls für alle $u \in L^2([0, t_1], \mathcal{U})$ positive Konstanten $t_1, c_1 > 0$ existieren, sodass

$$\mathcal{B}_{t_1} u = \int_0^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) B u(\tau) d\tau \in \mathcal{W} \quad (2.116)$$

sowie

$$\|\mathcal{B}_{t_1} u\|_{\mathcal{W}} \leq c_1 \|u\|_{L^2([0, t_1], \mathcal{U})} \quad \forall u \in L^2([0, t_1], \mathcal{U}) \quad (2.117)$$

gilt.

ZIO2) Als zulässiger Ausgangsoperator zu einer stark stetigen Halbgruppe $\Phi(t)$ wird $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ bezeichnet, falls positive Konstanten $t_2, c_2 > 0$ existieren, sodass

$$\|C \Phi(\cdot) x\|_{L^2([0, t_2], \mathcal{Y})} \leq c_2 \|x\|_{\mathcal{W}}, \quad \forall x \in \mathcal{W}. \quad (2.118)$$

□

Die Zulässigkeit der Ein-/Ausgangsoperatoren wird in der voranstehenden Definition im wesentlichen anhand von Forderungen bezüglich der Beschränktheit des Steuerbarkeitsoperators beziehungsweise des Beobachtbarkeitsoperators festgelegt. Für das Beispielsystem wird Definition 8 in

Abschnitt C.4 als Ausgangspunkt für die Herleitung von Kriterien für die Zulässigkeit der Ein-/Ausgangsoperatoren genutzt.

Unter der Berücksichtigung zulässiger Ein- und Ausgangsoperatoren (Definition 8) sind die bezüglich der Korrektgestelltheit von (2.115) geschilderten Probleme weitestgehend behoben. Mit Eingangssignalen $u \in L^2([0, t_1], \mathcal{U})$ beziehungsweise $u \in L^2_{\text{lok}}([0, \infty), \mathcal{U})$ muss zur Bestimmung der Regularität der Ausgangstrajektorie lediglich eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen getroffen werden.

Für $x_0 \in \mathcal{W}$ liegt der erzwungene Anteil der Zustandstrajektorie nach (2.116) in \mathcal{W} , für die Einschränkung der Halbgruppe gilt $\Phi(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$. Somit ist die Zustandstrajektorie auf dem Zeitintervall $[0, \infty)$ kontinuierlich mit Werten aus \mathcal{W} ([Cur+94] (S. 11)). Da für den Ausgangsoperator $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ gilt, ergibt sich eine stetige Ausgangstrajektorie $y(t)$ auf dem Zeitintervall $[0, \infty)$.

Für $x_0 \in \mathcal{V}$ findet die stetige Fortsetzung des Beobachtbarkeitsoperators $\mathcal{C}_{t_1}^{\mathcal{V}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, L^2([0, t_1], \mathcal{Y}))$ gemäß C2) aus Abschnitt C.3.1 Verwendung, wobei durch (2.118) lediglich eine stetige Fortsetzung bezüglich einer Abbildung in $L^2([0, t_1], \mathcal{Y})$ gefordert wird. Damit kann im Allgemeinen für die Ausgangstrajektorie $y(t)$ kein über dem Zeitintervall stetiger Verlauf mehr garantiert werden. Vielmehr ist die Ausgangstrajektorie in (2.115) nicht mehr punktweise zu interpretieren, sondern lediglich im Sinne der Äquivalenzklassen lokal quadratisch Lebesgue-integrierbarer Funktion. Für $u \in L^2_{\text{lok}}([0, \infty), \mathcal{U})$ folgt entsprechend $y \in L^2_{\text{lok}}([0, \infty), \mathcal{Y})$.

Anschaulich garantiert für alle Pritchard-Salamon Systeme die Annahme von Anfangsbedingungen im kleineren Raum $x_0 \in \mathcal{W}$ sowie ausreichend gutmütiger Eingangssignale $u \in L^2_{\text{lok}}([0, \infty), \mathcal{U})$ einen hinsichtlich der Zeit kontinuierlichen Verlauf von Zustands- und Ausgangstrajektorie. Der erzwungene Anteil der Dynamik eines Pritchard-Salamon-Systems erweist sich unter der Annahme zulässiger Eingangsoperatoren sowohl im Hinblick auf die Zustandstrajektorien als auch auf die Ausgangstrajektorie als unproblematisch. Der freie Anteil der Lösung lässt sich für $x_0 \in \mathcal{V}$ durch die Erweiterung der stark stetigen Halbgruppe auf \mathcal{V} handhaben, was insgesamt in einem kontinuierlichen Verlauf der Zustandstrajektorie, allerdings in \mathcal{V} , mündet. Der Verlauf der Ausgangstrajektorie $y \in L^2_{\text{lok}}([0, \infty), \mathcal{Y})$ hingegen ist im Allgemeinen hinsichtlich der Zeit nur noch fast überall definiert.

Übertragungsverhalten von Pritchard-Salamon-Systemen

Dieser Abschnitt widmet sich dem Übertragungsverhalten von Pritchard-Salamon-Systemen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Formulierung des Zusammenhangs zwischen der Ein-/Ausgangsabbildung im Bildbereich der Laplace-Transformation und den Operatoren der Zustandsraumdarstellung. Damit wird in erster Linie eine Verbindung zwischen der aus der mathematischen Modellbildung resultierenden Zustandsraumdarstellung und der verschiedentlich auf Frequenzbereichsmethoden beruhenden Identifikation eines realen Systems hergestellt. Weiterführende Betrachtungen bezüglich der behandelten Systemklassen wie beispielsweise algebraische Charakterisierung, Invarianz unter statischer sowie dynamischer Ausgangsrückführung oder Äquivalenz von interner

zu externer Stabilität finden sich beispielsweise in [Log92; Cur+94] und werden an dieser Stelle auf wenige im weiteren Verlauf notwendige Aussagen reduziert.

Im Folgenden wird im Hinblick auf das Beispielsystem ein Pritchard-Salamon-System gemäß Definition 7 mit zulässigen Ein-/Ausgangsoperatoren und verschwindenden Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ angenommen. Um anstelle der formal aufwendigeren Definition der Übertragungsfunktion allgemeiner Pritchard-Salamon-Systeme aus [Cur+94] (S. 12) problemlos die kompaktere Definition aus [Sas02] verwenden zu können, wird ferner die Regularität der betrachteten Pritchard-Salamon-Systeme vorausgesetzt.

Entsprechend [Sas02] (S. 21) besitzt ein reguläres Pritchard-Salamon-System $\Sigma(A, B, C, D)$ eine durch $y(s) = G(s)u(s)$, auf einer Halbebene $\mathbb{C}_\eta^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \eta\}$, $\eta = \max(\omega_0^\mathcal{W}, \omega_0^\mathcal{V})$ der komplexen Zahlen definierte, analytische Übertragungsfunktion. Ausgedrückt durch die Operatoren der Zustandsraumdarstellung lautet die analytische Funktion $G : \mathbb{C}_\eta^+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, $s \mapsto G(s)$ dann

$$G(s) = C(sI - A^\mathcal{V})^{-1}B. \quad (2.119)$$

Der Zusammenhang zwischen der Übertragungsfunktion und den Operatoren der Zustandsraumdarstellung beinhaltet die Resolvente $C(sI - A^\mathcal{V})^{-1}B = CR(s, A^\mathcal{V})B$ der in Abschnitt 2.3.2 definierten Erweiterung des Systemoperators, also die Laplace-Transformierte der durch $A^\mathcal{V}$ erzeugten stark stetigen Halbgruppe $\Phi^\mathcal{V} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. Den Ausführungen aus [Cur+94] (S. 15) folgend, gilt für jedes Pritchard-Salamon-System

$$C(sI - A^\mathcal{W})^{-1}B = C(sI - A^\mathcal{V})^{-1}B \quad (2.120)$$

für alle $s \in \mathbb{C}_{\max(\omega_0^\mathcal{W}, \omega_0^\mathcal{V})}^+$.

Einen schönen Überblick über die Übertragungsfunktionen unendlich-dimensionaler Systeme zusammen mit der Definition relevanter Eigenschaften solcher Übertragungsfunktionen sowie zahlreichen Beispielen geben die Betrachtungen in [CM09]. In diesem Zusammenhang sei auf die verschiedentlich in den Eigenschaften der Übertragungsfunktionen unendlich-dimensionaler Systeme gegenüber dem Fall rationaler Übertragungsfunktionen zusätzlich erforderlichen mathematischen Details hingewiesen. Als Beispiel sei die Minimalphasigkeit der Übertragungsfunktion einer Strecke genannt, die eine wichtige Rolle in Bezug auf die Limitierung der innerhalb eines geschlossenen Regelkreises erreichbaren Performance spielt. Die Definition der Minimalphasigkeit der Übertragungsfunktionen unendlich-dimensionaler Systeme lässt sich [CM09] oder der dort genannten Quelle (Definition A., [RR85] (S. 94)) entnehmen, während der endlich-dimensionale Fall in Definition (4.36) [Fö13] behandelt wird. Letztere Definition ist vergleichbar mit Proposition 5.4 aus [JMT07] (S. 1660), wobei letztere als Kriterium für die Überprüfung der Minimalphasigkeit der Übertragungsfunktionen unendlich-dimensionaler Systeme angesehen werden kann. In Erweiterung zum endlich-dimensionalen Fall ist insbesondere der endliche relative Grad (Definition 5.3, [JMT07] (S. 1659)) einer Übertragungsfunktion nachzuweisen, eine Eigenschaft, die rationale Übertragungsfunktionen stets besitzen.

2.3.3 Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse

Die Definition der Zulässigkeit von Ein-/Ausgangsoperatoren gemäß Definition 8 zeigt, dass eine Formulierung in der Pritchard-Salamon-Klasse nicht für jedes unendlich-dimensionale System möglich ist. Zu einem gegebenen System ist demnach fallspezifisch zu überprüfen, ob es in der Pritchard-Salamon-Klasse zu formulieren ist. Dabei gilt es im Allgemeinen zu ermitteln, in welchen Räumen das zugehörige Cauchy-Problem eine kontinuierliche Lösung besitzt. Dieser Abschnitt enthält das Vorgehen zur Formulierung des Beispielsystems als Pritchard-Salamon-System. Durch den Nachweis der Zugehörigkeit des Beispielsystems zur Pritchard-Salamon-Klasse lassen sich die klassenbezogenen Aussagen dieser Systemklasse auf das Beispielsystem anwenden.

Einleitend werden verschiedene Annahmen hinsichtlich des Beispielsystems kompakt eingeführt. Nachfolgend dienen die Betrachtungen zur Beschränktheit der Ein-/Ausgangsoperatoren der Festlegung der Räume \mathcal{V} und \mathcal{W} . Die resultierende Festlegung der beiden Räume gewährleistet, dass die Ein-/Ausgangsoperatoren jeweils für sich die notwendige Beschränktheit aufweisen. Im Anschluss wird die Zulässigkeit der Ein-/Ausgangsoperatoren überprüft und damit der Nachweis erbracht, dass die Kombination der beiden Operatoren in der gewählten Formulierung ein für Pritchard-Salamon-Systeme tolerierbares Maß an Unbeschränktheit aufweist. Auf den damit erbrachten Nachweis der Zugehörigkeit des Beispielsystems zur Pritchard-Salamon-Klasse folgt die Einordnung der gewählten Formulierung in den Kontext der in Abschnitt B.9.3 definierten Interpolationsräume und damit in einen bei der Formulierung unendlich-dimensionaler Systeme üblichen Rahmen. Die abschließende Zusammenfassung der Formulierung des Beispielsystems enthält den Nachweis, dass es sich bei dem Beispielsystem um ein reguläres Pritchard-Salamon-System handelt, welches zudem über einen nuklearen Hankel-Operator verfügt.

Der in diesem Abschnitt exemplarisch für das Beispielsystem gezeigte Zugehörigkeitsbeweis, die Wahl der zugrunde liegenden Räume und die Klassifizierung des Hankel-Operators stützen sich auf die in Abschnitt C.4 allgemein für Systeme mit diagonalisierbaren Systemoperatoren hergeleiteten Kriterien.

Annahmen bezüglich des Beispielsystems

In Vorgriff auf Abschnitt 3.1.3 dient die Menge der Rechtseigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ des in Gleichung (2.79) definierten Systemoperators als Rieszbasis des Zustandsraums, wohingegen die Menge seiner Linkseigenvektoren $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ als zur Rieszbasis biorthogonale Menge eingeführt wird. Die Eigenvektoren des Systemoperators sind durch Gleichung (D.23) aus Abschnitt D.1.1 gegeben, während die Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators durch Gleichung (D.29) aus Abschnitt D.1.2 beschrieben werden. Eine Normierung der beiden Mengen erfolgt in Anhang D.1.4 bezüglich des energetischen Innenprodukts aus Gleichung (2.84) und es gilt

$$v_i = \underbrace{(\lambda_{S,i} - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}}}_{v_i^*} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{|i|} \\ \lambda_i \tilde{\psi}_{|i|} \end{pmatrix}, \quad w_i = \underbrace{\overline{(\lambda_{S,i} - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}}}}_{w_i^*} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{|i|} \\ -\bar{\lambda}_i \tilde{\psi}_{|i|} \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

für $i \in \mathbb{I}$.

Die v_i, w_i und λ_i werden in Abschnitt D.1.1 Abschnitt D.1.2 durch die Indexmenge $\mathbb{I} = \mathbb{I}^- \cup \mathbb{I}^+$ indiziert. Gleichwertig lässt sich eine Indexierung der benannten Mengen durch \mathbb{I}^+ vornehmen. Dazu ist lediglich eine Umordnung der entsprechenden Größen notwendig.

Eine Darstellung der Elemente des Zustandsraums lautet entsprechend $x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i$. Für den durch Gleichung (2.83) festgelegten Zustandsraum gilt $\mathcal{X} = \mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}}) \times L^2(\Omega) = H_{\frac{1}{2}} \times H$. Unter Annahme von $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$ ist die Norm auf \mathcal{X} durch $\|x\|_{\mathcal{X}}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathcal{X}_1} + \langle x_2, x_2 \rangle_{\mathcal{X}_2}$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gegeben, wobei $\|x_1\|_{\mathcal{X}_1} = \langle S^{\frac{1}{2}} x_1, S^{\frac{1}{2}} x_1 \rangle^{\frac{1}{2}}$ und $\|x_2\|_{\mathcal{X}_2} = \langle x_2, x_2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ gilt. Unter Ausnutzung der Rieszbasis des Zustandsraums $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ lautet eine Charakterisierung des Zustandsraums

$$\mathcal{X} = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\}. \quad (2.122)$$

Entsprechend der Ausführungen aus Abschnitt C.4.1 werden die Räume \mathcal{W} und \mathcal{V} ausgehend von (2.122) eingeführt. Im Folgenden gilt $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$. \mathcal{H}_β wird mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\beta}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\beta}$, induziert durch das in (C.70) aufgeführte Innenprodukt, versehen. Eine Charakterisierung von \mathcal{H}_β ist (C.69) zu entnehmen. Ferner wird die Festlegung $\mathcal{W} = \mathcal{H}_\gamma$ getroffen. Die Norm auf \mathcal{H}_γ lautet $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\gamma}$ mit dem Innenprodukt gemäß (C.76). Die Charakterisierung von \mathcal{H}_γ ist durch (C.75) gegeben.

Die Räume $\mathcal{W} = \mathcal{H}_\gamma$ und $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ sind damit noch nicht vollständig festgelegt, vielmehr liegt eine Parametrisierung der Räume auf Basis der zu bestimmenden Folgen $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ beziehungsweise $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ vor. Eine wesentliche Rolle bei der Bestimmung von \mathcal{W} und \mathcal{V} spielen der Ein-/Ausgangsoperator des Beispielsystems, wobei $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ und $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ gelten muss. Die Repräsentation der Ein-/Ausgangsoperatoren basiert auf den jeweils zugehörigen Folgen der Entwicklungskoeffizienten $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und $\{c_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+}$, innerhalb derer die einzelnen Koeffizienten formal durch Gleichung (2.36) beziehungsweise Gleichung (2.40) definiert sind.

Beschränktheit des Eingangsoperators

Als Motivation, das Beispielsystem in der Pritchard-Salamon-Klasse zu formulieren, zeigen die folgenden Betrachtungen die Unbeschränktheit des Eingangsoperators des Beispielsystems als Abbildung in den Zustandsraum $\mathcal{X} = H_{\frac{1}{2}} \times H$. Da die Zulässigkeit eines Eingangsoperators im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ voraussetzt, wird anschließend eine entsprechende Festlegung von $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ durch die Wahl der Folge $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ getroffen.

Für das Beispielsystem gilt $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, daher ist das in Abschnitt C.2.1 hergeleitete und durch (C.10) gegebene Kriterium notwendig und hinreichend für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$. Die Überprüfung von $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ erfordert die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten $b_i^*, i \in \mathbb{I}^+$. Der Eingangsoperator des Beispielsystems folgt unter Annahme der Zustände entsprechend (2.78) aus der Be-

wegungsgleichung (A.23) formal zu

$$Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{\text{In}} \frac{\partial^2 \chi(v)}{\partial v^2} \end{pmatrix} u. \quad (2.123)$$

Die im Eingangsoperator (2.123) auftretende Differentiation wird gemäß der Ausführungen aus Anhang A.2.2 im distributiven Sinne interpretiert und kann entsprechend Gleichung (B.157) als Funktional auf dem Raum der Testfunktionen beziehungsweise als Dualitätsprodukt dargestellt werden.

Als Raum der Testfunktionen wird anstelle des Raums der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen der zunächst noch nicht genau spezifizierte Raum \mathcal{V}' eingeführt. Für die Verwendung von geeigneten Sobolow-Räumen als Raum der Testfunktionen sei an dieser Stelle beispielsweise auf die Ausführungen in [Alt06] (S. 169) verwiesen.

Für die Überprüfung der Beschränktheit des Eingangsoperators wird zunächst die Darstellung aus (2.38) verwendet, entsprechend gilt

$$Bu = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}} v_i. \quad (2.124)$$

Da der Zustandsraum \mathcal{X} mit seinem Dualraum \mathcal{X}' übereinstimmt, ist das Dualitätsprodukt zwischen diesen Räumen mit dem Innenprodukt auf \mathcal{X} identisch. Ferner wird $\mathcal{X} \xhookrightarrow{\text{d}} \mathcal{V}$ vorausgesetzt und das Dualitätsprodukt zwischen \mathcal{V} und \mathcal{V}' als stetige Fortsetzung des Innenprodukts, definiert durch (B.103) in Abschnitt B.9.1, angesehen. Mit $x = Bu$ in (B.103) lässt sich daher

$$\begin{aligned} \langle w_j, i_{Y'} Bu \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}} v_i, i_X w_j \right\rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}} \end{aligned} \quad (2.125)$$

schreiben. Dabei wird neben der Biorthogonalität von $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ der Zusammenhang für das Innenprodukt aus Gleichung (2.37) ausgenutzt. Der Ansatz zur Berechnung der einzelnen Entwicklungskoeffizienten des Eingangsoperators stimmt somit formal für den beschränkten und den unbeschränkten Fall überein.

Die Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bilden eine Rieszbasis des Zustandsraums \mathcal{X} und werden zudem als Elemente von $\mathcal{V}' \xhookrightarrow{\text{d}} \mathcal{X}$ angenommen. An dieser Stelle werden die $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ als Testfunktionen interpretiert. Sie müssen unter anderem über ausreichend Regularität verfügen, um nach einer örtlichen Differentiation noch eine Punktauswertung zu erlauben. Im Fall des Beispielsystems führt das Einsetzen des Eingangsoperators aus Gleichung (2.123) in das Innenprodukt auf \mathcal{X} formal auf

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{\text{In}} \frac{\partial^2 \chi(v)}{\partial v^2} \end{pmatrix} u, \begin{pmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}} = \langle u, -\alpha_{\text{In}} w_i^* \bar{\lambda}_i \left(\delta_{v^r} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v} \right) - \delta_{v^l} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v} \right) \right) \rangle_{\mathcal{U}}. \quad (2.126)$$

Die rechte Seite der voranstehenden Gleichung kann damit als Basis zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten im Fall des Beispielsystems angesehen werden, die sich in die Allgemeine Gleichung (2.125) überführen lässt.

Da die Linkseigenvektoren des Beispielsystems aus Gleichung (2.121) die zugehörigen Randbedingungen aufgrund von $\frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v(y)}|_{y=v^l} = 0$ erfüllen, vereinfachen sich die Entwicklungskoeffizienten des Eingangsoperators aus Gleichung (2.126) zu

$$B^* w_i = \bar{b}_i^* = -\alpha_{\text{In}} w_i^* \bar{\lambda}_i \delta_{v^r} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v} \right), \quad i \in \mathbb{I}^+. \quad (2.127)$$

Für den skalaren Fall folgt aufgrund von $\langle u, B^* w_i \rangle_{\mathcal{U}} = \overline{\langle B^* w_i, u \rangle_{\mathcal{U}}} = \overline{B^* w_i} u$ und unter Berücksichtigung von $\alpha_{\text{In}} \delta_{v^r} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v} \right) \in \mathbb{R}$ schließlich

$$\overline{B^* w_i} = b_i^* = -\alpha_{\text{In}} \overline{w_i^*} \lambda_i \delta_{v^r} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v} \right), \quad i \in \mathbb{I}^+. \quad (2.128)$$

Für die Überprüfung der Summierbarkeitsbedingung ist keine Unterscheidung zwischen der endlichen Konstante $\alpha_{\text{In}} \in \mathcal{O}(i^0) = \mathcal{O}(1)$ und $1 \in \mathcal{O}(i^0) = \mathcal{O}(1)$ erforderlich. Unter Vernachlässigung von α_{In} und mit $|\bar{\lambda}_i| = |\lambda_i|$ gilt

$$|b_i^*|^2 = b_i^* \bar{b}_i^* = |\lambda_i|^2 |w_i^*|^2 \left| \delta_{v^r} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v} \right) \right|^2 \quad (2.129)$$

wobei $\delta_{v^r} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v} \right) = \frac{\partial \tilde{\psi}_{|i|}}{\partial v}|_{v=v^r}$. Der vorliegende Fall erlaubt eine Aufspaltung der unendlichen Reihe, wobei eine erneute Umordnung und veränderte Definition von \mathbb{I}^+ notwendig ist. Es gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} |b_i^*|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}} |b_i^*|^2 = \sum_{i \in \tilde{\mathbb{I}}^+} |b_i^*|^2 + \sum_{i \in \mathbb{I}^-} |b_i^*|^2. \quad (2.130)$$

In den voranstehenden unendlichen Reihen sind alle auftretenden Summanden aufgrund der Betragsbildung positiv. Als notwendige Bedingung für die Konvergenz der gesamten Reihe müssen die den einzelnen Reihen in (2.130) zugrunde liegenden Folgen jeweils Nullfolgen sein. Um die Divergenz der gesamten Reihe zu zeigen, reicht folglich der Nachweis, dass eine der Folgen keine Nullfolge ist.

Dazu wird die Ordnung der $|b_i^*|$ betrachtet. Ausgehend von der Ordnung der einzelnen Faktoren in (2.129), die sich in Tabelle 2.2 finden, gilt

$$|b_i^*| \in \begin{cases} \mathcal{O}(i^1), & i \in \tilde{\mathbb{I}}^+ \\ \mathcal{O}(i^{-1}), & i \in \mathbb{I}^- \end{cases} \quad (2.131)$$

für ausreichend große i . Dieses Ergebnis zeigt, dass die in (2.130) aufgeführte Reihe auf Basis der Folge $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ nicht konvergiert. Da im Falle des skalaren Eingangs $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ notwendig und hinreichend für die Beschränktheit des Eingangsoperators ist, folgt die Unbeschränktheit

	$ \lambda_i $	$ v_i^* $	$ w_i^* $	$ \delta_{v^r}(\tilde{\psi}_{ i }) $	$ \delta_{v^r}\left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{ i }}{\partial v}\right) $
$\tilde{\mathbb{I}}_0^+$	$\mathcal{O}(i^4)$	$\mathcal{O}(i^{-4})$	$\mathcal{O}(i^{-4})$	$\mathcal{O}(i^0)$	$\mathcal{O}(i^1)$
\mathbb{I}_0^-	$\mathcal{O}(i^0)$	$\mathcal{O}(i^{-2})$	$\mathcal{O}(i^{-2})$	$\mathcal{O}(i^0)$	$\mathcal{O}(i^1)$

Tabelle 2.2: Ordnung verschiedener in $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}}$ und $\{c_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ auftretender Terme.

des Eingangsoperators des Beispielsystems als Abbildung in den Zustandsraum \mathcal{X} . Neben dem gezeigten Vorgehen ist beispielsweise auch ein Beweis der Divergenz auf Basis einer divergenten Majorante denkbar. In jedem Fall ist eine Formulierung des Beispielsystems mit dem angenommenen Eingangsoperator in der Klasse der Halbgruppen-Regelsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren nicht sinnvoll möglich.

Für die angestrebte Formulierung innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse muss $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ gelten. Im Fall des Beispielsystems und $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ ist (C.74) dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung. Die Einhaltung von $\left\{\beta_i^{\frac{1}{2}} b_i^*\right\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ erfordert $\beta_i^{\frac{1}{2}} b_i^* \in \mathcal{O}(i^{-(1+\epsilon)})$ für hinreichend große i . Um $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ mit einem möglichst kleinen Raum $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ zu gewährleisten, liegt aufgrund von (2.131) eine Wahl

$$\beta_i \in \begin{cases} \mathcal{O}(i^{-(3+\epsilon)}), & i \in \tilde{\mathbb{I}}^+ \\ \mathcal{O}(i^0), & i \in \mathbb{I}^-, \end{cases} \quad (2.132)$$

nah. Für das Beispielsystem gilt $\lambda_i = \operatorname{Re}(\lambda_i)$ für hinreichend große Indizes. Tabelle 2.2 lässt sich entnehmen, dass mit der Wahl

$$\beta_i = |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1} \in \begin{cases} \mathcal{O}(i^{-4}), & i \in \tilde{\mathbb{I}}^+ \\ \mathcal{O}(i^0), & i \in \mathbb{I}^-, \end{cases} \quad (2.133)$$

die Bedingung (2.132) erfüllt wird. Darüber hinaus gilt $|\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1} < 1$ für fast alle $i \in \mathbb{I}^+$.

Mit der geschilderten Wahl ergibt sich aus (C.70) das Innenprodukt auf $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ zu

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{V}} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1} \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{V} \quad (2.134)$$

und der Raum \mathcal{V} ist charakterisiert durch

$$\mathcal{V} = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1} |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\}. \quad (2.135)$$

Aus der Ordnung von $|\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1}$ und $|b_i^*|^2$ folgt

$$|\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1} |b_i^*|^2 \in \begin{cases} \mathcal{O}(i^{-2}), & i \in \tilde{\mathbb{I}}^+ \\ \mathcal{O}(i^{-2}), & i \in \mathbb{I}^-, \end{cases} \quad (2.136)$$

entsprechend gilt daher $\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i |b_i^*|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1} |b_i^*|^2 < \infty$ und damit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Aufgrund der Eigenschaften der Koeffizienten $|\operatorname{Re}(\lambda_i)|$, $i \in \mathbb{I}^+$ und der Definition von \mathcal{V} folgt zudem $\mathcal{X} \xhookrightarrow{\mathbf{d}} \mathcal{V}$. Mit der Festlegung des Zustandsraums als Pivotraum ergibt sich die Raumskala

$$\mathcal{V}' \xhookrightarrow{\mathbf{d}} \mathcal{X} \xhookrightarrow{\mathbf{d}} \mathcal{V}, \quad (2.137)$$

wobei die Norm auf \mathcal{V}' durch das Innenprodukt $\langle x, y \rangle_{\mathcal{V}'} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\operatorname{Re}(\lambda_i)| \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle}$ für alle $x \in \mathcal{V}'$ und für alle $y \in \mathcal{V}'$ induziert wird und $\mathcal{V}' = (\mathcal{H}_\beta)'$ durch

$$\mathcal{V}' = (\mathcal{H}_\beta)' = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\operatorname{Re}(\lambda_i)| |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (2.138)$$

charakterisiert ist.

Beschränktheit des Ausgangsoperators

Die Herleitung des Kriteriums für die Beschränktheit des Ausgangsoperators vom Zustandsraum in den Ausgangsraum und damit für $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ findet sich in Abschnitt C.2.2. Da im Fall des Beispielsystems $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ gilt, ist (C.17) und damit

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} |c_i^*|^2 < \infty \quad (2.139)$$

notwendig und hinreichend für $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Die zur Überprüfung von (2.139) notwendigen Entwicklungskoeffizienten des Ausgangsoperators $\{c_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ sind im Allgemeinen durch (2.40) definiert. Zur Bestimmung der Ordnung der Entwicklungskoeffizienten des Ausgangsoperators des Beispielsystems wird eine Messung am rechten Rand $v_{\text{Mess}} = L = v^r$ angenommen. Diese Annahme führt aufgrund der in Abbildung 3.1 auf Seite 95 für $i = 1, \dots, 4$ dargestellten Form der $\tilde{\psi}_{|i|}$ auf die größtmögliche Ordnung der Entwicklungskoeffizienten des Ausgangsoperators. Für den durch die Ausführungen in Abschnitt 1.3 festgelegten Ausgangsoperator und die Eigenvektoren v_i entsprechend (2.121) gilt damit

$$c_i^* = C v_i = v_i^* \delta_{v^r}(\tilde{\psi}_{|i|}) \quad (2.140)$$

und entsprechend

$$|c_i^*|^2 = |v_i^*|^2 \left| \delta_{v^r}(\tilde{\psi}_{|i|}) \right|^2 \quad (2.141)$$

mit $\delta_{v^r}(\tilde{\psi}_{|i|}) = \tilde{\psi}_{|i|}|_{v=v^r}$. Die Komplexitätsklassen von $|v_i^*|$ und $\left| \delta_{v^r}(\tilde{\psi}_{|i|}) \right|$ sind jeweils in Tabelle 2.2 aufgeführt und es folgt

$$|c_i^*|^2 \in \begin{cases} \mathcal{O}(i^{-8}), & i \in \tilde{\mathbb{I}}^+ \\ \mathcal{O}(i^{-4}), & i \in \mathbb{I}^-. \end{cases} \quad (2.142)$$

Demnach ist $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Zur Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse ist $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ sicherzustellen. Diese Bedingung wird für $\mathcal{W} = \mathcal{H}_\gamma$ und eine Wahl von

$$\gamma_i = 1, \forall i \in \mathbb{I}^+ \quad (2.143)$$

gewährleistet. Entsprechend (C.75) ist mit (2.143)

$$\mathcal{W} = \mathcal{H}_\gamma = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (2.144)$$

und damit $\mathcal{W} = \mathcal{X}$. Für die Norm auf \mathcal{W} folgt $\|x\|_{\mathcal{W}} = \langle x, x \rangle_{\mathcal{W}}^{\frac{1}{2}}$ mit $\langle x, y \rangle_{\mathcal{W}} = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in \mathcal{W}, y \in \mathcal{W}$. Aufgrund der Definition von \mathcal{W} und \mathcal{V} sowie (2.137) ergibt sich

$$\mathcal{W} = \mathcal{X} \xrightarrow[d]{} \mathcal{V}. \quad (2.145)$$

Zulässigkeit des Eingangs-/ und Ausgangsoperators

Die Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse verlangt zulässige Ein-/Ausgangsoperatoren im Sinne von Definition 8. Für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ lässt sich im Falle des Beispielsystems die Zulässigkeit von B anhand des in Abschnitt C.4.3 hergeleiteten hinreichenden Kriteriums überprüfen. Gemäß (C.83) ist B zulässig, falls

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{\gamma_i \|b_i^*\|_{\mathcal{U}}^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} < \infty. \quad (2.146)$$

Aufgrund der durch (2.143) beschriebenen Wahl $\gamma_i = 1, \forall i \in \mathbb{I}^+$ muss also

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{\|b_i^*\|_{\mathcal{U}}^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} < \infty \quad (2.147)$$

gelten. Aus (2.136) ist die Einhaltung dieser Bedingung bekannt. Folglich handelt es sich bei $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ unter Berücksichtigung der Festlegung von \mathcal{W} um einen zulässigen Eingangsoperator zum Beispielsystem im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse.

Zulässigkeit des Ausgangsoperators

Die Herleitung eines hinlänglichen Kriteriums für die Zulässigkeit des Ausgangsoperators $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ des Beispielsystems im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse findet sich in Abschnitt C.4.4. $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ist im genannten Sinne zulässig, falls (C.84) und damit

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{|c_i^*|^2}{\beta_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|} < \infty \quad (2.148)$$

erfüllt wird. Im Fall des Beispielsystems wird $\beta_i = |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1}$ in (2.133) festgelegt. Entsprechend ergibt sich aus (2.148) die hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit von C zu $\sum_{i \in \mathbb{I}^+} |c_i^*|^2 < \infty$.

Aufgrund von $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ wird diese Bedingung erfüllt und der Ausgangsoperator des Beispielsystems ist für die getroffene Wahl von \mathcal{V} zulässig im Sinne von Definition 8.

Bemerkung zur Wahl des Raumes \mathcal{V}

Die Formulierung des Beispielsystems als Pritchard-Salamon-System beinhaltet die Charakterisierung von $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ in (2.135) als Vervollständigung des Zustandsraums im Sinne der durch das Innenprodukt aus (2.134) definierten Norm. Für das Beispielsystem wird speziell \mathcal{V} durch die Wahl von $\beta_i = |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1}$ festgelegt. Gleichzeitig gilt für das Beispielsystem $\lambda_i = \operatorname{Re}(\lambda_i)$ für hinreichend große Indizes.

Aus diesem Grund lässt sich für das Beispielsystem und den Raum $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ eine Interpretation als Interpolationsraum angeben. Eine kurze Einführung der Interpolationsräume erfolgt in Abschnitt B.9.3. An dieser Stelle ist \mathcal{V} als Vervollständigung von \mathcal{X} in der Norm

$$\|x\|_{\mathcal{V}}^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1} |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad (2.149)$$

anzusehen, während die Interpolationsräume $\mathcal{H}_{-\alpha}$ eine Vervollständigung von \mathcal{X} in der Norm

$$\|x\|_{-\alpha}^2 = \langle x, x \rangle_{-\alpha} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{-2\alpha} |\langle x, w_i \rangle|^2. \quad (2.150)$$

mit dem Innenprodukt aus (B.124) sind. Die Charakterisierung von $\mathcal{H}_{-\alpha}$ ist entsprechend durch (B.125) von Seite 301 gegeben.

Im Fall des Beispielsystems ist $|\lambda_i| = |\operatorname{Re}(\lambda_i)|$ für fast alle $i \in \mathbb{I}^+$ und damit $|\lambda_i| \neq |\operatorname{Re}(\lambda_i)|$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{I}^+$. Für die Wahl $\alpha = \frac{1}{2}$ sind die Norm $\|x\|_{\mathcal{V}}$ aus (2.149) und die Norm (2.150) nur hinsichtlich endlich vieler Summanden voneinander verschieden. Daher wird die Äquivalenz von $\|x\|_{-\frac{1}{2}}$ und $\|x\|_{\mathcal{V}}$ angenommen. Die Vernachlässigung endlich vieler Summanden findet sich beispielsweise auch in [Cur88]. Dort werden die Beiträge der zu endlich vielen instabilen Eigenwerten endlicher Ordnung gehörenden Eigenräume zu einer unendlichen Reihe vernachlässigt. Aus diesem Ergebnis lässt sich schließen, dass die Definition des Raums $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ im Fall des Beispielsystems der Definition des Interpolationsraums $\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}$ entspricht.

Die Verwendung der Interpolationsräume erlaubt es, die Unbeschränktheit von B zu quantifizieren. Im Sinne von [RW00] (S. 218) ist der Grad der Unbeschränktheit von B durch das Infimum über alle $\alpha \geq 0$ gegeben für die $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X}_{-\alpha})$. An dieser Stelle wird aus (2.136) ersichtlich, dass die Reihe auf Basis der Folge $\{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-2\alpha} |b_i^*|^2\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ auch für kleinere als das gewählte α konvergiert. Daher ist der Grad der Unbeschränktheit geringer als $\frac{1}{2}$.

Entsprechend der Ausführungen zur analytischen Systemklasse in [Sas02] (S. 26) ergibt sich an dieser Stelle aus $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X}_{-\frac{1}{2}})$ der Zusammenhang $A^{-\alpha} B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$.

Abschließende Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse

Dieser Abschnitt dient abschließend der vollständigen Formulierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse. In den vorangehenden Abschnitten werden die Räume $\mathcal{W} = \mathcal{H}_\gamma$ und

$\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ durch die Wahl

$$\gamma_i = 1 \quad \text{und} \quad \beta_i = |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1}, \quad \forall i \in \mathbb{I}^+ \quad (2.151)$$

in (2.133) und (2.143) festgelegt. Aufgrund dieser Wahl ist

$$\gamma_i = \beta_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|, \quad \forall i \in \mathbb{I}^+ \quad (2.152)$$

und es resultiert eine Raumskala der Form

$$\mathcal{V}' \underset{\mathcal{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{W} = \mathcal{X} \underset{\mathcal{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{V}. \quad (2.153)$$

Vergleiche dazu auch [Cur88] (S. 27). Zudem folgt mit (2.151) die Beschränktheit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ beziehungsweise $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ und Zulässigkeit des Eingangs- und des Ausgangsoperators im Sinne von Definition 8.

Für das Beispielsystem steht damit eine Formulierung zu Verfügung, sodass die Bedingungen **DPSC1**-**DPSC3** aus Definition 7 erfüllt sind. Damit ist das Beispielsystem in der Pritchard-Salamon-Klasse sinnvoll formuliert. Aus dieser Zugehörigkeit resultiert unmittelbar die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Beispielsystems in dem in Abschnitt 2.3.2 beschriebenen Maße.

Da die Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ des Systemoperators des Beispielsystems eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden, lässt sich (B.81) aus Satz 53 entnehmen, dass

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^2 |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\}. \quad (2.154)$$

Aus der Definition von $\mathcal{D}(A)$ folgt, dass $\mathcal{D}(A)$ dem Interpolationsraum \mathcal{H}_1 (Abschnitt B.9.3) entspricht, und somit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_1$ gilt. Für den Systemoperator des Beispielsystems A existiert eine Erweiterung auf \mathcal{V} , benannt durch $A^\mathcal{V}$. $A^\mathcal{V}$ ist der infinitesimale Erzeuger der stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_{\Phi^\mathcal{V}} = \{\Phi^\mathcal{V}(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf \mathcal{V} . Im Fall des Beispielsystems ist

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{-1} |\lambda_i|^2 |\langle x, w_i \rangle|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i| |\langle x, w_i \rangle|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\operatorname{Re}(\lambda_i)| |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad (2.155)$$

für fast alle $i \in \mathbb{I}^+$. Der Argumentation des vorangehenden Abschnitts folgend, lässt sich daher der Definitionsbereich von $A^\mathcal{V}$ mittels

$$\mathcal{D}(A^\mathcal{V}) = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i| |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (2.156)$$

definieren und es gilt $\mathcal{D}(A^\mathcal{V}) = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$. Dabei entspricht $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ dem Dualraum zu $\mathcal{V} = \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}$ (Abschnitt B.9.3). Da $\mathcal{W} = \mathcal{X}$ und die Elemente des Zustandsraums durch $x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i$ mit

$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty$ gekennzeichnet sind, folgt

$$\mathcal{D}(A^\mathcal{V}) \underset{\mathcal{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{W}. \quad (2.157)$$

Damit ist das Beispielsystem ein reguläres beziehungsweise glattes („smooth“) Pritchard-Salamon-System. Demnach gilt (2.114) und die Wachstumsgrenzen der Halbgruppen \mathcal{T}_{Φ^w} und \mathcal{T}_{Φ^v} stimmen für das Beispielsystem miteinander überein. Ausgehend von den Ordnungen aus (2.131), (2.142) und Tabelle 2.2 gilt für das Beispielsystem ferner

$$\frac{|c_i^*| |b_i^*|}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{\frac{1}{2}}} \in \begin{cases} \mathcal{O}(i^{-5}), i \in \tilde{\mathbb{I}}^+ \\ \mathcal{O}(i^{-3}), i \in \mathbb{I}^-. \end{cases} \quad (2.158)$$

Damit erfüllt das Beispielsystem die Gleichung (2.21) des Lemmas 2.4. aus [Cur88] (S. 26). Aufgrund von (2.158) hält das Beispielsystem außerdem Bedingung (C.86) ein, folglich ist der Hankel-Operator des Beispielsystems Hilbert-Schmidt und damit auch kompakt. Die Kompaktheit des Hankel-Operators des Beispielsystems folgt allerdings auch aus Satz 65.

Das exponentiell stabile Beispielsystem erfüllt mit der Wahl $\alpha_i = c_i^* b_i^{*T} = c_i^* b_i^*, i \in \mathbb{I}^+$ und $\beta_i = \lambda_i, i \in \mathbb{I}^+$ die Bedingungen aus Satz 66. Mit $|c_i^* b_i^*| = |c_i^*| |b_i^*|$ gilt

$$\frac{|c_i^*| |b_i^*|}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} \in \begin{cases} \mathcal{O}(i^{-7}), i \in \tilde{\mathbb{I}}^+ \\ \mathcal{O}(i^{-3}), i \in \mathbb{I}^-. \end{cases} \quad (2.159)$$

Aufgrund der voranstehenden Ordnungen wird (C.88) eingehalten und der Hankel-Operator des Beispielsystems ist nuklear.

2.3.4 Übertragungsverhalten des Beispielsystems

Der vorliegende Abschnitt dient der Einführung verschiedener Formulierungen des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems. Im ersten Ansatz wird, ausgehend von der starken Bewegungsgleichung des Beispielsystems, ein inhomogenes Randwertproblem definiert und durch dessen Lösung eine geschlossene Formulierung der Übertragungsfunktion des trimorphen Biegewandlers erzeugt [CW92; CM09]. Die geschlossene, exakte Formulierung des gesuchten Ein-/Ausgangsverhaltens eignet sich insbesondere zu Vergleichszwecken und zur Analyse der Abweichung, die ein approximiertes, endlich-dimensionales Modell zum exakten Modell aufweist.

In einem zweiten Schritt erfolgt die Verknüpfung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems mit den Operatoren der Zustandsraumdarstellung dieses Systems. Die fallspezifische Umsetzung von (2.119) mündet in einer Reihendarstellung der Übertragungsfunktion des Beispielsystems. Dabei wird in erster Linie die Tatsache ausgenutzt, dass die Eigenvektoren des Beispielsystems eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden. Eine derartige Reihendarstellung entspricht einer modalen Darstellung des Übertragungsverhaltens und eignet sich auf natürliche Weise zur Erstellung approximierter endlich-dimensionaler Beschreibungen des Übertragungsverhaltens. Die auf diese Weise entstehenden endlich-dimensionalen Approximationen des unendlich-dimensionalen Modells weisen bis zu ihrer Ordnung exakt die Pole des unendlich-dimensionalen Modells auf. Bei den enthaltenen Nullstellen handelt es sich allerdings lediglich um Näherungen. Aus diesem Grund wird abschließend eine Produktentwicklung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems eingeführt.

Die Produktentwicklung enthält selbst im Falle einer endlich-dimensionalen Approximation des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems bis zur verwendeten Ordnung der Approximation die exakten Nullstellen des unendlich-dimensionalen Systems. Abschließend erfolgt die Parametrierung der mathematischen Modelle des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems unter Zuhilfenahme der am realen Beispielsystem gemessenen Frequenzgänge.

Geschlossene Lösung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems

Das Vorgehen zur Bestimmung der geschlossenen Formulierung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems beruht im Wesentlichen auf der Lösung eines inhomogenen Randwertproblems, das sich durch die Anwendung der Laplace-Transformation hinsichtlich der zeitlichen Unabhängigen auf die Bewegungsgleichung des Systems ergibt. Die Herleitung der gesuchten Übertragungsfunktion wird detailliert in Abschnitt C.5 ausgeführt. In Abhängigkeit vom Ort der Messung und der komplexen Variable s ist die geschlossene Lösung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems $G(s) = \frac{w(v_{\text{Mess}}, s)}{V_{\text{pk}}(s)}$ durch Gleichung (C.112) gegeben.

Insbesondere die Annahme einer Messung der Auslenkung des trimorphen Biegewandlers am rechten Rand des örtlichen Gebiets $v_{\text{Mess}} = v^r = L$ führt ausgehend von (C.112) auf ein vergleichsweise übersichtliches Übertragungsverhalten des Beispielsystems, beschrieben durch Gleichung (C.113).

Reihendarstellung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems

Falls die Eigenvektoren des Systemoperators $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eines regulären Pritchard-Salamon-Systems eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden, lässt sich eine dem System zugeordnete Übertragungsfunktion unmittelbar auf Basis einer Reihendarstellung angeben. Die Resolvente des Systemoperators lässt sich dann gemäß (B.83) aus Satz 53 ausdrücken. Der Nachweis, dass die Eigenvektoren des Systemoperators des Beispielsystems $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ dieser Voraussetzung genügen, wird in Abschnitt 3.1.3 gezeigt. Die Übertragungsfunktion des Beispielsystems stimmt formal mit (2.44) aus Abschnitt 2.1.3 überein. Da für das Beispielsystem $\mathcal{D}(A) \xrightarrow[\text{d}]{\hookrightarrow} \mathcal{W} = \mathcal{X} \xrightarrow[\text{d}]{\hookrightarrow} \mathcal{V}$ und (2.120) gilt, ist die gesuchte Reihendarstellung durch

$$y(s) = G(s)u(s) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{c_i^* b_i^*}{s + \lambda_i} u(s) \quad (2.160)$$

gegeben, wobei die $b_i^*, \forall i \in \mathbb{I}^+$ durch (2.128) und die $c_i^*, \forall i \in \mathbb{I}^+$ durch (2.140) beschrieben werden. (2.160) gibt unter Einbeziehung aller $i \in \mathbb{I}^+$ exakt das Ein-/Ausgangsverhalten wieder und ist damit äquivalent zu der im vorangehenden Abschnitt vorgestellten geschlossenen Lösung des Ein-/Ausgangsverhaltens. Die Abhängigkeit vom Ort der Messung ist im Fall der Reihendarstellung in den Entwicklungskoeffizienten des Ausgangsoperators enthalten. Die Darstellung des Übertragungsverhaltens mittels einer Reihe (2.160) entspricht der bekannten modalen Darstellung des Übertragungsverhaltens endlich-dimensionaler System und eignet sich auf natürliche Weise für eine endlich-dimensionale Approximation des dynamischen Verhaltens zugrunde liegender Systeme.

Aus (2.160) lässt sich erkennen, dass die im Fall der Berücksichtigung einer lediglich endlichen Anzahl von Summanden im Nenner auftretenden Singularitäten eine echte Untermenge der Singularitäten des Nenners im Falle unendlich vieler Summanden $i \in \mathbb{I}^+$ sind. Daraus folgt unmittelbar, dass die Singularitäten des Nenners einer Übertragungsfunktion auf Basis einer endlichen Approximation von (2.160) eine Untermenge der Singularitäten von (2.160) für $i \in \mathbb{I}^+$ sind. Die Singularitäten des Zählers einer derartigen endlich-dimensionalen Approximation entsprechen dagegen nicht exakt den Singularitäten der durch (2.160) unter Einbeziehung von $i \in \mathbb{I}^+$ definierten exakten Übertragungsfunktion.

Produktentwicklung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems

Die bisher vorgestellten Darstellungsformen unendlich-dimensionaler Systeme im Frequenzbereich ermöglichen keine einfache Bestimmung der im Übertragungsverhalten derartiger Systeme auftretenden Nullstellen. Diese Einschränkung wird bezüglich des Beispielsystems durch die folgende Produktentwicklung der zugehörigen transzendenten Übertragungsfunktion aus Gleichung (C.113) aufgehoben. Mathematisch stützt sich die angestrebte Produktentwicklung auf den Weierstraßschen Produktsatz ([Jä04; RS07]). Eine umfassende Betrachtung im Kontext des Übertragungsverhaltens unendlich-dimensionaler Systeme zusammen mit relevanten Eigenschaften findet sich in [Goo70]. Darüber hinaus enthalten [Len+89] und [Len+91] Anwendungen der Produktentwicklung im Bereich der robusten Regelung elastischer Balken und stehen damit im engen Zusammenhang mit der Anwendung dieser Darstellungsvariante auf das Beispielsystem. Gleiches gilt für [HSW92], wobei letztere Arbeit darüber hinaus eine Fehlerabschätzung für den Fall eines Abbruchs der Produktentwicklung nach einer endlichen Anzahl von Faktoren beinhaltet. Den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen bildet (C.113). Damit beschränken sich die Ausführungen auf den Fall, in dem der Ort der Messung mit dem rechten Rand des trimorphen Biegewandlers übereinstimmt. Für den transzendenten Ausdruck des Zählers der Übertragungsfunktion gilt

$$\sin(k) \sinh(k) = k^2 \prod_{i \in \mathbb{I}^+} \left(1 - \frac{k^4}{i^4 \pi^4} \right) \quad (2.161)$$

mit $k = L \left(-\frac{s(s+\alpha_V)}{\alpha_S + \alpha_{KV}s} \right)^{\frac{1}{4}}$ aus (C.91). Gleichzeitig ergibt sich für den transzendenten Ausdruck des Nenners der Übertragungsfunktion gemäß [Goo70]

$$1 + \cos(k) \cosh(k) = 2 \prod_{i \in \mathbb{I}^+} \left(1 - \frac{k^4}{k_{|i|}^4} \right). \quad (2.162)$$

Die Bestimmung der $k_{|i|}$, $i \in \mathbb{I}^+$ ist in Abschnitt D.1.1 zu finden. Die Konstruktion der Produktentwicklung einer transzendenten Funktion nach [Goo70] weist auf eine der an dieser Stelle wichtigsten Eigenschaften der Produktentwicklung hin, nämlich die Erhaltung der Nullstellen dargestellter Funktionen. Selbst im Falle eines Abbruchs der unendlichen Produkte in (2.161) oder (2.162) nach einer endlichen Anzahl von Faktoren, bilden die auftretenden Singularitäten eine Untermenge der

Singularitäten der Produktentwicklung im Falle $i \in \mathbb{I}^+$. Darüber hinaus stimmt die stationäre Verstärkung einer auf Basis einer Produktentwicklung gewonnenen Approximation eines unendlich-dimensionalen Systems stets mit der tatsächlichen stationären Verstärkung des betreffenden Systems überein. Unter Berücksichtigung von $\left(\frac{k}{L}\right)^4 = \kappa_s^4$ entsprechend Gleichung (C.91) kann die Übertragungsfunktion des Beispielsystems somit durch eine Produktentwicklung der Form

$$\begin{aligned} \frac{w(L, s)}{V_{\text{pk}}(s)} &= - \left(\frac{k}{L}\right)^{-2} \frac{\alpha_{\text{In}}}{\alpha_S + 2\alpha_{\text{KV}}s} \frac{\sin(k) \sinh(k)}{1 + \cos(k) \cosh(k)} \\ &= - \frac{\alpha_{\text{In}} L^2}{2(\alpha_S + 2\alpha_{\text{KV}}s)} \frac{\prod_{i \in \mathbb{I}^+} \left(1 + \frac{(s^2 + 2\alpha_V s)L^4}{(\alpha_S + 2\alpha_{\text{KV}}s)(i^4 \pi^4)}\right)}{\prod_{i \in \mathbb{I}^+} \left(1 + \frac{(s^2 + 2\alpha_V s)L^4}{(\alpha_S + 2\alpha_{\text{KV}}s)k_{|i|}^4}\right)} \end{aligned} \quad (2.163)$$

beschrieben werden. Mit (2.163) steht die Möglichkeit zur Verfügung, in Abhängigkeit von den Systemparametern beliebig viele der Nullstellen der Übertragungsfunktion des Beispielsystems auf einfache Weise exakt zu berechnen. Ferner kann ebenfalls anhand von (2.163) eine Bestimmung der Pole des besagten Übertragungsverhalten in Abhängigkeit von den Systemparametern sowie $k_{|i|}^4$ erfolgen.

Parametrierung der Übertragungsfunktion des Beispielsystems

Die Übertragungsfunktion des Beispielsystems $G(s)$ wird im Folgenden in einer Darstellung entsprechend (C.112) angenommen. Eine vollständige Festlegung von $G(s)$ erfordert damit die Bestimmung der Werte für $\alpha_{\text{In}}, \alpha_S, \alpha_{\text{KV}}, \alpha_V, L$ und v_{Mess} . Die Parametrierung der Übertragungsfunktion beruht auf Messungen des Frequenzgangs des in einen Versuchsstand integrierten trimorphen Biegewandlers. Die durchgeführten Messungen enthalten neben dem Übertragungsverhalten des realen Biegewandlers auch das Übertragungsverhalten der zur Messung eingesetzten Peripherie.

Der in Abb. 2.1 dargestellte gemessene Frequenzgang \hat{G}_{Mess} weist Charakteristika einer Totzeit von etwa 0,5 ms auf, die im Folgenden vollständig der Peripherie und speziell der Meßeinrichtung zugeschrieben wird, d.h. der Frequenzgang des eigentlichen Biegewandlers wird als frei von Totzeiten angenommen. Diesem Gedanken folgend wird der gemessene Frequenzgang des Biegewandlers zu

$$G_{\text{Mess}}(i\omega) = e^{0,0005 \cdot i\omega} \hat{G}_{\text{Mess}}(i\omega) \quad (2.164)$$

definiert. Ausgehend von $G_{\text{Mess}}(i\omega)$ erfolgt die Anpassung von $G(i\omega)$ durch die optimierungsba-sierte Festlegung der Koeffizienten $\alpha_V, \alpha_S, \alpha_{\text{KV}}, \alpha_{\text{In}}$. Während $\alpha_V, \alpha_S, \alpha_{\text{KV}}$ direkt optimiert werden, erfolgt die Bestimmung von α_{In} indirekt durch eine Anpassung der stationären Verstärkung K_0 von $G(i\omega)$. Die zur Bestimmung der Parameter des Biegebalkens ausgewählte Übertragungsfunktion erlaubt eine Festlegung des Ortes der Messung. Um eine möglichst exakte Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Amplitudenverläufe zu erreichen, werden ferner die Länge L des Biegewandlers und der Ort der Messung v_{Mess} als Optimierungsvariablen eingeführt. Jede der sechs Optimierungsgrößen wird als beschränkt innerhalb eines kompakten Intervalls der reellen Zahlen

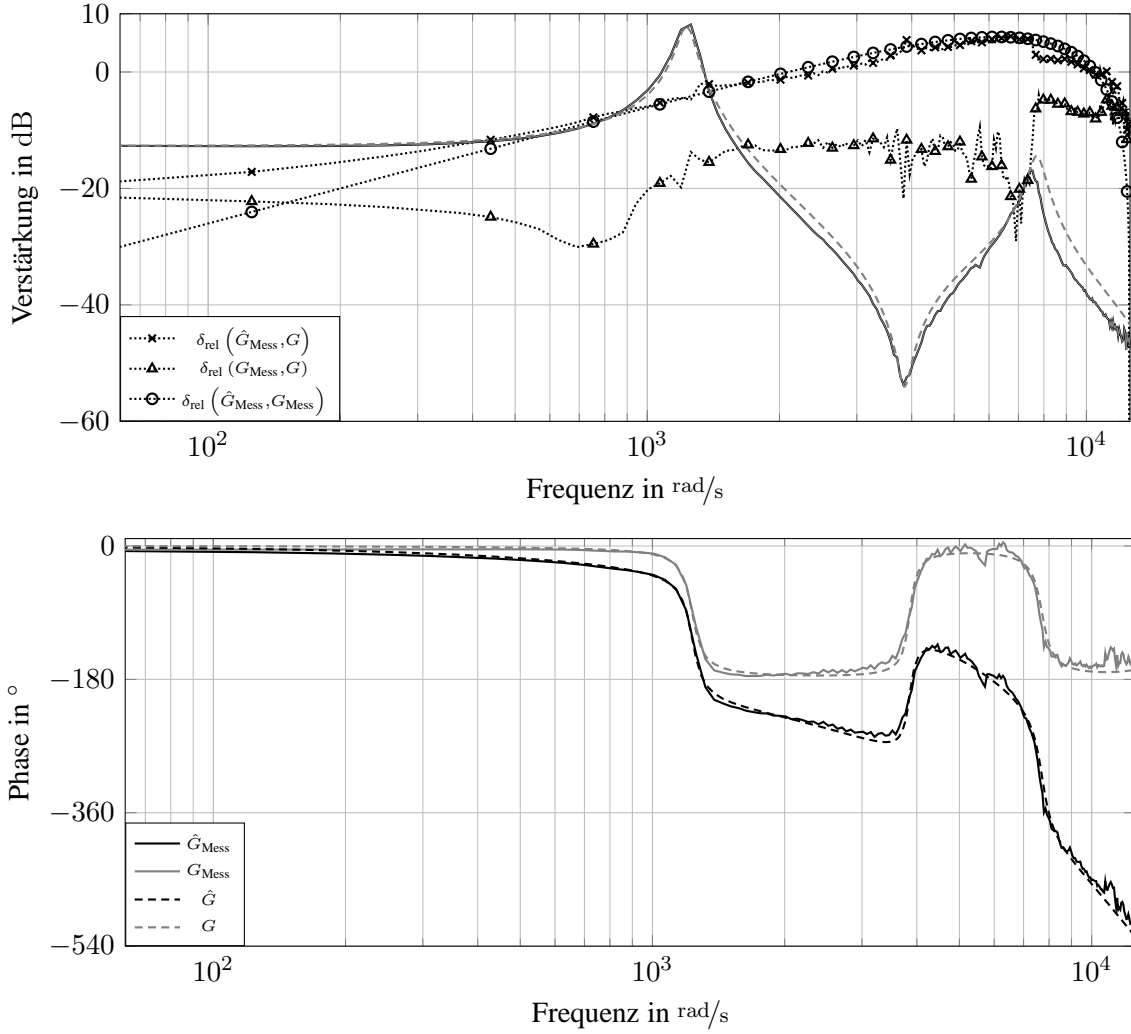


Abbildung 2.1: Bodediagramme der Übertragungsfunktionen $\hat{G}_{\text{Mess}}, G_{\text{Mess}}, \hat{G}$ und G sowie relative Abstände $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}(i\omega_i), G(i\omega_i))$, $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}(i\omega_i), G(i\omega_i))$ und $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G_{\text{Mess}})$.

angenommen, wobei die beiden letztgenannten Größen lediglich in einem kleinen Bereich um den nominellen Wert variiert werden. Zudem gilt $v_{\text{Mess}} \leq L$. Der Vektor der Optimierungsvariablen lautet $z_{\text{opt}} = \{\alpha_V, \alpha_S, \alpha_{KV}, K_0, L, v_{\text{Mess}}\}$ mit $z_{\text{opt}} \in Z_{\text{zul}} \subset \mathbb{R}^6$.

Das zur Parametrierung der Übertragungsfunktion $G(s)$ formulierte Optimierungsproblem lautet

$$\min_{z_{\text{opt}} \in Z_{\text{zul}}} \max_{\omega_i} \left| \frac{G_{\text{Mess}}(i\omega_i) - G(i\omega_i)}{G(i\omega_i)} \right|, i = 1, \dots, m. \quad (2.165)$$

$$\text{u.B.v. } g_j(z_{\text{opt}}) \leq 0, j = 1, \dots, 12. \quad (2.166)$$

Das verwendete Zielfunktional minimiert den maximalen relativen Abstand zwischen den Frequenzgängen von Modell und Messung über alle diskreten Frequenzen $\{\omega_i\}, i = 1, \dots, m$. Die Diskretisierung des Frequenzintervalls resultiert aus der Messung des realen Übertragungsverhaltens an den diskreten Frequenzen $\{\omega_i\}, i = 1, \dots, m$, wobei $m < \infty$ der Anzahl der Messpunkte

entspricht. Die Festlegung des Zielfunktional der Optimierung in (2.165) orientiert sich an der Formulierung einer Modellschar unter Verwendung multiplikativer Modellunsicherheiten in Abschnitt 4.3.4. Die innerhalb des Zielfunktional auftretende Betragsbildung ist für den Fall eines identisch zu Null werdenden Arguments nicht stetig differenzierbar. Auf eine weiterführende Betrachtung des mathematischen Hintergrunds des zur Systemidentifikation formulierten Optimierungsproblems wird an dieser Stelle verzichtet.

Die Ungleichungsnebenbedingungen des Optimierungsproblems (2.166) dienen der Beschränkung jeder einzelnen Optimierungsvariable aus z_{opt} auf ein jeweils kompaktes Intervall, sowie der Einhaltung von $v_{\text{Mess}} \leq L$. Eine sinnvolle Wahl des zulässigen Bereichs der Optimierungsvariablen lässt sich aus dem Datenblatt des Biegewandlers [Arg06] konstruieren. Ein aus der Lösung des Optimierungsproblems resultierender Parametersatz findet sich in Tabelle 2.3. Da grundsätzlich weder $G(s)$ noch zugehörige Approximationen mit dem realen Übertragungsverhalten des Beispielsystems exakt übereinstimmen, werden die Resultate der Optimierung gerundet. Die in Tabelle 2.3 aufgeführten Parameter lassen sich zur Parametrierung der Übertragungsfunktion in allen aufgeführten Darstellungsformen einsetzen.

Die analytische Bestimmung der Singularitäten der Übertragungsfunktion des Modells des Beispielsystems $G(s)$ zeigt, dass $G(s)$ in der rechten s-Halbebene weder Pole noch Nullstellen aufweist. An dieser Stelle wird daher ohne weiteren Beweis vorausgesetzt, dass $G(s)$ Theorem F.2 aus [CM09] (S. 1115) erfüllt und damit minimalphasig ist. Insbesondere wird damit auch der endliche relative Grad von $G(s)$ angenommen. In Folge der Minimalphasigkeit von $G(s)$ lässt sich das Übertragungsverhalten von $G(s)$ aus der Amplitudenverstärkung $V_G(s)$ eindeutig rekonstruieren. Für das vorliegende Eingrößensystem stimmt zudem die Amplitudenverstärkung an jeder diskreten Frequenz mit dem Singulärwert von $G(s)$ an der entsprechenden Frequenz überein.

Abb. 2.1 zeigt die aus einer Messung stammenden Bodediagramme zu $\hat{G}_{\text{Mess}}(i\omega)$ und $G_{\text{Mess}}(i\omega)$ sowie die aus der ermittelten Parametrierung resultierenden Frequenzgänge von $\hat{G}(i\omega)$ und $G(i\omega)$. Ferner enthält Abb. 2.1 eine Darstellung der relativen Abweichungen

$$\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G)(i\omega) \quad \text{und} \quad \delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G)(i\omega), \quad (2.167)$$

mit $\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_M\}$. Wobei die relative Abweichung zwischen zwei Übertragungsfunktionen durch

$$\delta_{\text{rel}}(G_1, G_2)(i\omega) = \left| \frac{G_1(i\omega) - G_2(i\omega)}{G_2(i\omega)} \right|, \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (2.168)$$

definiert ist. In Hinblick auf die spätere Unsicherheitsbeschreibung im Reglerentwurfsproblem wird an dieser Stelle auf eine zusätzliche Darstellung der absoluten Abweichung zwischen den betrachteten Übertragungsfunktionen verzichtet.

Der Frequenzgang des realen Biegewandlers wurde mittels Messungen auf einem Frequenzintervall von $10 \cdot 2\pi \text{ rad/s}$ bis $2000 \cdot 2\pi \text{ rad/s}$ erfasst. Dabei fand eine äquidistante Diskretisierung des Messintervalls mit einem Abstand von jeweils $10 \cdot 2\pi \text{ rad/s}$ zwischen zwei Messpunkten Verwendung.

α_V	α_{KV}	α_S	L	v_{Mess}
45,79	0,0000024	0,51	0,0454	0,0432

Tabelle 2.3: Optimierungsbasiert ermittelte Parameter der Übertragungsfunktion des Beispielsystems.

Die Berechnung der Frequenzgänge von $G(i\omega)$ und $\hat{G}(i\omega)$ beruht nicht auf den gleichen diskreten Frequenzen, die der Messung des Frequenzganges $G_{\text{Mess}}(i\omega)$ zugrunde liegen. Die Änderung der Diskretisierung des Frequenzintervalls erlaubt eine verbesserte Darstellung der Extremalstellen von $G(s)$ und $\hat{G}(s)$. Die kontinuierliche Darstellung aller Übertragungsfunktionen und der ausgewählten Abweichungen basiert auf dem gewählten Interpolationsalgorithmus des zur Darstellung verwendeten Latex-Package PGFPlots.

Wie sich gleichermaßen dem Verlauf von G_{Mess} oder \hat{G}_{Mess} in Abb. 2.1 entnehmen lässt, wurde im Rahmen der Messungen neben den ersten beiden Eigenfrequenzen des realen Biegewandlers bei etwa 1230 rad/s beziehungsweise bei etwa 7670 rad/s auch der Einfluss des ersten Nullstellen-Paares bei ca. 3830 rad/s erfasst. Die relative Abweichung $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G)$ liegt im Frequenzbereich unterhalb der ersten Eigenfrequenz von G unterhalb von -20 dB . Zwischen der ersten und der zweiten Eigenfrequenz von G verläuft $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G)$ zwischen -20 dB und -10 dB . Im Bereich der zweiten Eigenfrequenz von G erreicht die relative Abweichung mit einem Wert von ca. -4 dB ihr Maximum im dargestellten Frequenzintervall. Damit weist die relative Abweichung im gesamten dargestellten Frequenzintervall einen Wert von unter -4 dB auf. Die relative Abweichung $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G)$ weist am linken Rand des betrachteten Frequenzintervalls einen Wert von etwa $-18,75 \text{ dB}$ auf. $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G)$ übersteigt bei ungefähr 2575 rad/s die 0 dB und erreicht den Maximalwert von 7 dB bei 7410 rad/s . Im gesamten betrachteten Frequenzbereich liegt $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G)$ oberhalb von $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G)$.

Abschließend lässt sich feststellen, dass der Frequenzgang von G im gewählten Frequenzintervall eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Frequenzgang G_{Mess} aufweist. Die Übereinstimmung der Frequenzgänge von G und \hat{G}_{Mess} ist aufgrund der Vernachlässigung der Totzeit in G erwartungsgemäß schlechter.

Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems zeigen die Abbildungen 2.2a beziehungsweise 2.2b die Verstärkung der Übertragungsfunktion G beziehungsweise G_{Mess} in Abhängigkeit von der Frequenz und dem Messort. Zur Bestimmung der Verstärkung von G wird Gleichung (C.112) aus Abschnitt C.5 mit einer Parametrierung gemäß Tabelle 2.3 verwendet. Dabei ist der Messort v_{Mess} allerdings nicht durch Tabelle 2.3 bestimmt, sondern variabel.

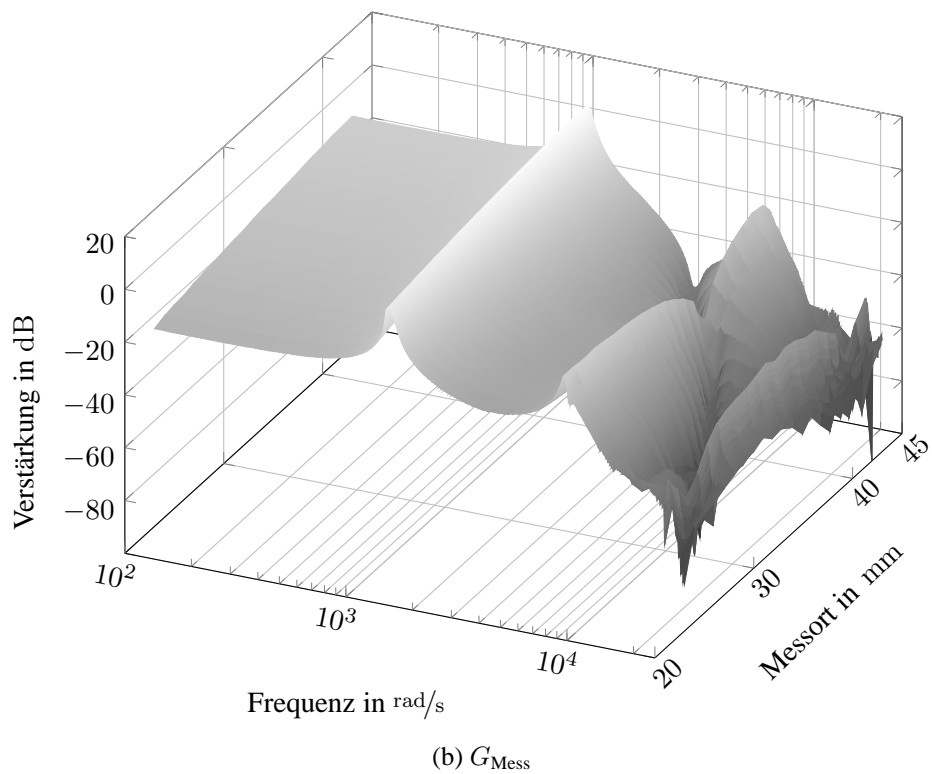
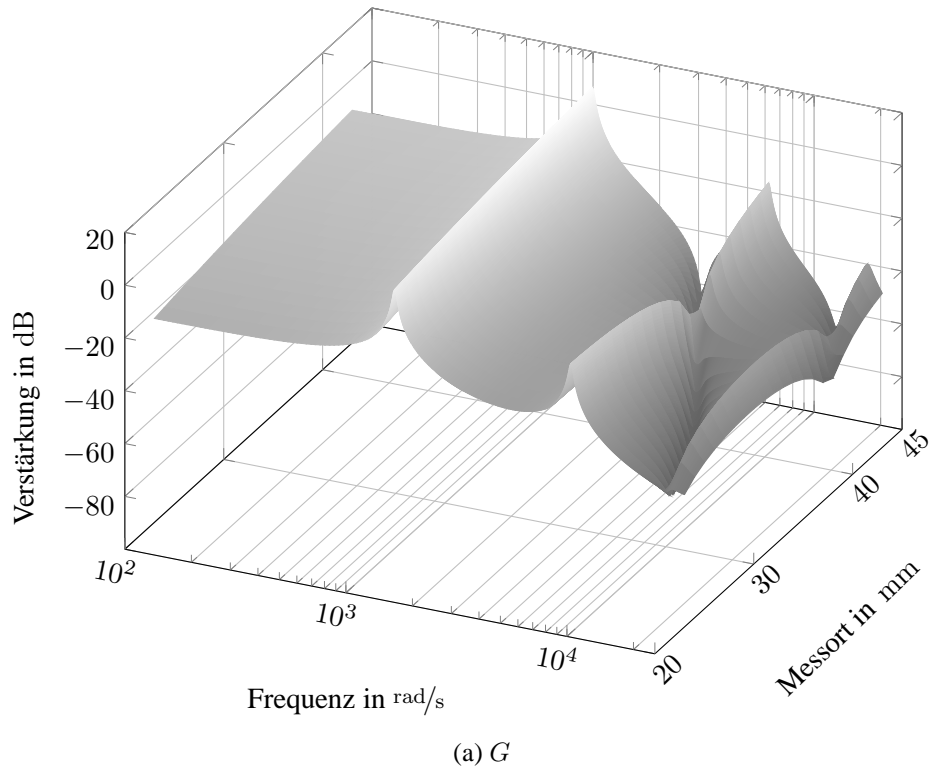


Abbildung 2.2: Verstärkung der Übertragungsfunktionen von G und G_{Mess} in Abhängigkeit von der Frequenz und dem Messort.

3 Systemanalyse

Das vorliegende Kapitel umfasst eine Einführung verschiedener zur Analyse des Beispielsystems angewandter mathematischer Konzepte. Dabei werden vorrangig die im Sinne der Regelungstechnik essentiellen Konzepte mit einem auf das Beispielsystem beschränkten Umfang betrachtet. Insbesondere gilt es, die zur Stabilitätsanalyse erforderlichen Definitionen und Kriterien einzuführen. Darüber hinaus werden die ebenfalls bedeutsamen Fragestellungen der Steuer- und Beobachtbarkeit sowie der Stabilisier- und Detektierbarkeit beleuchtet. Aus dem Bereich der Systemtheorie endlich-dimensionaler Systeme ist die Bedeutung modaler Konzepte zur Definition, aber auch zum einfachen Nachweis der voranstehend genannten Systemeigenschaften wohlbekannt. Da im Gegensatz zur Systemmatrix endlich-dimensionaler Systeme das Spektrum eines Systemoperators eines unendlich-dimensionalen Systems im Allgemeinen nicht ausschließlich aus Eigenwerten besteht, sondern vielmehr aus verschiedenen Teilmengen (Anhang B.7.2), erfordert die geschlossene Behandlung von Systemeigenschaften allgemeiner unendlich-dimensionaler Systeme mitunter einen nicht unerheblichen mathematischen Aufwand. Die Herstellung klarer Analogien zu den modalen Betrachtungen im Endlich-dimensionalen ist dabei nur für gewisse Klassen von Systemoperatoren möglich.

Einführend wird in 3.1 daher der Nachweis erbracht, dass der Systemoperator des Beispielsystems diagonalisierbar ist und damit einer vergleichsweise großen Klasse derartiger Operatoren angehört. Die Definition und relevante Eigenschaften diagonalisierbarer Operatoren finden sich ergänzend in Abschnitt B.8. Die zum Nachweis der Diagonalisierbarkeit des Systemoperators erforderliche Lösung des Eigenwertproblems des Systemoperators findet sich in diesem Abschnitt, während das detaillierte Vorgehen zur Lösung dieses und auch verschiedener eng verbundener Eigenwertprobleme in Abschnitt D.1 gezeigt wird.

Als Basis für die anschließende Stabilitätsanalyse erfolgt in 3.2 zunächst die Definition verschiedener Stabilitätsbegriffe für stark stetige Halbgruppen und die von ihnen beschriebenen Systeme. Da der im Endlich-dimensionalen wohlbekannte Zusammenhang zwischen dem Spektrum einer Systemmatrix und der Stabilität des zugeordneten Systems im Unendlich-dimensionalen im Allgemeinen nicht hergestellt werden kann, wird eine Charakterisierung einiger Fälle vorgenommen, in denen die Wachstumsgrenze einer stark stetigen Halbgruppe mit der Spektralschranke des zugehörigen infinitesimalen Erzeugers übereinstimmt. Um für das Beispielsystem den Einhalt der „Spectrum-determined growth assumption“ zu demonstrieren, reicht der Nachweis, dass der diagonalisierbare Systemoperator eine stark stetige Halbgruppe auf dem Zustandsraum erzeugt. Als Konsequenz aus diesem Nachweis lässt sich die exponentielle Stabilität des Beispielsystems allein aus der Lage der Eigenwerte des Systemoperators folgern. Eingebettet in den Beweis, dass Untermengen der diagonalisierbaren Operatoren differenzierbare bzw. analytische Halbgruppen auf einem zugrunde liegenden Raum erzeugen, erfolgt darüber hinaus eine weiterführende Klassifizierung der stark stetigen Halbgruppe des Beispielsystems.

Die Betrachtungen hinsichtlich der Steuerbarkeit des Beispielsystems werden in Abschnitt 3.3 durch die Definition verschiedener Steuerbarkeitsbegriffe für unendlich-dimensionale Systeme eingeleitet. Während die eingeführten Definitionen der Steuerbarkeit für allgemeine Paare aus einem Systemoperator und einem zulässigen Eingangoperator Gültigkeit besitzen, schränken sich die anschließend aufgeführten Kriterien für die Steuerbarkeit auf diagonalisierbare Systemoperatoren und endlich- beziehungsweise ein-dimensionale Eingangsräume ein. Die Anwendung der Kriterien zur Steuerbarkeit auf das Beispielsystem zeigt abschließend den Mangel an exakter Steuerbarkeit für das Beispielsystem sowie dessen approximative Steuerbarkeit. Abschließend wird in Abschnitt 3.3 die exponentielle Stabilisierbarkeit und die exponentielle Detektierbarkeit des Beispielsystems gezeigt und aus dem Vorhandensein dieser Struktureigenschaften resultierende relevante Eigenschaften des Beispielsystems benannt.

3.1 Spektralanalyse und -zerlegung

Die Betrachtungen zur Spektralanalyse des Beispielsystems werden mit der Einführung des adjungierten Systemoperators eingeleitet. Daran schließt sich eine Darstellung der detailliert in Abschnitt D.1.1 hergeleiteten Lösung des Eigenwertproblems des Systemoperators des Beispielsystems an. Die dabei ermittelten Eigenwerte werden nachfolgend hinsichtlich ihrer Lage in der komplexen Ebene und ihres asymptotischen Verhaltens analysiert. Für die Eigenvektoren wird dann auf Basis aus der Literatur bekannter Kriterien der Nachweis erbracht, dass diese eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden und dass der Systemoperator des Beispielsystems als diagonalisierbar klassifiziert werden kann.

3.1.1 Der adjungierte Systemoperator

In Analogie zu endlich-dimensionalen Systemen beinhalten einige Kriterien zur Klassifizierung des Systemoperators eines unendlich-dimensionalen Systems den zum Systemoperator adjungierten Operator. Damit sind unter Kenntnis des Systemoperators und des adjungierten Systemoperators zum Teil weitreichende Aussagen über die Spektraleigenschaften jedes einzelnen der besagten Operatoren möglich. Falls die Eigenvektoren eines Systemoperators eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden, besteht die zugeordnete biorthogonale Menge aus den passend normierten Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators. Dieser Abschnitt beinhaltet die exemplarische Berechnung des adjungierten Systemoperators des Beispielsystems. Die mathematische Definition des adjungierten Operators findet sich in Definition 70. Detaillierte, weiterführende Betrachtungen adjungierter Operatoren finden sich beispielsweise in [Heu92] (S. 327) oder [CZ95] (S. 603).

Bemerkungen zum Grundgedanken des adjungierten Operators

Ausgangspunkt für die Bestimmung des zu einem linearen Operator $T : X \rightarrow Y$ adjungierten Operators T^* bildet die in Definition 70 auftretende Gleichung

$$\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, y^* \rangle_X. \quad (3.1)$$

Die Abbildung $x \mapsto \langle Tx, y \rangle_Y$ kann in Bezug auf $x \in X$ als lineares Funktional interpretiert werden, dessen Bild definitionsgemäß im Körper \mathbb{K} liegt. Gesucht wird das erzeugende Element y^* des linearen Funktional $\langle x, y^* \rangle_X$ im Urbildbereich des linearen Operators T , sodass die beiden Funktionale gemäß (3.1) hinsichtlich des Ergebnisses im Körper übereinstimmen. Das gesuchte Element y^* ist gerade durch den zu T adjungierten Operator T^* mittels $y^* = T^*y$ gegeben.

Im Fall endlich-dimensionaler reeller Vektorräume, ausgestattet mit dem kanonischen Innenprodukt, entspricht der adjungierte Operator zu einem Matrix-Operator gerade der transponierten Matrix. Da die Bestimmung des adjungierten Operators anhand von (3.1) erfolgt, ist seine Abhängigkeit vom verwendeten Innenprodukt direkt ersichtlich. Formal stimmt das Vorgehen zur Bestimmung des adjungierten Operators im Endlich- und Unendlich-dimensionalen sowie unter Einbeziehung unbeschränkter Operatoren überein. Allerdings erfordert eine geeignete Definition des adjungierten Operators im letztgenannten Fall einige zusätzliche mathematische Annahmen, die im Detail in Anhang B.6.1 zu finden sind. Als Beispiel dafür sei hier lediglich die dichte Definition des Operators T genannt, die notwendig für die Eindeutigkeit des zugehörigen adjungierten Operators ist. Im Gegensatz zum Fall eines beschränkten Operators stellt sich bei einem unbeschränkten Operator zusätzlich die Frage nach dem Definitionsbereich des adjungierten Operators. Es besteht die Möglichkeit eines trivialen Definitionsbereichs ([Wei] (S. 99)).

Bestimmung des adjungierten Systemoperators des Beispielsystems

Die Bestimmung des formal adjungierten Operators ([Wei] (S. 96)) zum dicht definierten Systemoperator des Beispielsystems $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ aus (2.79) erfolgt mittels Definition 70. Ausgehend von (3.1) wird im Fall des Beispielsystems auf dem Zustandsraum entsprechend (2.83) das energetische Innenprodukt gemäß (2.82) berücksichtigt. Für die linke Seite der Gleichung $\langle Ax, y \rangle_{\mathcal{X}} = \langle x, A^*y \rangle_{\mathcal{X}}$ folgt nach Einsetzen des Systemoperators und unter Berücksichtigung der Definition des Innenproduktes auf dem Zustandsraum

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ -Sx_1 - Dx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}} = \langle S^{\frac{1}{2}} x_2, S^{\frac{1}{2}} y_1 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle -Sx_1 - Dx_2, y_2 \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (3.2)$$

Aufgrund der Eigenschaften des Steifigkeitsoperators aus Anhang A.3.2 sowie der in Anhang B.9.2 definierten Quadratwurzel des Steifigkeitsoperators gilt $S = S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{2}} = \left(S^{\frac{1}{2}} \right)^*$. Die Selbstadjungiertheit der Quadratwurzel des Steifigkeitsoperators erlaubt das Verschieben von $S^{\frac{1}{2}}$ im Innenprodukt. Zudem ist auch der in Abschnitt A.3.3 in Abhängigkeit vom Steifigkeitsoperator durch

Gleichung (A.68) definierte Dämpfungsoperator selbstadjungiert. Die weitere Ausnutzung der Eigenschaften des Innenproduktes führt unter Vernachlässigung der expliziten Nennung der Räume auf

$$\begin{aligned} \langle S^{\frac{1}{2}}x_2, S^{\frac{1}{2}}y_1 \rangle + \langle -S^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}x_1 - Dx_2, y_2 \rangle &= \langle S^{\frac{1}{2}}x_2, S^{\frac{1}{2}}y_1 \rangle + \langle -S^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}x_1, y_2 \rangle + \langle -Dx_2, y_2 \rangle \\ &= \langle S^{\frac{1}{2}}x_1, -S^{\frac{1}{2}}y_2 \rangle + \langle x_2, Sy_1 - Dy_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Unter Verwendung des Innenproduktes auf dem Zustandsraum folgt der adjungierte Systemoperator zu

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ S & -D \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Der Definitionsbereich des adjungierten Systemoperators ist aus [CZ95] bekannt und stimmt mit dem Definitionsbereich des Systemoperators überein $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$. Mittels des in [TW03b] (S. 921) eingeführten Isomorphismus $J \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$

$$J = J^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

gilt zudem $A = JA^*J$. Weitere interessante Ausführungen zu dieser Transformation und den daraus resultierenden Aussagen zum transformierten System finden sich [TW03a] (S. 25) und [TW03b] (S. 921).

Klassifizierung des Systemoperators mit Hilfe des adjungierten Systemoperators

Die mathematische Beschreibung unendlich-dimensionaler Systeme mittels linearer Operatoren führt des Öfteren auf symmetrische bzw. selbstadjungierte Operatoren. Bekanntes Beispiel dafür ist der Laplace-Operator in Kombination mit geeigneten Randbedingungen, der beispielsweise in der linearen Elastizitätstheorie sowie bei der Modellierung von Diffusionsvorgängen auftritt.

Im Allgemeinen ist der Versuch, einen Systemoperator als selbstadjungiert zu klassifizieren, lohnend, da sich für diese Klasse von Operatoren eine Reihe von Konzepten aus dem Bereich beschränkter Operatoren auf unbeschränkte Operatoren übertragen lässt. Insbesondere leiten sich aus der Selbstadjungiertheit unmittelbar weitreichende Aussagen bezüglich der Spektraleigenschaften ab (Definition 52). Betrachtungen zum Spektralsatz und Spektralmaß selbstadjungierter Operatoren finden sich u.a. in [Wer11] oder [DL90]. Hilfreich ist beispielsweise die Erkenntnis, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Operators rein reell ist. Daraus leitet sich der Schluss ab, dass ein eventuell existierender Eigenwert eines selbstadjungierten Operators stets reell ist. Selbstadjungierte Operatoren lassen sich damit in gewisser Hinsicht als Verallgemeinerung symmetrischer Matrizen im Endlich-dimensionalen auffassen.

Die Symmetrie und darüber hinaus die Selbstadjungiertheit eines linearen Operators definieren sich anhand von Definition 71. Im Falle des Beispielsystems gilt $A \neq A^*$, und damit ist der

Systemoperator des Beispielsystems weder selbstadjungiert noch symmetrisch. Im Gegensatz zum Systemoperator des Beispielsystems kann für den Steifigkeitsoperator S des Beispielsystems, der als elementarer Baustein des Systemoperators angesehen wird, die Selbstadjungiertheit festgestellt werden. Die zugehörigen Betrachtungen finden sich in Anhang A.3.

Da der Systemoperator A nicht mit seinem adjungierten Operator kommutiert $A A^* - A^* A \neq 0$, ist A auch kein normaler Operator. Normale Operatoren bilden eine Übermenge der selbstadjungierten Operatoren, jeder selbstadjungierte Operator ist demnach auch ein normaler Operator. Ausführliche Ausführungen zu den Eigenschaften normaler Operatoren finden sich beispielsweise in [Wei] (S. 176), [Kat95] (S. 276), [NS] und [EN00] (S. 105). Erst die Vernachlässigung der Dämpfung führt im Fall des Beispielsystems auf einen normalen Systemoperator.

Letztendlich bleibt festzuhalten, dass es sich bei dem Systemoperator des Beispielsystems um einen nicht-selbstadjungierten Operator handelt, daher sei an dieser Stelle auf die Einführung in die Theorie dieser Operatoren aus [GK69] verwiesen.

3.1.2 Eigenwertproblem des Systemoperators des Beispielsystems

Im Folgenden werden die Resultate der Lösung des Eigenwertproblems des Systemoperators des Beispielsystems vorgestellt, die detaillierte Herleitung dieser Resultate findet sich in Abschnitt D.1.1. Der vorliegende Abschnitt zeigt einleitend die Resultate der Lösung des Eigenwertproblems des Systemoperators A des Beispielsystems. Daran schließen sich eine Analyse des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte von A sowie eine allgemeine Betrachtung der Lage der Eigenwerte an.

Lösung des Eigenwertproblems

Das dem Eigenwertproblem zugeordnete homogene Randwertproblem lässt sich unter Vernachlässigung des Eingangsterms aus dem inhomogenen Randwertproblem ableiten, welches in Abschnitt C.5 zur Bestimmung der geschlossenen Lösung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems formuliert wird. Die Definition des allgemeinen Eigenwertproblems linearer Operatoren findet sich in Abschnitt B.7.3.

Ausgehend vom allgemeinen Fall (B.79) lautet das Eigenwertproblem des Beispielsystems formal $Av_i = \lambda_i v_i$. Unter Berücksichtigung des Systemoperators und $\mathcal{D}(A) \ni v_i = \begin{pmatrix} v_{i,1} & v_{i,2} \end{pmatrix}^T$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -S & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{I}, \quad (3.6)$$

mit einem Steifigkeitsoperator gemäß (A.58) und einem Dämpfungsoperator entsprechend (A.68). Unter Berücksichtigung der in Abschnitt D.1.4 ermittelten und durch Gleichung (D.41) gegebenen Skalierung ergeben sich die Eigenvektoren beziehungsweise Rechtseigenvektoren des Systemope-

rators des Beispielsystems zu

$$v_i = (\lambda_{S,i} - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{|i|} \\ \lambda_i \tilde{\psi}_{|i|} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{I}. \quad (3.7)$$

Die Eigenwerte des Beispielsystems sind durch

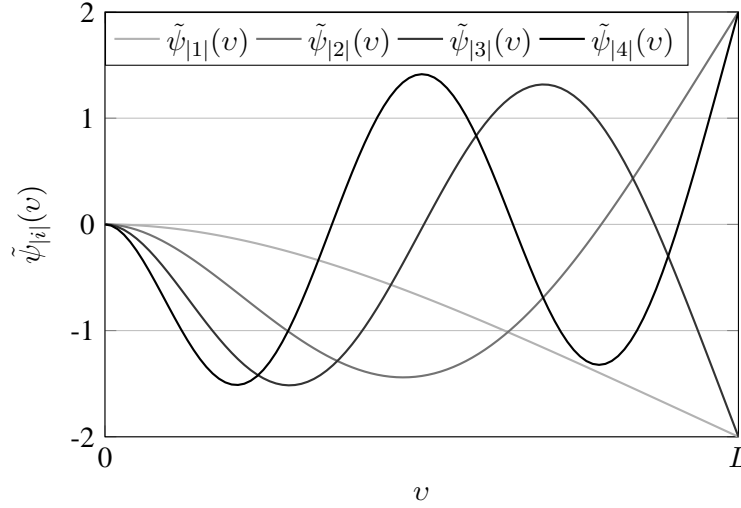


Abbildung 3.1: Darstellung der normierten ortsabhängigen Funktionen $\tilde{\psi}_{|i|}(v)$ für $i = 1, \dots, 4$.

$$\lambda_i = \begin{cases} -(\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4) - i \sqrt{\alpha_S \kappa_{|i|}^4 - (\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4)^2}, & i \in \tilde{\mathbb{I}}^+, \\ -(\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4) + i \sqrt{\alpha_S \kappa_{|i|}^4 - (\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4)^2}, & i \in \tilde{\mathbb{I}}^-, \end{cases} \quad (3.8)$$

gegeben. Die Definition der $\kappa_{|i|}^4$ geht auf Gleichung (D.21) zurück und erfolgt auf die in Abschnitt D.1.1 beschriebene Weise. Die stets unter Vernachlässigung der Ortsabhängigkeit aufgeführten Funktionen $\tilde{\psi}_{|i|}$ sind mit einer Normierung entsprechend (D.35) durch (D.22) definiert, eine Darstellung der $\tilde{\psi}_{|i|}$ für $i = 1, \dots, 4$ findet sich in Abbildung 3.1. Die Eigenwerte des Steifigkeitsoperators $\lambda_{S,i}$ werden in (D.32) aus Abschnitt D.1.3 beschrieben.

Grenzwertbetrachtungen der Eigenwerte des Systemoperators

Im Hinblick auf das mathematische Modell des Beispielsystems führt die Berücksichtigung von Kelvin-Voigt-Dämpfung gegenüber äquivalenten mathematischen Modellen ohne derartige Dämpfungsterme auf eine verbesserte Übereinstimmung des modellierten Systemverhaltens und des Verhaltens des realen Beispielsystems. Aus diesem Grund wird das Verhalten der Eigenwerte für $i \rightarrow \pm\infty$ unter der Annahme von Kelvin-Voigt-Dämpfung $\alpha_{KV} > 0$ betrachtet. Aussagen für den Fall $\alpha_{KV} = 0$ finden sich beispielsweise in [LS94].

Für die folgenden Betrachtungen wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit $L = 1$ und damit $\kappa_{|i|}^4 = k_{|i|}^4$ vorausgesetzt, wobei auf Basis von (D.21) $\kappa_{|i|}^4, k_{|i|}^4 \in \mathcal{O}(i^4)$ gilt. Ausgehend von (3.8)

wird durch

$$k_{|i|}^4 \rightarrow +\infty \quad \text{für} \quad i \rightarrow \pm\infty \quad (3.9)$$

eine Fallunterscheidung vorgenommen.

1. $i \in \mathbb{I}^+$; Für $i \rightarrow +\infty$ folgt aus (3.8)

$$\lambda_i = -(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4) - \sqrt{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4)^2 - \alpha_S k_{|i|}^4}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Ab einem Index $i > i_0$, der sich in Abhängigkeit von den Parametern α_V, α_{KV} und α_S ergibt, ist das Argument der Wurzelbildung aufgrund von

$$(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4)^2 > \alpha_S k_{|i|}^4 \quad \text{für} \quad i > i_0 \quad (3.11)$$

stets positiv. Folglich sind alle Eigenwerte für $i > i_0$ reell $\text{Re}(\lambda_i) = \lambda_i$ und negativ $\lambda_i < 0$. Für den Grenzfall ergibt sich

$$\lambda_i \rightarrow -\infty \quad \text{für} \quad i \rightarrow +\infty. \quad (3.12)$$

Darüber hinaus folgt aus $k_{|i|}^4 \in \mathcal{O}(i^4)$ direkt $\lambda_i \in \mathcal{O}(i^4)$ für $i \in \mathbb{I}^+$.

2. $i \in \mathbb{I}^-$; Für $i \rightarrow -\infty$ folgt aus (3.8)

$$\lambda_i = -(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4) + \sqrt{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4)^2 - \alpha_S k_{|i|}^4}, \quad i = -1, -2, \dots, \quad (3.13)$$

wobei auch in diesem Fall (3.11) gilt. Eine Erweiterung der Form

$$\lambda_i = \lambda_i \frac{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4) + \sqrt{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4)^2 - \alpha_S k_{|i|}^4}}{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4) + \sqrt{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4)^2 - \alpha_S k_{|i|}^4}} \quad (3.14)$$

führt auf

$$\lambda_i = \frac{-\alpha_S k_{|i|}^4}{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4) + \sqrt{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4)^2 - \alpha_S k_{|i|}^4}} \quad (3.15)$$

$$= \frac{-\alpha_S}{\frac{\alpha_V}{k_{|i|}^4} + \alpha_{KV} + \sqrt{\frac{(\alpha_V + \alpha_{KV} k_{|i|}^4)^2 - \alpha_S k_{|i|}^4}{k_{|i|}^8}}}. \quad (3.16)$$

Demnach gilt

$$\lambda_i \rightarrow -\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} \quad \text{für} \quad i \rightarrow -\infty \quad (3.17)$$

sowie $\lambda_i \in \mathcal{O}(1)$ für $i \in \mathbb{I}^-$. Mit $\alpha_S, \alpha_{KV} > 0$ ist λ_i ab einem gewissen Zählindex reell $\text{Re}(\lambda_i) = \lambda_i$ und negativ $\lambda_i < 0$.

Für die Eigenwerte des Beispielsystems existieren unter der Annahme von Kelvin-Voigt-Dämpfung gemäß der durchgeführten Fallunterscheidung zwei Häufungspunkte, die durch die Gleichungen (3.12) beziehungsweise (3.17) beschrieben werden. Insbesondere der endliche Häufungspunkt $-\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}}$ spielt bei der in 3.1.3 diskutierten Frage, ob die Eigenvektoren des Systemoperators eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden, eine wesentliche Rolle. Abbildung 3.2 zeigt die ersten neun Eigenwert-Paare des Systemoperators des Beispielsystems unter der Annahme einer Parametrisierung entsprechend Tabelle 2.3.

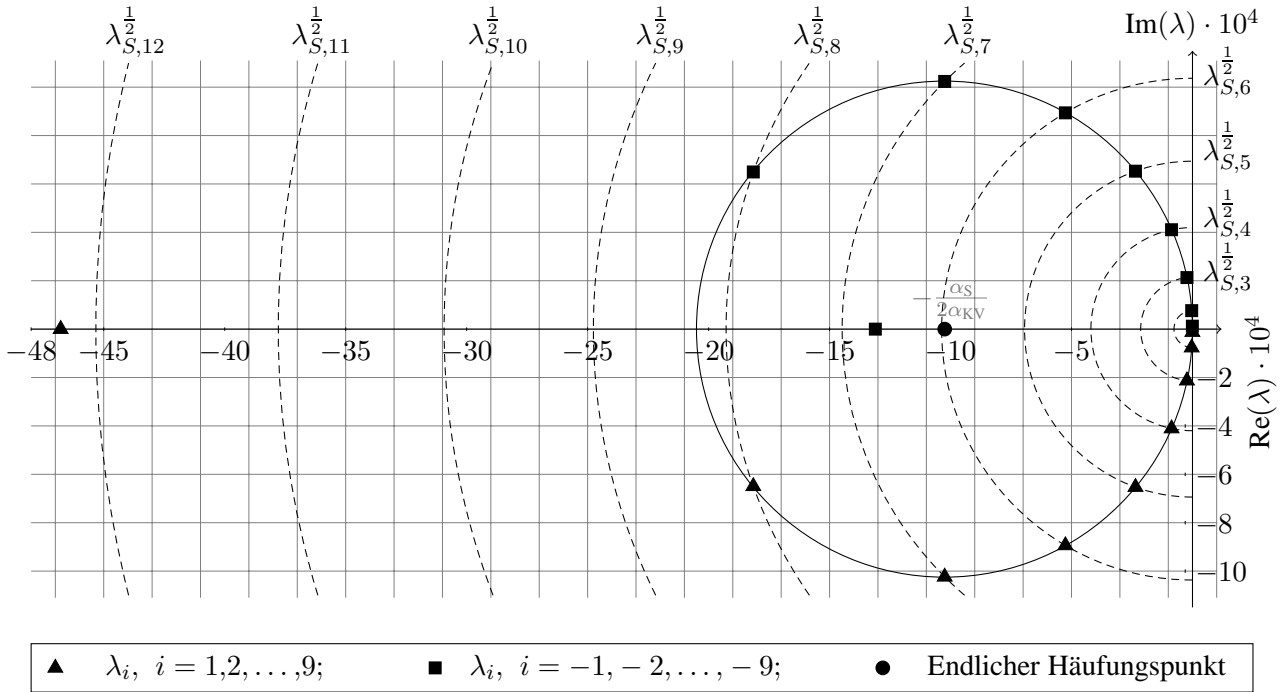


Abbildung 3.2: Verteilung der ersten neun Eigenwert-Paare des Systemoperators des Beispielsystems.

Betrachtungen zur Lage der Eigenwerte des Beispielsystems

In Abhängigkeit von der konkreten Struktur des Steifigkeits- und Dämpfungsoperators sowie der jeweiligen Parametrisierung sind eine Vielzahl von strukturell unterschiedlichen Eigenwert-Verteilungen hinsichtlich des Beispielsystems denkbar. Ausführliche Untersuchungen und zahlreiche Fallunterscheidungen dazu finden sich in [LS94]. An dieser Stelle werden lediglich einige Ergebnisse hinsichtlich der Eigenwert-Verteilung des Beispielsystems wiedergegeben. Die auftretenden Koeffizienten werden als positiv und endlich angenommen, im Einzelnen gelten bezüglich der folgenden Aussagen die Annahmen

$$\alpha_{KV} > 0, \quad \alpha_V < \frac{\alpha_S}{\alpha_{KV}}. \quad (3.18)$$

Die Annahmen werden durch die für das Beispielsystem in Abschnitt 2.3.4 geschilderte Parametrierung mit den in Tabelle 2.3 aufgeführten Parametern eingehalten. Im Folgenden beschreibt die aus [LS94] stammende Zählfunktion

$$N_S(c) = \sum_{\lambda_{S,i} \leq c} 1 \quad (3.19)$$

die Anzahl der Eigenwerte des Steifigkeitsoperators, die kleiner als das Argument c der Funktion sind. Unter diesen Annahmen sind die Eigenwerte des Systemoperators λ_i nicht rein reell für

$$N_0 + 1 \leq |i| \leq N_1 - 1, \quad \forall i \in \mathbb{I} \quad (3.20)$$

mit

$$N_0 = N_S \left(\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha_{KV}\alpha_V}{\alpha_S}} \right)^2 \left(\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} \right)^2 \right) \quad (3.21)$$

$$N_1 - 1 = N_S \left(\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha_{KV}\alpha_V}{\alpha_S}} \right)^2 \left(\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} \right)^2 \right). \quad (3.22)$$

Die nicht rein reellen Eigenwerte stimmen mit den Schnittpunkten der Kreise

$$\Gamma_1 = \left\{ \mu \in \mathbb{C} \left| \left| \mu + \frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} \right|^2 = \left(1 - \frac{4\alpha_{KV}\alpha_V}{\alpha_S} \right) \left(\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} \right)^2 \right. \right\} \quad (3.23)$$

und $\Gamma_2 = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu|^2 = \lambda_{S,i}, \forall i \in \mathbb{I} \}$ überein. Die durch $|i| \leq N_0$ definierten $2N_0$ reellen Eigenwerte des Systemoperators liegen im Intervall $\left(-\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}}, 0 \right)$, darüber hinaus enthält das Intervall $\left(-\infty, -\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} \right)$ die für $|i| \geq N_1$ stets reellen Eigenwerte.

Ausgehend von einer Parametrierung des Beispielsystems gemäß Tabelle 2.3 gilt $N_0 = 0$, demnach existieren keine reellen Eigenwerte rechts des endlichen Häufungspunkts. Es handelt sich folglich bei den ersten $2(N_1 - 1)$ Eigenwerten des Beispielsystems um $N_1 - 1$ konjugiert komplexe Eigenwertpaare, wobei im Fall des Beispielsystems $N_1 = 9$ gilt. Alle reellen Eigenwerte des Beispielsystems dagegen liegen links einer Geraden, die parallel zur imaginären Achse durch den endlichen Häufungspunkt verläuft. Darüber hinaus besitzen alle Eigenwerte des Beispielsystems einen echt negativen Realteil

$$\sup_{i \in \mathbb{I}} \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0. \quad (3.24)$$

Diese Tatsache ist beispielsweise im Hinblick auf die Untersuchungen zur Dissipativität des Systemoperators des Beispielsystems sowie hinsichtlich der Stabilitätsanalyse des Beispielsystems von Bedeutung. Tabelle 3.1 zeigt die ersten 15 Eigenwert-Paare des Beispielsystems, wobei eine Parametrierung des Beispielsystems gemäß Tabelle 2.3 vorausgesetzt wird. Damit enthält Tabelle 3.1 alle Eigenwerte der durch Gleichung (4.35) definierten nominellen endlich-dimensionalen Strecke und von G_{Sim} entsprechend Gleichung (4.36).

i	$\lambda_i, i \rightarrow +\infty$	$\lambda_i, i \rightarrow -\infty$	$ \lambda_i , i \rightarrow +\infty$	$ \lambda_i , i \rightarrow -\infty$	$\lambda_{S,i}$
1	$-53,0775 - 1219,82i$	$-53,0775 + 1219,82i$	1220,98	1220,98	1220,98
2	$-331,668 - 7644,55i$	$-331,668 + 7644,55i$	7651,74	7651,74	7651,74
3	$-2287,06 - 21302,7i$	$-2287,06 + 21302,7i$	21425,1	21425,1	21425,1
4	$-8652,43 - 41083,6i$	$-8652,43 + 41083,6i$	41984,9	41984,9	41984,9
5	$-23564,4 - 65280,7i$	$-23564,4 + 65280,7i$	69403,6	69403,6	69403,6
6	$-52527,9 - 89385,2i$	$-52527,9 + 89385,2i$	103677	103677	103677
7	$-102426 - 102360i$	$-102426 + 102360i$	144805	144805	144805
8	$-181516 - 64953,4i$	$-181516 + 64953,4i$	192788	192788	192788
9	-467790	-131081	467790	131081	247625
10	-817329	-117061	817329	117061	309317
11	$-1,28309 \cdot 10^6$	-111279	$1,28309 \cdot 10^6$	111279	377864
12	$-1,89809 \cdot 10^6$	-108240	$1,89809 \cdot 10^6$	108240	453265
13	$-2,69411 \cdot 10^6$	-106448	$2,69411 \cdot 10^6$	106448	535521
14	$-3,70479 \cdot 10^6$	-105314	$3,70479 \cdot 10^6$	105314	624632
15	$-4,96617 \cdot 10^6$	-104560	$4,96617 \cdot 10^6$	104560	720597

Tabelle 3.1: Die ersten 15 Eigenwert-Paare des Systemoperators des Beispielsystems.

Abschließend sei zur Indizierung der Eigenwerte und Eigenvektoren des Systemoperators des Beispielsystems bemerkt, dass sowohl durch $\mathbb{I} = \mathbb{I}^- \cup \tilde{\mathbb{I}}^+$ als auch durch \mathbb{I}^+ alle Eigenwerte erfasst werden. Die Mengen $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ und $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ beziehungsweise $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ und $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ beinhalten demnach gleiche Elemente. Wobei die beiden Indizierungen allerdings auf eine unterschiedliche Anordnung der indizierten Elemente führen und \mathbb{I}^+ lediglich positive Zahlen enthält.

3.1.3 Klassifizierung des Systemoperators des Beispielsystems

Der vorliegende Abschnitt dient dem Nachweis, dass der Systemoperator des Beispielsystems diagonalisierbar im Sinne von Definition 82 ist. Die Definition und Eigenschaften diagonalisierbarer Operatoren finden sich in Abschnitt B.8. Insbesondere bilden die Eigenvektoren eines diagonalisierbaren Operators eine Rieszbasis (Definition 64, Seite 265) des Zustandsraums und es besteht die Möglichkeit, den betreffenden Operator vollständig mittels seiner Eigenwerte und Eigenvektoren zu charakterisieren. Damit lassen sich die aus der Theorie endlich-dimensionaler Systeme wohlbekannten modalen Konzepte, unter Einhaltung klarer Analogien, auf durch derartige Systemoperatoren repräsentierte unendlich-dimensionale Systeme übertragen.

Für den abgeschlossenen Systemoperator des Beispielsystems $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ wird eine nicht leere Resolventenmenge vorausgesetzt. Der Nachweis von $A \in \mathcal{O}_D$ reduziert sich damit darauf, zu zeigen, dass die Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ von A eine Rieszbasis des Zustandsraums $\mathcal{X} = H_{\frac{1}{2}} \times H$ bilden. Zu diesem Zweck wird ein aus der Literatur bekanntes Kriterium eingeführt und anschließend überprüft, ob das Beispielsystem diesem Kriterium genügt.

Kriterien hinsichtlich der Rieszbasis-Eigenschaft der Eigenvektoren des Systemoperators

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen ist der in Abschnitt 2.2.4 durch Gleichung (2.79) festgelegte Systemoperator. Strukturell eignet sich der Systemoperator des Beispielsystems unter anderem, um die transversalen Schwingungen dünner Balken unter Berücksichtigung verschiedener, vergleichsweise allgemeiner Dämpfungsmodelle abzubilden. Eine Betrachtung der spektralen Eigenschaften von Systemoperatoren der in (2.79) auftretenden Form findet sich beispielsweise in [JTW08]. Die dortigen Erkenntnisse werden im Folgenden genutzt. Die Zustandsraumdarstellung des Beispielsystems ist formal aus der Gleichung zweiter Ordnung bezüglich der Zeit (A.39) durch die Wahl der Zustandsgrößen gemäß Gleichung (2.78) hervorgegangen. Die spektralen Eigenschaften derartiger Gleichungen zweiter Ordnung werden in [LS94] ausführlich anhand der Eigenwerte und Eigenvektoren von Operatorbüscheln („operator pencils“) diskutiert.

Von den in [JTW08] enthaltenen Ausführungen sind im Folgenden insbesondere die in Satz 9 aufgeführten hinreichenden Bedingungen von Interesse, unter denen die Eigenvektoren eines Systemoperators gemäß (2.79) eine Rieszbasis des Zustandsraum $H_{\frac{1}{2}} \times H$ bilden. Der folgende Satz entspricht inhaltlich Korollar 5.2 aus [JTW08], vorausgesetzt wird eine Zustandsraumdarstellung gemäß Abschnitt 2.2.4.

Satz 9 *Es sei $\mathcal{X} = H_{\frac{1}{2}} \times H$ und $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ entsprechend (2.79). Der Dämpfungsoperator D sei von der Form $D = \alpha_{SD} S + D_0$, mit $\alpha_{SD} > 0$ und einem symmetrischen Operator D_0 , der S -kompakt ist. Falls $-\frac{1}{\alpha_{SD}}$ nicht im Punktspektrum von A liegt, also $-\frac{1}{\alpha_{SD}} \notin \sigma_p(A)$ gilt, existiert eine Rieszbasis von \mathcal{X} aus den Eigenvektoren und endlich vielen Hauptvektoren von A , zudem generiert A dann eine analytische Halbgruppe.* \square

Der Beweis zu Satz 9 wird in [JTW08] gezeigt. Die innerhalb von Satz 9 getroffenen Einschränkungen hinsichtlich der Struktur zulässiger Dämpfungsoperatoren schließt das Beispielsystem nicht aus.

Die Existenz einer Rieszbasis des Zustandsraums aus den Eigenvektoren eines Systemoperators hängt gemäß Satz 9 maßgeblich von dem in D.1.1 ermittelten endlichen Häufungspunkt der Eigenwerte des Systemoperators ab. Gleichzeitig formuliert Satz 9 eine hinreichende Bedingung dafür, dass ein betrachteter Systemoperator eine analytische Halbgruppe auf dem Zustandsraum erzeugt und demnach das zugeordnete abstrakte Cauchy-Problem angenehme Lösungseigenschaften aufweist. Vor der Anwendung von Satz 9 auf das Beispielsystem gilt es zu prüfen, ob die Operatoren des Beispielsystems den Voraussetzungen des Satzes genügen. Die Definitionen der dabei auftretenden Räume basieren maßgeblich auf der Quadratwurzel des Steifigkeitsoperators und wird in Anhang B.9.2 vorgenommen. Laut Anhang A.3.2 handelt es sich bei dem Steifigkeitsoperator

$$S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$$

$$w(t) \mapsto Sw(t) = \alpha_S \frac{\partial^4 w(v, t)}{\partial v^4} \quad (3.25)$$

um einen selbstadjungierten, koerziven Operator. Gemäß den Ausführungen in Anhang B.9.2 kann die stetige Erweiterung des Steifigkeitsoperators als beschränkte Abbildung $S \in \mathcal{L}\left(H_{\frac{1}{2}}, H_{-\frac{1}{2}}\right)$

angesehen werden. Der Dämpfungsoperator lässt sich in der Form $D = \alpha_{SD} S + D_0$ darstellen, wobei aus (A.23) unmittelbar

$$\alpha_{SD} = \frac{\alpha_{KV}}{\alpha_S} > 0 \quad \text{sowie} \quad D_0 = \alpha_V > 0 \quad (3.26)$$

folgt. Da es sich bei D_0 um einen Skalar $0 < \alpha_V < \infty$ handelt, ist D_0 symmetrisch und stetig. Entsprechend der Ausführungen aus Abschnitt A.3.2 ist der durch Gleichung (A.63) beschriebene inverse Steifigkeitsoperator S^{-1} kompakt. Den Ausführungen aus Anhang B.4.4 folgend gilt damit unter der Annahme $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(D_0) \subset H$, dass D_0 sowohl S -kompakt als auch S -beschränkt ist.

Somit erfüllt der Dämpfungsoperator des Beispielsystems die Voraussetzungen aus Satz 9 und im Folgenden gilt es, die an gleicher Stelle formulierten Bedingungen an das Punktspektrum von A zu überprüfen.

Betrachtung des endlichen Häufungspunkts der Eigenwerte des Systemoperators

Die Untersuchungen des Verhaltens der Eigenwerte aus D.1.1 führen für den Fall $i \rightarrow -\infty$ auf den endlichen Häufungspunkt

$$-\frac{1}{\alpha_{SD}} = -\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}}. \quad (3.27)$$

Gemäß Satz 9 gilt es, die Zugehörigkeit dieses Häufungspunktes zum Punktspektrum des Systemoperators des Beispielsystems zu überprüfen.

Aus der disjunkten Zerlegung des Spektrums eines linearen Operators gemäß Definition 76 in Anhang B.7.2 geht hervor, dass sich ein Element des Punktspektrums eines linearen Operators dadurch auszeichnet, dass die Resolvente gerade an einem solchen Punkt nicht existiert, d.h. die Abbildung $A_s = (sI - A)$ für einen betrachteten Punkt s nicht invertierbar ist. Gleichbedeutend dazu ist die Existenz eines nichttrivialen Kerns an der Stelle s , sodass ein $x \neq 0$ existiert mit

$$(sI - A)x = 0. \quad (3.28)$$

Bezüglich des Beispielsystems sind Bedingungen zu finden, unter denen für $s = -\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}}$ die Resolvente nicht existiert, also (3.28) zu erfüllen ist. Unter Berücksichtigung des Zustandsvektors folgen aus

$$\left(-\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}}I - A\right)x = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} & -1 \\ S & (2\frac{\alpha_{KV}}{\alpha_S}S + 2\alpha_V) - \frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

die beiden skalaren Gleichungen

$$0 = -x_2 - \frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}}x_1 \quad (3.30)$$

$$0 = Sx_1 + 2\frac{\alpha_{KV}}{\alpha_S}Sx_2 + 2\alpha_Vx_2 - \frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}}x_2. \quad (3.31)$$

Die Erfüllung des Ansatzes für ein nichttriviales x erfordert aufgrund von (3.30) sowohl $x_1 \neq 0$ als auch $x_2 \neq 0$. Einsetzen von (3.30) in (3.31) führt auf den Zusammenhang

$$\left(1 - \frac{4\alpha_{KV}}{\alpha_S}\alpha_V\right)x_1 = 0 \quad (3.32)$$

der mit $x_1 \neq 0$ für

$$\alpha_S = 4\alpha_{KV}\alpha_V \quad (3.33)$$

erfüllt wird. Folglich ist der endliche Häufungspunkt $-\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}}$ nur dann Element des Punktspektrums $\sigma_p(A)$, wenn die Materialkonstanten des Beispielsystems (3.33) erfüllen. Aus Sicht der realen Anwendung kann daher für nahezu jeden Fall davon ausgegangen werden, dass $-\frac{\alpha_S}{2\alpha_{KV}} \notin \sigma_p(A)$ gilt.

Satz 9 folgend bilden die durch (D.23) gegebenen Eigenvektoren des Systemoperators A mit der Normierung aus (D.41) eine Rieszbasis des Zustandsraumes. Da die Resolventenmenge von A nicht leer ist, handelt es sich damit bei A um einen diagonalisierbaren Operator. Die durch (D.29) beschriebenen Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators mit der Normierung gemäß (D.42) sind die zu $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ biorthogonale Menge.

Des Weiteren lassen die angestellten Betrachtungen in Kombination mit Satz 9 den Schluss zu, dass der Systemoperator den Anforderungen an den infinitesimalen Erzeuger einer analytischen Halbgruppe (Definition 103) genügt, falls (3.33) nicht gilt. Zusätzliche Überlegungen zu den Eigenschaften der dem Beispielsystem zugeordneten Halbgruppe finden sich in 3.2.

Abschluss des Spektrums des Systemoperators

Dem Resultat aus Abschnitt 3.1.3 zufolge bilden die Eigenvektoren des abgeschlossenen Systemoperators des Beispielsystems eine Rieszbasis des Zustandsraums. Falls zudem festgestellt werden kann, dass der Abschluss des Spektrums von A total unzusammenhängend ist, gehört A zur Klasse der Riesz-Spektraloperatoren (Definition 83).

Diese Anforderung ist erfüllt, wenn zwei verschiedene Punkte aus dem Abschluss des Spektrums $\overline{\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}}}$ von A nicht durch eine vollständig innerhalb dieses Abschlusses liegende Strecke miteinander verbunden werden können. Die Betrachtungen bezüglich des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte des Beispielsystems in Abschnitt D.1.1 zeigen, dass der Abschluss der Menge der jeweils einfachen Eigenwerte des Beispielsystems zwei Häufungspunkte aufweist. Ferner sind die λ_i für betragsmäßig ausreichend große i stets reell. Um von einer total unzusammenhängenden Menge sprechen zu können, muss zwischen reellen Eigenwerten stets ein Punkt auf der reellen Achse liegen, der selbst kein Eigenwert ist. Diese Eigenschaft wird an dieser Stelle nicht rigoros bewiesen. In [CZ95] (S. 41) findet sich die Bemerkung, dass die Definition der Riesz-Spektraloperatoren auch Operatoren mit einer endlichen Anzahl von Häufungspunkten der Eigenwerte beinhaltet. Gestützt auf diese Aussage lässt sich annehmen, dass es sich bei dem Systemoperator um einen Riesz-Spektraloperator nach Definition 83 handelt. Im Rahmen dieser Arbeit sind allerdings die Eigenschaften diagonalisierbarer Operatoren ausreichend, und der Beweis für $A \in \mathcal{O}_D$ liegt vor.

3.2 Stabilitätsanalyse

Der vorliegende Abschnitt dient der Definition und Analyse der Stabilität durch stark stetige Halbgruppen repräsentierbarer unendlich-dimensionaler Systeme. In aus dem Endlich-dimensionalen wohlbekannter Manier befasst sich die Stabilitätstheorie derartiger unendlich-dimensionaler Systeme mit dem asymptotischen Verhalten der einem System zugeordneten Halbgruppe und damit dem Langzeitverhalten der Lösung des zugeordneten abstrakten Cauchy-Problems. Aus diesem Grund wird im Folgenden der Begriff der Stabilität eines Systems synonym zum Begriff der Stabilität der zugehörigen stark stetigen Halbgruppe genutzt. Mit dem Ziel, insbesondere die Stabilität des Beispielsystems zu charakterisieren, werden zunächst ohne weitere Annahmen unterschiedliche Stabilitätsbegriffe für stark stetige Halbgruppen eingeführt und Äquivalenzen zwischen den Stabilitätsbegriffen diskutiert.

Das abstrakte Cauchy-Problem 2.45 eines ungezwungenen Systems wird direkt durch einen zugeordneten Systemoperator definiert. Dieser enge Zusammenhang spiegelt sich im Endlich-dimensionalen in der direkten Abhängigkeit der Stabilität eines Systems von der Lage der Eigenwerte des zugehörigen Systemoperators wider. Eine Generalisierung auf einen Zusammenhang zwischen der Stabilität stark stetiger Halbgruppen und der Lage des Spektrums ihres infinitesimalen Erzeugers ist für den Fall der Einhaltung der „Spectrum-determined growth assumption“ zulässig und findet sich in der Formulierung eines Kriteriums für die exponentielle Stabilität einer stark stetigen Halbgruppe in Satz 68.

Für den Fall, dass der infinitesimale Erzeuger Element von \mathcal{O}_D oder \mathcal{O}_R ist, stimmen die Spektralschranke und die Wachstumsgrenze dieses Paares stets überein (Satz 53, **RSO5**). Um auf Basis von Satz 68 auf die Stabilität des Beispielsystems zu schließen, muss somit in erster Linie der Nachweis geführt werden, dass der Systemoperator des Beispielsystems der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist. Die Betrachtungen zur Stabilität ungezwungener unendlich-dimensionaler Systeme werden mit dem Nachweis der exponentiellen Stabilität des Beispielsystems auf Basis von Satz 68 und den Eigenwerten des Systemoperators des Beispielsystems abgeschlossen.

Charakteristisch für das Spektrum eines infinitesimalen Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe ist dessen Lage in einer linken Halbebene der komplexen Zahlenebene. Damit erfüllt das Spektrum eines solchen Operators eine Beschränkung hinsichtlich des Realteils. Die Betrachtungen zur Lage der Eigenwerte des Systemoperators des Beispielsystems in Abschnitt 3.1.2 zeigen zudem die Lage aller Eigenwerte in einem Sektor, der eine Schranke hinsichtlich des Imaginärteils aller Eigenwerte aufweist. Diese Schranke ist als Funktion in Abhängigkeit vom Realteil der Eigenwerte darstellbar. Motiviert durch diese Erkenntnisse zur Lage der Eigenwerte des Systemoperators des Beispielsystems schließt sich eine weiterführende Klassifizierung der durch Elemente aus \mathcal{O}_D und Untermengen dieser Operatorklasse erzeugten Halbgruppen an.

Nachfolgend wird der Begriff der Ein-/Ausgangsstabilität für die betrachteten unendlich-dimensionalen Systeme eingeführt und die Bedingungen für die Äquivalenz zwischen der Ein-/Ausgangs-

Stabilität und dem stärkeren Konzept der exponentiellen Stabilität genannt. Sowohl im Hinblick auf die Definition der Ein-/Ausgangsstabilität als auch hinsichtlich der genannten Äquivalenzbedingungen sind dabei klare Analogien zum Endlich-dimensionalen zu erkennen.

3.2.1 Stabilität stark stetiger Halbgruppen

Die folgenden Betrachtungen dienen der Definition eines Stabilitätsbegriffs, dessen Gültigkeit sich auf durch stark stetige Halbgruppen repräsentierbare unendlich-dimensionale Systeme erstreckt. Dass im Unendlich-dimensionalen Aussagen zur Konvergenz beschränkter Operatoren eine differenziertere Betrachtungsweise erfordern als im Endlich-dimensionalen, legen bereits die verschiedenen Topologien bezüglich der Räume beschränkter Operatoren und die darauf aufbauenden Konvergenzbegriffe für Operatorfolgen aus Anhang B.4.2 nahe. Im Folgenden wird daher ein Stabilitätsbegriff für die Anwendung auf das Beispielsystem eingeführt. Darüber hinaus erfolgt die Definition weiterer gebräuchlicher Stabilitätsbegriffe sowie eine Diskussion über die Äquivalenz aller genannten Ausprägungen der Stabilität. Einige schöne Beispiele zu unendlich-dimensionalen Systemen, bei denen verschiedene Stabilitätsbegriffe nicht äquivalent sind, finden sich in der Einleitung von [YH91] und den dort genannten Literaturquellen.

Aufgrund des unmittelbar ersichtlichen Zusammenhangs zur Wachstumsgrenze ω_0 einer stark stetigen Halbgruppe (Definition 5, Gleichung (2.60)) wird hinsichtlich des Beispielsystems als Stabilitätsbegriff die beispielsweise aus [CZ95] oder [LGM99] bekannte exponentielle Stabilität eingeführt.

Definition 9 (Exponentielle Stabilität stark stetiger Halbgruppen) Es sei $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine stark stetige Halbgruppe. Dann heißt \mathcal{T}_Φ exponentiell stabil, falls Konstanten $M \geq 0$ und $\alpha > 0$ existieren, sodass

$$\|\Phi(t)\| \leq M e^{-\alpha t}. \quad (3.34)$$

□

Der Nomenklatur aus [CZ95] folgend, wird α als Abklingrate bezeichnet, während das Supremum aller möglichen Abklingraten Stabilitätsreserve von \mathcal{T}_Φ heißt. Die Wachstumsgrenze stark stetiger Halbgruppen ist in Definition 5 gleichwertig durch (2.60) und (2.61) definiert. Ausgehend von (2.61) wird die zur exponentiellen Stabilität äquivalente gleichmäßige exponentielle Stabilität in der nachfolgenden Definition eingeführt. Abhandlungen zu weiteren im Kontext stark stetiger Halbgruppen gebräuchlicher Stabilitätsbegriffe finden sich u.a. in [CZ95] (S. 215), [LGM99] (S. 109), [DL92] (S. 406) oder in der anschließend aufgeführten übersichtlichen Form in [EN00] (S. 296).

Definition 10 (Stabilität stark stetiger Halbgruppen) Es sei X ein Hilbertraum, ferner sei $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X . Dann heißt \mathcal{T}_Φ

S1) gleichmäßig exponentiell stabil, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\epsilon t} \|\Phi(t)\| = 0$;

S2) gleichmäßig stabil, falls $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\| = 0$;

S3) stabil im starken Sinn (asymptotisch stabil), falls $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)x\| = 0, \quad \forall x \in X$;

S4) stabil im schwachen Sinn, falls $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Phi(t)x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in X \text{ und } y \in X'.$ □

Grundsätzlich folgt aus der Einhaltung eines in Definition 10 aufgeführten Stabilitätsbegriffs auch die Einhaltung aller nachfolgenden in Definition 10 genannten Stabilitätsbegriffe. Folglich ist ein exponentiell stabiles System auch stabil im Sinne der Stabilitätsbegriffe **S1)**-**S4)**.

Allerdings sind nicht alle der aufgeführten Stabilitätsbegriffe äquivalent, Gegenbeispiele dazu finden sich u.a. in [EN06] oder [LGM99] (S. 110). Dort sind insbesondere Gegenbeispiele zu dem Schluss von **S3)** auf **S2)** zu finden. Allerdings sind die in **S1)** und **S2)** aufgeführten Begriffe gleichwertig, zudem sind laut [EN00] (S. 296) beide äquivalent zur Existenz eines $\epsilon > 0$, sodass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\epsilon t} \|\Phi(t)x\| = 0, \forall x \in X. \quad (3.35)$$

Eine weiterführende Bewertung der Äquivalenz unterschiedlicher Stabilitätsbegriffe findet sich in [EN06] (S. 186). Die in **S1)** und **S2)** aufgeführten, gleichwertigen Stabilitätsbegriffe verknüpfen die reine Konvergenz der Operatornorm mit einem Term für die Geschwindigkeit der Konvergenz. Falls also eine Konvergenz der Operatornorm gegen Null vorliegt, dann konvergiert die besagte Norm schneller als eine in **S1)** durch die Festlegung von ϵ definierte Exponentialfunktion divergiert. Die Äquivalenz von **S1)** und **S2)** zu dem Konvergenzbegriff aus (3.35) stellt dagegen eine Verknüpfung mit einer punktwisen Eigenschaft dar, da an dieser Stelle statt der Operatornorm der Halbgruppe in Abhängigkeit von der Zeit lediglich die Norm des Bildes aller $x \in X$ unter der Halbgruppe betrachtet wird. Die asymptotische Stabilität kann ebenfalls wiederum als eine punktwise Konvergenz aufgefasst werden, für die allerdings keine Konvergenzgeschwindigkeit definiert ist.

Anstelle des Begriffs der exponentiellen Stabilität wird mittels Definition 9 zum Teil vollständig synonym der Begriff der internen Stabilität eingeführt ([Reb91] (S. 995), [Reb91] (S. 3008)). Im Endlich-dimensionalen wird die interne Stabilität als asymptotische Stabilität des Ursprungs des Zustandsraums definiert [ZDG95] (S. 121). Ferner sind im endlich-dimensionalen Fall für lineare Systeme die asymptotische und die exponentielle Stabilität äquivalent. Innerhalb dieser Arbeit wird die interne Stabilität synonym zur Stabilität im starken Sinn (asymptotischen Stabilität) gemäß **S3)** aus Definition 10 verstanden. Durch den Schluss von **S1)** auf **S3)** folgt für die an dieser Stelle berücksichtigten Systeme aus der gleichmäßig exponentiellen Stabilität und äquivalent aus der exponentiellen Stabilität die innere Stabilität.

3.2.2 Stark stetige Halbgruppe des Beispielsystems

Abschnitt 2.2.3 beinhaltet verschiedene Erzeuger-Theoreme, die eine Charakterisierung infinitesimaler Erzeuger stark stetiger Halbgruppen vornehmen. Im Folgenden sind insbesondere die dort aufgeführten Formulierungen des Hille-Yosida-Theorems sowie des Lumer-Phillips-Theorems für den Spezialfall diagonalisierbarer Operatoren von Interesse.

Die folgenden Nachweise, dass der Systemoperator des Beispielsystems A infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist, reduzieren sich unter der Kenntnis von $A \in \mathcal{O}_D$, auf eine Betrachtung des Realteils der Eigenwerte des Systemoperators. Laut den Ausführungen in Abschnitt 2.3.3 handelt es sich bei dem Beispielsystem um ein reguläres Pritchard-Salamon-System. Da somit (2.114) gilt, ist für die folgenden Betrachtungen keine Differenzierung zwischen den zugrunde liegenden Räumen nötig.

Die in den Eigenwerten des Beispielsystems auftretenden Parameter werden im Folgenden als positiv $\alpha_S, \alpha_{KV}, \alpha_V > 0$ angenommen. Darüber hinaus werden die aus den Betrachtungen bezüglich der Lage der Eigenwerte des Beispielsystems getroffenen Annahmen (3.18) aufrecht erhalten. Unter den genannten Voraussetzungen ist die durch (3.8) beschriebene Menge der Eigenwerte des Beispielsystems $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ in einer linken Halbebene der komplexen Zahlenebene beschränkt

$$\sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) < \infty. \quad (3.36)$$

Sie erfüllt damit die notwendige und hinreichende Bedingung aus Satz 53 (**RSO5**). Als Konsequenz dessen folgt, dass der Systemoperator infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit

$$\Phi(t) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i t} \langle \cdot, w_i \rangle_X v_i \quad (3.37)$$

auf dem Zustandsraum ist, wobei $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ die Eigenvektoren des Systemoperators A des Beispielsystems sind und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ die Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators A^* . Alle Eigenwerte des Systemoperators besitzen einen echt negativen Realteil

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad \forall i \in \mathbb{I}^+. \quad (3.38)$$

Für den Systemoperator gilt auf Basis von **RSO5** aus Satz 53 die Übereinstimmung von Wachstumsgrenze und Spektralschranke $\omega_0 = s(A)$. Damit ist die dem Systemoperator des Beispielsystems zugeordnete Halbgruppe nach Anwendung von Satz 68 exponentiell stabil entsprechend Definition 9. Aufgrund von (2.114) ist das Beispielsystem auf allen zugrunde liegenden Räumen exponentiell stabil. Die exponentielle Stabilität ist äquivalent zum Begriff der gleichmäßigen Stabilität. Daraus folgt, dass das Beispielsystem allen in Definition 10 aufgeführten Stabilitätsbegriffen genügt.

Aufgrund von (3.38) handelt es sich bei dem Systemoperator um einen dissipativen Operator (2.65). Da der zu einem dissipativen diagonalisierbaren Operator gehörige adjungierte Operator ebenfalls

dissipativ ist, folgt aus Satz 7 unmittelbar, dass der Systemoperator des Beispielsystems eine Kontraktionshalbgruppe auf dem Zustandsraum gemäß den Klassifizierungen in Abschnitt 2.2.2 erzeugt. Die Bedingung (2.59) lässt sich damit entsprechend **KSSH2** aus Definition 6 mit der Wahl $M = 1$ und $\omega = 0$ erfüllen, für die Norm der Halbgruppe des Beispielsystems folgt

$$\|\Phi(t)\| \leq 1 \quad (3.39)$$

für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aus den Klassifizierungen stark stetiger Halbgruppen anhand der zur Einhaltung von (2.59) zulässigen Wahlen für M und ω folgt, dass die Halbgruppe des Beispielsystems auch eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe ist. Im folgenden Abschnitt werden zusätzliche Untersuchungen für eine weiterführende Klassifizierung der Halbgruppe des Beispielsystems durchgeführt.

3.2.3 Weitere Klassifizierung der stark stetigen Halbgruppe des Beispielsystems

Als Motivation für die zusätzliche Klassifizierung der stark stetigen Halbgruppe des Beispielsystems sei auf die sehr gute Einführung zu den hilfreichen Eigenschaften analytischer Halbgruppen in [Wer11] (S. 392ff) verwiesen. Die Betrachtungen des Spektrums des Beispielsystems in Abschnitt 3.1.2 legen den Gedanken nahe, dass nicht ausschließlich eine Beschränkung hinsichtlich des Realteils des Spektrums des Beispielsystems vorliegt, sondern vielmehr die Lage des Spektrums in einem Sektor angenommen werden kann, d.h. das Spektrum des Beispielsystems besitzt auch eine Beschränkung hinsichtlich des Imaginärteils (Abb. 3.2). Diese Überlegung wird durch die Tatsache bestätigt, dass das Beispielsystem den Anforderungen aus Satz 9 auf Seite 100 genügt und damit ohne zusätzliche Betrachtungen der Schluss folgt, dass der Systemoperator eine analytische Halbgruppe auf dem Zustandsraum erzeugt.

Im Folgenden wird dennoch zusätzlich gezeigt, dass die Elemente einer Untermenge der diagonalisierbaren Operatoren, die auch den Systemoperator des Beispielsystems enthält, stark stetige Halbgruppen erzeugen, die zudem den Anforderungen an differenzierbare und analytische Halbgruppen genügen. Dabei sei explizit darauf hingewiesen, dass kein Anspruch erhoben wird, die maximale Untermenge der diagonalisierbaren Operatoren zu benennen, deren Elemente infinitesimale Erzeuger derartiger Halbgruppen sind. Generellere Betrachtungen des Zusammenhangs zwischen der Gestalt des Sektors, der das Spektrum des infinitesimalen Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe enthält und den Eigenschaften der zugehörigen Halbgruppe, finden sich in [EN00]. Darüber hinaus enthält [EN00] außerdem verschiedene allgemeine Charakterisierungen der infinitesimalen Erzeuger analytischer Halbgruppen (siehe beispielsweise S.101 Theorem 4.6, S.105 Korollar 4.7, S.106 Korollar 4.9) sowie eine graphische Darstellung des für infinitesimale Erzeuger analytischer oder differenzierbarer Halbgruppen jeweils zulässigen Sektors des Spektrums ([EN00] (S. 113)). Die Betrachtungen werden im folgenden auf eine durch \mathcal{O}_A bezeichnete Untermenge von \mathcal{O}_D eingeschränkt. Die Elemente der Menge \mathcal{O}_A zeichnen sich zusätzlich durch $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i \in \mathbb{I}^+, 0 \in \rho(A)$ sowie die Existenz einer positiven Konstanten c_1 aus, sodass

$$|\operatorname{Im}(\lambda_i)| \leq c_1^{\frac{1}{2}} |\operatorname{Re}(\lambda_i)| \quad \forall i \in \mathbb{I}^+. \quad (3.40)$$

Die Abschätzung des Imaginärteils der Eigenwerte in (3.40) entspricht einem Spezialfall der in [TW09] (S. 50) angenommenen Abschätzung. Der Systemoperator ist Element von \mathcal{O}_A . Jedes Element von \mathcal{O}_A erzeugt eine kontraktive Halbgruppe, die damit auch gleichmäßig beschränkt ist. Im folgenden wird der Nachweis geführt, dass eine stark stetige Halbgruppe, erzeugt durch ein Element aus \mathcal{O}_A , den Anforderungen an eine differenzierbare und analytische Halbgruppe genügt. Das Vorgehen dazu entspricht im Folgenden im Wesentlichen den Schritten aus [LGM99] (S. 55), allerdings unterscheiden sich die Annahmen hinsichtlich der Lage der Eigenwerte der betrachteten Operatoren. Zuerst wird gezeigt, dass $\Phi(t)x \in \mathcal{D}(A)$ für alle $x \in X$ gilt und die betrachtete Halbgruppe damit differenzierbar ist. Anschließend erlaubt die Anwendung von **GB4** aus Satz 67 den Schluss, dass es sich zudem um eine analytische Halbgruppe handelt.

Die Differentiation zulässiger Halbgruppen hinsichtlich der Zeit führt auf

$$A\Phi(t)x = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \left(\sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i(t+h)} \langle x, w_i \rangle_X v_i - \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i t} \langle x, w_i \rangle_X v_i \right). \quad (3.41)$$

Unter Anwendung der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$A\Phi(t)x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \lambda_i e^{\lambda_i t} \langle x, w_i \rangle_X v_i. \quad (3.42)$$

Die Norm auf $\mathcal{D}(A)$ entspricht (B.127), demnach gilt $\|\Phi(t)x\|_{\mathcal{D}(A)} = \|\Phi(t)x\|_{\mathcal{H}_1} = \|A\Phi(t)x\|$ auf $\mathcal{D}(A)$ und somit

$$\|A\Phi(t)x\| = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^2 e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)t} |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad (3.43)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} (\operatorname{Im}(\lambda_i)^2 + \operatorname{Re}(\lambda_i)^2) e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)t} |\langle x, w_i \rangle|^2. \quad (3.44)$$

Unter Berücksichtigung von (3.40) folgt mit $c_2 = 1 + c_1$ die Ungleichung

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} (\operatorname{Im}(\lambda_i)^2 + \operatorname{Re}(\lambda_i)^2) e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)t} |\langle x, w_i \rangle|^2 \leq c_2 \sum_{i \in \mathbb{I}^+} (\operatorname{Re}(\lambda_i) e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t})^2 |\langle x, w_i \rangle|^2. \quad (3.45)$$

Durch eine Substitution des Arguments der Exponentialfunktion $\operatorname{Re}(\lambda_i)t = \tau$ kann das Vorgehen aus [LGM99] (S. 56) angewandt werden. Unter der Annahme eines echt negativen Realteils der Eigenwerte der betrachteten Operatoren $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle $i \in \mathbb{I}^+$ sowie $t > 0$ gilt $\operatorname{Re}(\lambda_i)t = \tau \in (-\infty, 0)$. Der Betrag von $f(\tau) = \tau e^\tau$, nimmt auf dem Intervall $\tau \in (-\infty, 0)$ sein Maximum für $\tau = -1$ an. Unter Berücksichtigung der Norm auf \mathcal{X} folgt damit

$$c_2 \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i)^2 e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)t} |\langle x, w_i \rangle|^2 \leq \frac{c_2}{t^2} e^{-2} \|x\|^2. \quad (3.46)$$

Daraus lässt sich schließen, dass für $x \in \mathcal{X}$ und $t > 0$ stets $\Phi(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{H}_1)$ und $\Phi(t)x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_1$ beziehungsweise $\mathcal{R}(\Phi(t)) \subset \mathcal{D}(A)$ gilt. Die betrachteten stark stetigen Halbgruppen sind also nach Definition 102 differenzierbare Halbgruppen. Um nachzuweisen, dass es sich zudem

um analytische Halbgruppen handelt, bietet sich damit die Anwendung von **GB4**) aus Satz 67 an. (3.46) zeigt, dass mit $c_3 = c_2 e^{-2}$ für die Operatornorm

$$\begin{aligned} \|T\Phi(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|T\Phi(t)x\|_X \\ &\leq \frac{c_3}{t} \end{aligned} \quad (3.47)$$

folgt und somit **GB4**) eingehalten wird. Damit genügt jede durch einen Operator aus \mathcal{O}_A erzeugte Halbgruppe **GB4**) aus Satz 67. Gemäß **GB1**) des gleichen Satzes existiert jeweils eine Erweiterung zu einer in einem Sektor analytischen Halbgruppe $\{\Phi(z)\}_{z \in S_\phi}$. Bei den jeweils zugehörigen infinitesimalen Erzeugern, insbesondere auch dem Systemoperator des Beispielsystems, muss es sich demnach um sektorielle Operatoren handeln ([EN00] (S. 101)). Aus den weiteren Eigenschaften analytischer Halbgruppen sei die in [Wer11] (S. 393) beschriebene Lösbarkeit des durch den infinitesimalen Erzeugers definierten Cauchy-Problems für alle $x \in X$ hervorgehoben.

Abschließend lässt sich feststellen, dass die analytische Halbgruppe des Beispielsystem dem spektralen Abbildungssatz Satz 69 genügt und für das Beispielsystem ein weiterer Beweis für die Gültigkeit von $\omega_0 = s(A)$ vorliegt.

3.2.4 Ein-/Ausgangsstabilität unendlich-dimensionaler Systeme

Die Definition der Ein-/Ausgangsstabilität unendlich-dimensionaler Systeme lässt sich als direkte Verallgemeinerung der entsprechenden Definition im Fall endlich-dimensionaler Systeme auffassen. Im Gegensatz zur Stabilität stark stetiger Halbgruppen und damit verbunden der Stabilität ungezwungener unendlich-dimensionaler Systeme, hängt die Ein-/Ausgangsstabilität eines unendlich-dimensionalen Systems zusätzlich von den Eigenschaften der dem System zugeordneten Ein-/Ausgangsabbildung bei der Anwendung auf eine bestimmte Klasse von Signalen ab. Wie auch im Endlich-dimensionalen, wird die Ein-/Ausgangsstabilität unendlich-dimensionaler Systeme anhand der Abbildung kausaler energiebeschränkter Signale am Streckeneingang auf wiederum kausale energiebeschränkte Signale am Streckenausgang bewertet.

Definition der Ein-/Ausgangsstabilität

Während im Endlich-dimensionalen die Ein-/Ausgangsstabilität einer Übertragungsfunktion durch die Zugehörigkeit zu $\mathcal{RH}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ gekennzeichnet ist, erfordert die Verallgemeinerung des Begriffs der Ein-/Ausgangsstabilität auf die betrachteten unendlich-dimensionalen Systeme eine Berücksichtigung des Hardy-Raums $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$. Die Äquivalenz der Ein-/Ausgangsstabilität eines Systems der Pritchard-Salamon-Klasse zur Zugehörigkeit der Übertragungsfunktion des Systems zu $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ wird beispielsweise in [Log92] genannt. Die dortigen Ausführungen beinhalten verschiedene Klassen von Übertragungsfunktionen und sind daher naturgemäß durch einen algebraischen Blickwinkel geprägt, eingeschlossen werden in [Log92] auch allgemeinere als die hier zugelassenen Systemklassen. Einige zusätzliche Ausführungen zu den mathematischen Grundlagen der Ein-/Ausgangsstabilität finden sich in Abschnitt B.10.2.

Definition 11 (Ein-/Ausgangsstabilität von Pritchard-Salamon-Systemen) Ein Pritchard-Salamon-System mit der Übertragungsfunktion G wird genau dann als Ein-/Ausgangs-stabil (extern stabil, L^2 -stabil) bezeichnet, falls $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ gilt. \square

Die Definition der Ein-/Ausgangsstabilität und deren alternative Bezeichnung als L^2 -Stabilität begründen sich unmittelbar aus Satz 60. Eine Äquivalenz zwischen der Ein-/Ausgangsstabilität im Bildbereich der Laplace-Transformation und im Zeitbereich ist durch (B.152) gegeben.

Zusammenhang zwischen Ein-/Ausgangsstabilität und exponentieller Stabilität

Der vorliegende Abschnitt beinhaltet eine Verallgemeinerung der aus dem Endlich-dimensionalen wohlbekannten Zusammenhänge zwischen der exponentiellen Stabilität gemäß Definition 9 und dem schwächeren Konzept der Ein-/Ausgangsstabilität gemäß Definition 11. Der folgende Satz aus [Keu93] (S. 52) bezieht sich auf Pritchard-Salamon-Systeme. Allgemeinere Betrachtungen zur Äquivalenz von Ein-/Ausgangsstabilität und exponentieller Stabilität werden beispielsweise in [Cur88; Cur89a], [Reb91; Reb93] oder [Log92] angestellt.

Satz 10 (Zusammenhang zwischen exponentieller Stabilität und Ein-/Ausgangsstabilität) Es sei $\Sigma(\Phi(\cdot), B, C, D)$ ein Pritchard-Salamon-System (Definition 7), dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

ST1) $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist exponentiell stabil auf allen Räumen der dem Zustandsraum zugrunde liegenden Raumskala;

ST2) $\Sigma(\Phi(\cdot), B, C, D)$ ist sowohl zulässig stabilisierbar als auch zulässig detektierbar und Ein-/Ausgangs-stabil. \square

Mit Satz 10 besteht für gewisse unendlich-dimensionale Systeme eine Verbindung zwischen einem Stabilitätskonzept, welches auf den Betrachtungen einer Ein-/Ausgangsabbildung beruht und der exponentiellen Stabilität gemäß Definition 9, die hinsichtlich der dem Systemoperator zugeordneten stark stetigen Halbgruppe definiert ist. Zahlreiche hilfreiche Betrachtungen zu derartigen Äquivalenzen finden sich in [JN87; JN88]. Ein Beweis zu Satz 10 ist in [Keu93] enthalten.

In Analogie zum endlich-dimensionalen Fall ([ZDG95]) folgt aus der exponentiellen Stabilität eines unendlich-dimensionalen Systems der betrachteten Systemklassen die Ein-/Ausgangsstabilität des Systems. Umgekehrt erlaubt die schwächere Eigenschaft der Ein-/Ausgangsstabilität allein nicht den Schluss auf die exponentielle Stabilität eines betrachteten unendlich-dimensionalen Systems. Zusätzlich müssen zumindest alle nicht stabilen Dynamiken des Systems steuerbar und beobachtbar sein. Charakteristisch für den unendlich-dimensionalen Fall und ohne endlich-dimensionale Entsprechung ist die zusätzliche Forderung nach der Zulässigkeit einer stabilisierenden Rückführung im Sinne der verwendeten Systemklasse.

Gemäß den Ausführungen aus Abschnitt 3.2.1 folgt für ein System, dass einer der beiden äquivalenten Bedingungen aus Satz 10 genügt, auch die schwächere Eigenschaft der inneren Stabilität.

3.3 Steuerbarkeit

Ungeachtet einer speziellen Systemklasse handelt es sich bei den zueinander dualen Konzepten der Steuer- und Beobachtbarkeit um maßgebliche Struktureigenschaften dynamischer Systeme. Die beiden Eigenschaften geben Aufschluss über die Möglichkeit der zielgerichteten Einflussnahme auf die Dynamik eines spezifischen Systems beziehungsweise die Möglichkeit, dessen Zustand aus gemessenen Größen zu rekonstruieren. Dieser Abschnitt beinhaltet einen kleinen, zur Analyse der Steuer- und Beobachtbarkeit des Beispielsystems geeigneten Ausschnitt aus der reichhaltigen Theorie, die für unendlich-dimensionale Systeme zu diesem Themenkomplex existiert. Während der Grundgedanke der Steuer- und Beobachtbarkeit für endlich und unendlich-dimensionale Systeme übereinstimmt, liegt im Unendlich-dimensionalen im Detail eine komplexere und weniger geschlossene Theorie zur Definition und zum Nachweis dieser strukturellen Eigenschaften vor. Diese Situation spiegelt sich in der reinen Anzahl der Abhandlungen zur Steuer- und Beobachtbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme wider, aber auch in der Vielzahl und Diversität der propagierten Methoden. Da die im endlich-dimensionalen bekannte Dualität zwischen den Konzepten der Steuer- und Beobachtbarkeit im Unendlich-dimensionalen ebenfalls besteht, beschränken sich die folgenden Betrachtungen lediglich auf Aussagen zur Steuerbarkeit einer Klasse unendlich-dimensionaler Systeme. Die zur Formulierung eines dualen Systems zu wählenden Entsprechungen finden sich beispielsweise in Abschnitt C.3.2 oder auch in [Rus78] (S. 645) und [TW09] (S. 345). Darüber hinaus enthält [PW78] Betrachtungen zur Dualität insbesondere im Fall unbeschränkter Eingangsoperatoren sowie einen Überblick über verschiedene Ausprägungen der Steuer- und Beobachtbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme.

Einleitend werden die Definitionen der aus der Literatur bekannten Begriffe der exakten, der approximativen sowie der Null-Steuerbarkeit eingeführt. Die Nennung aus der Literatur bekannter und an dieser Stelle relevanter Kriterien zur Überprüfung der genannten Definitionen wird ergänzend in Abschnitt D.3.2 vorgenommen. Zudem enthält Abschnitt D.3 eine Auswahl von Quellen zur besagten Thematik, auf die sich die folgenden Ausführungen stützen.

Dieser Abschnitt enthält anschließend eine Analyse der Steuerbarkeit des Beispielsystems unter Anwendung der in Abschnitt D.3.2 aufgeführten Kriterien. Daraus geht das Fehlen der exakten Steuerbarkeit des Beispielsystems, aber auch dessen approximative Steuerbarkeit hervor.

Im Endlich-dimensionalen impliziert die Steuerbarkeit eines Systems stets auch dessen Stabilisierbarkeit. Im Unendlich-dimensionalen ist auch an dieser Stelle eine differenziertere Betrachtungsweise notwendig. Beispielsweise bedingt die approximative Steuerbarkeit eines Systems nicht zwingend dessen exponentielle Stabilisierbarkeit ([CZ95] (S. 228), Example 5.2.2). Daher erfolgt abschließend in Abschnitt 3.3.4 die Untersuchung der exponentiellen Stabilisierbarkeit und der exponentiellen Detektierbarkeit des Beispielsystems. Für Pritchard-Salamon-Systeme werden beide

Struktureigenschaften im Detail in Abschnitt C.3.6 eingeführt. Da die exponentielle Stabilisierbarkeit und die exponentielle Detektierbarkeit als Voraussetzung für weitere systemtheoretische Konzepte dienen, sind die beiden Systemeigenschaften nicht weniger bedeutsam als die Steuer- und Beobachtbarkeit eines Systems.

3.3.1 Definition der Steuerbarkeit

Der aus der Theorie endlich-dimensionaler Systeme bekannte Grundgedanke der Steuerbarkeit kann abgesehen von den mathematischen Details zunächst auf unendlich-dimensionale Systeme unverändert übertragen werden. Im Falle eines exakt steuerbaren unendlich-dimensionalen Systems lässt sich zu jeder beliebigen Kombination aus einem jeweils im Zustandsraum gelegenen Anfangs- und Endzustand ein Steuervektor finden, der in endlicher Zeit eine Überführung des betrachteten Systems vom gewählten Anfangszustand in den gewählten Endzustand bewirkt. Im Unendlich-dimensionalen gebräuchliche Ausprägungen des Begriffs der Steuerbarkeit sind zum Teil den Eigenheiten unendlich-dimensionaler Räume geschuldet. Darüber hinaus bedingt die Berücksichtigung unbeschränkter Eingangsoperatoren zusätzliche mathematische Vereinbarungen.

Im Folgenden wird anhand des Bildbereichs der Steuerbarkeitsabbildung zwischen drei unterschiedlichen Steuerbarkeitsbegriffen, deren Definitionen sich beispielsweise in [JP06] (S. 322), [TW09] (S. 344) finden, unterschieden.

Definition 12 (Steuerbarkeit) Es sei X ein Hilbertraum. $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bezeichnet den Systemoperator und B einen gemäß der Ausführungen aus Abschnitt D.3.1 zulässigen Eingangsoperator. Es sei $t_1 > 0$, dann ist

STB1) das Paar (A, B) exakt steuerbar in der Zeit t_1 , falls $\mathcal{R}(\mathcal{B}_{t_1}) = \mathcal{X}$;

STB2) das Paar (A, B) approximativ steuerbar in der Zeit t_1 , falls $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{B}_{t_1})} = \mathcal{X}$;

STB3) das Paar (A, B) null-steuerbar in der Zeit t_1 , falls $\mathcal{R}(\mathcal{B}_{t_1}) \supset \mathcal{R}(\Phi(t_1))$. □

Die Definition der innerhalb von Definition 12 auftretenden Steuerbarkeitsoperatoren \mathcal{B}_{t_1} findet sich in Abschnitt C.2.3. Eine anschauliche Gegenüberstellung der unterschiedlichen Steuerbarkeitsbegriffe lässt sich, ausgehend von der milden Lösung des abstrakten Cauchy-Problems, durchführen. Dem bereits geschilderten Grundgedanken der Steuerbarkeit folgend, wird ein Steuervektor $u \in L^2([0, t_1], \mathcal{U})$ gesucht, der in dem endlichen Zeitintervall $[0, t_1]$ eine Überführung des Systems von einem beliebigen Anfangszustand $x_0 \in \mathcal{X}$ in einen beliebigen Endzustand $x_1 \in \mathcal{X}$ bewirkt. Das Umstellen der Lösung des abstrakten Cauchy-Problems führt somit auf

$$x_1 - \Phi(t_1)x_0 = \int_0^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) B u(\tau) d\tau. \quad (3.48)$$

Die Einführung einer aus [Rus78] (S. 643) bekannten Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X} \\ (x_0, x_1) &\mapsto \mathcal{S}(x_0, x_1) = x_1 - \Phi(t_1) x_0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

sowie die Berücksichtigung des Steuerbarkeitsoperators \mathcal{B}_{t_1} zum Zeitpunkt $t = t_1$ erlaubt eine kompakte Notation. Falls ein System exakt steuerbar ist, muss zu jedem Paar $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$ ein $u \in L^2([0, t_1], \mathcal{U})$ existieren, sodass

$$\mathcal{S}(x_0, x_1) = \mathcal{B}_{t_1} u. \quad (3.50)$$

Da die Wahl von x_0 und x_1 innerhalb des Zustandsraums beliebig ist, umfasst der Bildbereich von \mathcal{S} im Allgemeinen den gesamten Zustandsraum. Folglich muss der Bildbereich des Steuerbarkeitsoperators zur Einhaltung von (3.50) ebenfalls dem gesamten Zustandsraum gleichen.

Die Definition der approximativen Steuerbarkeit, zu der es im Endlich-dimensionalen keine Entsprechung gibt, stimmt mit der Definition der exakten Steuerbarkeit strukturell überein. Der maßgebliche Unterschied betrifft das Bild der Steuerbarkeitsabbildung. Dieses umfasst im Fall der approximativen Steuerbarkeit nicht den gesamten Zustandsraum, liegt aber dicht im Zustandsraum. Folglich kann nicht zwingend zu jedem Paar aus $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$ ein Steuervektor gefunden werden, sodass (3.48) erfüllt wird. Allerdings existiert zu jedem derartigen Paar und einem beliebig kleinen $\epsilon > 0$ ein Steuervektor u_ϵ , sodass

$$\|\mathcal{S}(x_0, x_1) - \mathcal{B}_{t_1} u_\epsilon\|_{\mathcal{X}} < \epsilon. \quad (3.51)$$

Das im Fall der approximativen Steuerbarkeit dicht im Zustandsraum liegende Bild der Steuerbarkeitsabbildung garantiert, dass jedes Element des Zustandsraums in dem betrachteten Zeitintervall beliebig nah erreicht werden kann. Hinsichtlich praktischer Belange liegt damit eine eher geringfügige Einschränkung gegenüber der exakten Steuerbarkeit vor.

Anders als die beiden bisher betrachteten Steuerbarkeitsbegriffe liegt in der Definition der Null-Steuerbarkeit ein fixierter Endwert $x_1 = 0$ vor. Die zugrunde liegende Gleichung (3.48) vereinfacht sich damit zu

$$\mathcal{S}(x_0, 0) = -\Phi(t_1) x_0 = \int_0^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) B u(\tau) d\tau. \quad (3.52)$$

Eine beliebige Wahl von $x_0 \in \mathcal{X}$ kann auf der linken Seite der zuletzt aufgeführten Gleichung nur zu einem Element in $\mathcal{R}(\Phi(t_1) x_0)$ führen. Folglich kann die besagte Gleichung stets erfüllt werden, wenn $\mathcal{R}(\mathcal{B}_{t_1}) \supset \mathcal{R}(\Phi(t_1))$.

Die Null-Steuerbarkeit ist mit $x_1 = 0$ ein Spezialfall der exakten Steuerbarkeit, jedes exakt steuerbare System ist ebenfalls null-steuerbar und auch approximativ steuerbar. Verschiedene Bedingungen, in welchen Fällen der Rückschluss von der Null-Steuerbarkeit auf die exakte Steuerbarkeit zulässig ist, finden sich in [TW09] (S. 344). Darüber hinaus sind weiterführende Betrachtungen zu

den aufgeführten Steuerbarkeitsbegriffen in [Rus78] zu finden und für jede der drei Eigenschaften erweist sich die Existenz eines endlichen $t_1 > 0$ als ausreichend, um den jeweiligen Begriff ohne explizite Nennung der Zeitabhängigkeit zu definieren ([TW09] (S. 344)).

Definition 13 Falls ein Paar (A, B) in endlicher Zeit $t_1 > 0$ exakt/approximativ/null-steuerbar ist, dann ist das betreffende Paar exakt/approximativ/null-steuerbar. □

Für Systeme der Pritchard-Salamon-Klasse geht aus der Definition zulässiger Eingangsooperatoren (Definition 8) und insbesondere (2.117) aus **ZIO1** hervor, dass das Bild des Steuerbarkeitsoperators $\mathcal{R}(\mathcal{B}_{t_1})$ auf \mathcal{W} beschränkt ist. Falls es sich bei \mathcal{W} lediglich um eine dicht eingebettete echte Teilmenge von X handelt, kann keine exakte Steuerbarkeit im Sinne von Definition 12 vorliegen.

3.3.2 Steuerbarkeit des Beispielsystems

In diesem Abschnitt werden die in Abschnitt D.3.2 eingeführten Kriterien für die exakte und approximative Steuerbarkeit auf das Beispielsystem angewandt.

Exakte Steuerbarkeit des Beispielsystems

Die exakte Steuerbarkeit des Beispielsystems wird unter Berufung auf einige bereits gezeigte Eigenschaften dieses Systems untersucht. Das Beispielsystem wird durch eine exponentiell stabile analytische Halbgruppe repräsentiert. Der Eingangsooperator des Beispielsystems ist zulässig für diese Halbgruppe im Sinne von Definition 8. Demzufolge sind alle Voraussetzungen aus Satz 71 erfüllt und es kann unmittelbar die für exakte Steuerbarkeit notwendige Summierbarkeitsbedingung (D.51) überprüft werden. Mit einer Wahl von $\epsilon = 1$ folgt

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{1}{|\lambda_i|} = \sum_{i \in \mathbb{I}} \frac{1}{|\lambda_i|} = \sum_{i \in \tilde{\mathbb{I}}^+} \frac{1}{|\lambda_i|} + \sum_{i \in \mathbb{I}^-} \frac{1}{|\lambda_i|}. \quad (3.53)$$

Aus der Analyse der Eigenwerte des Beispielsystems in D.1.1 ist $\lambda_i \in \mathcal{O}(1)$ für $i \in \mathbb{I}^-$ bekannt. Bei der Folge $\{1/|\lambda_i|\}_{i \in \mathbb{I}^-}$ handelt es sich demnach nicht um eine Nullfolge und somit kann die zugehörige Reihe nicht konvergieren. Folglich erfüllt das Beispielsystem eine notwendige Bedingung für exakte Steuerbarkeit nicht und ist damit auch nicht exakt steuerbar.

Neben der Anwendung von Satz 71 ist auch die Überprüfung der übrigen aufgeführten Kriterien zur exakten Steuerbarkeit denkbar, allerdings wären dazu entweder die Kenntnis über die Entwicklungskoeffizienten des Eingangsooperators oder der Grad der Unbeschränktheit des Eingangsooperators einzubringen. Dieser zusätzliche Aufwand ist im Fall des Beispielsystems nicht notwendig, da allein die Eigenwerte des Beispielsystems den Schluss auf den Mangel an exakter Steuerbarkeit

erlauben. Die Existenz des an dieser Stelle ausschlaggebenden endlichen Häufungspunkts der Eigenwerte folgt in erster Linie aus der angenommenen Kelvin-Voigt-Dämpfung. In [RW00] werden für eine Klasse von Systemen, beschrieben durch Bewegungsgleichungen der Form

$$\frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} + 2cS^\rho \frac{\partial w(t)}{\partial t} + Sw(t) = f(t), \quad c \geq 0, \quad \rho \in [0,1], \quad (3.54)$$

Betrachtungen hinsichtlich der Auswirkung verschiedener Dämpfungsmodelle in Abhängigkeit von ρ auf die exakte Steuerbarkeit angestellt. Das Beispielsystem kann unter Vernachlässigung der viskosen Dämpfung in diese Systemklasse eingeordnet werden. Stark vereinfacht lässt sich zu derartigen Systemen festhalten, dass die Annahme von Dämpfungsmodellen wachsender Ordnung die im Fall des ungedämpften Systems $\rho = 0$ gegebenenfalls vorhandene exakte Steuerbarkeit negiert. Abschließend kann aus [RW00] entnommen werden, dass zahlreiche unendlich-dimensionale Systeme insbesondere im Fall von Eingangsoperatoren mit endlich-dimensionalem Definitionsbereich nicht exakt steuerbar sind.

Approximative Steuerbarkeit des Beispielsystems

Aussagen über die approximative Steuerbarkeit des Beispielsystems werden im Folgenden auf Basis von Satz 73 **AS3**) getroffen und erfordern daher die Kenntnis über die beispielsweise in (2.128) aufgeführten Entwicklungskoeffizienten

$$b_i^* = -\alpha_{\text{In}} \overline{w_i^*} \lambda_i \delta_{v^r} \left(\frac{\partial \psi_{|i|}}{\partial v} \right), \quad i \in \mathbb{I}^+ \quad (3.55)$$

des Eingangsoperators, der seinerseits einen Eingriff am freien Ende des trimorphen Biegewandlers repräsentiert. Unter der Annahme $\alpha_{\text{In}} \overline{w_i^*} \lambda_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{I}^+$ und der Kenntnis, dass die örtliche Änderung von $\psi_{|i|}$ für alle $i \in \mathbb{I}^+$ am rechten Rand $\frac{\partial \psi_{|i|}(v)}{\partial v} \big|_{v=v^r}$ stets von Null verschieden ist, folgt

$$b_i^* \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}^+ \quad (3.56)$$

und damit die modale Steuerbarkeit des Beispielsystems. Es sei weiterhin angenommen, dass für nahezu alle Parameterkombinationen des Beispielsystems $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i, j \in \mathbb{I}^+$ gilt. Dann folgt aus Satz 73 **AS3**) die approximative Steuerbarkeit des Beispielsystems. Im Hinblick auf das vorliegende System kann diese Eigenschaft für alle praktischen Belange als ausreichend angesehen werden.

3.3.3 Beobachtbarkeit des Beispielsystems

Unter Ausnutzung der Dualität entspricht das Vorgehen zur Analyse der Beobachtbarkeit des Beispielsystems demjenigen im Fall der Steuerbarkeit. Entsprechend Gleichung (2.140) aus Abschnitt 2.3.3 gilt für die Entwicklungskoeffizienten des Ausgangsoperators $c_i^* = Cv_i = v_i^* \delta_{v_{\text{Mess}}}(\psi_{|i|})$. Damit sind alle Moden des Beispielsystems beobachtbar, für die $\psi_{|i|}(v_{\text{Mess}}) \neq 0$ gilt.

Aufgrund von $\psi_{|i|}(L) \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{I}$ sind insbesondere dann alle Moden des trimorphen Biegewandlers beobachtbar, wenn durch die Wahl $v_{\text{Mess}} = v^r = L$ eine Messung am rechten Rand des Beispielsystems angenommen wird.

Aus praktischer Sicht ist anzunehmen, dass auch eine Messung nahe des rechten Randes des Beispielsystems auf die Beobachtbarkeit aller im Hinblick auf den Reglerentwurf relevanten Moden führt.

3.3.4 Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit des Beispielsystems

Für allgemeine Pritchard-Salamon-Systeme erfolgt die Einführung der exponentiellen Stabilisierbarkeit und exponentiellen Detektierbarkeit zusammen mit einer Diskussion der auf diesen Struktureigenschaften aufbauenden weiterführenden Systemeigenschaften in Abschnitt C.3.6.

Aus der exponentiellen Stabilität des Beispielsystems folgt unmittelbar auch dessen beschränkte und damit auch zulässige exponentielle Stabilisierbarkeit und eine ebensolche Detektierbarkeit im Sinne von Definition 100. Diese Aussage folgt mit einer zu Null identischen Rückführung unmittelbar aus Definition 100, gleichsam ist die Anwendung von Lemma 5.3.4 aus [Cur92b] (S. 187) auf das Beispielsystem denkbar.

Entsprechend der Ausführungen aus Abschnitt C.3.6 gehört das Beispielsystem damit auch der Callier-Desoer-Klasse an, und somit besteht die Äquivalenz zwischen der exponentiellen Stabilität und der Ein-/Ausgangsstabilität.

Ferner folgt für das Beispielsystem aus dem Vorhandensein der beiden Struktureigenschaften die Zerlegbarkeit des Spektrums in der in Abschnitt C.3.6 geschilderten Weise, wobei diese Aussage aufgrund der exponentiellen Stabilität des Beispielsystems als trivial anzusehen ist. Entsprechendes gilt auch für die Existenz einer koprimen Zerlegung der Übertragungsfunktion des Beispielsystems.

Als wichtige Konsequenz der exponentiellen Stabilisierbarkeit und exponentiellen Detektierbarkeit des Beispielsystems folgt entsprechend Corollary 22. aus [Log92] (S. 124) die Existenz eines endlich-dimensionalen stabilisierenden Reglers für das Beispielsystem.

4 Steuerungs- und Regelungskonzepte

Das Kapitel Steuerungs- und Regelungskonzepte zeigt anhand des Beispielsystems ein systematisches Vorgehen zur Synthese endlich-dimensionaler Regler für gewisse Klassen unendlich-dimensionaler Systeme. Innerhalb der vorgeschlagenen Vorgehensweise findet der unendlich-dimensionale Charakter einer Strecke lediglich implizit durch ihre Zugehörigkeit zu einer geeigneten Modellschar Berücksichtigung. Die Formulierung einer derartigen Modellschar basiert dabei auf einer endlich-dimensionalen Approximation der Strecke. Dieser Ansatz generiert unmittelbar Anforderungen an die Robustheit verwendeter Regler und legt damit die Verwendung von robusten Reglersyntheseverfahren nahe, die auf natürliche Weise die Handhabung geeigneter Modellscharen erlauben. Neben der essentiellen a priori Garantie der robusten Stabilität ist im Hinblick auf die performanceorientierte Regelung durch ein Reglersyntheseverfahren idealerweise auch die robuste Performance eines Regelkreises vorab zu gewährleisten.

Das Erreichen der erforderlichen beziehungsweise gewünschten Robustheitseigenschaften setzt eine geeignete und konsistente Wahl von Approximationsverfahren, Unsicherheitsbeschreibung und Reglersyntheseverfahren voraus. Neben den genannten Kriterien resultieren Auswahl und Kombination der an dieser Stelle verwendeten Verfahren zusätzlich aus einem Fokus auf praktischer Relevanz, gepaart mit einfacher Handhabbarkeit. Ein Anspruch auf praktische Relevanz bedingt dabei mit Blick auf die Implementierbarkeit die Einschränkung auf endlich-dimensionale Regler. Diese Einschränkung motiviert unmittelbar die Frage nach der Existenz stabilisierender endlich-dimensionaler Regler. Zudem führt die Verwendung endlich-dimensionaler Regler für unendlich-dimensionale Strecken auf eine im Endlich-dimensionalen nicht vorhandene Klassifizierungsmöglichkeit der Reglersyntheseverfahren.

Hinsichtlich unendlich-dimensionaler Strecken wird gewöhnlich zwischen Reglersyntheseverfahren unterschieden, die auf einer endlich-dimensionalen Approximation der Strecke beruhen und zwischen jenen Verfahren, denen zum Zwecke der Reglersynthese das unendlich-dimensionale System zugrunde liegt. Üblicherweise werden die beiden Vorgehensweisen, angelehnt an den Zeitpunkt der Approximation, als „early-lumping“ oder indirekte beziehungsweise „late-lumping approaches, direct approaches“ oder direkte Ansätze bezeichnet ([Sch83]). Die hier verfolgten Ansätze lassen sich als indirekte Verfahren charakterisieren.

Unabhängig vom Zeitpunkt der Approximation folgen aus dem Bestreben, ein unendlich-dimensionales System mittels eines endlich-dimensionalen Reglers zu stabilisieren, stets gewisse Anforderungen hinsichtlich der Robustheit der verwendeten Regler. Daraus kann der Schluss gezogen werden, dass die Stabilisierung unendlich-dimensionaler Systeme bevorzugt mittels Regelungsverfahren durchzuführen ist, die per se ein Maß an robuster Stabilität gewährleisten. Eine wohlbekannte Klasse von Reglern, die unter Voraussetzung eines geeignet formulierten Entwurfsproblems die robuste Stabilität des geschlossenen Regelkreises gegenüber bestimmten Modellunsicherheiten garantieren, sind \mathcal{H}_∞ -optimale Regler. Bekanntermaßen ist die Berücksichtigung von

robusten Performance-Anforderungen im Rahmen der Synthese \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler nur sehr eingeschränkt möglich. Um innerhalb des Entwurfsproblems eine systematischere Formulierung robuster Performance-Anforderungen und vielfältigere Unsicherheitsbeschreibungen zu ermöglichen, wird im Folgenden neben der \mathcal{H}_∞ -Methodik die μ -Synthese als Reglersyntheseverfahren eingesetzt.

Einleitend beinhaltet das vorliegende Kapitel in Abschnitt 4.1 einen Überblick über die Literatur zur Synthese \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler mittels direkter Methoden und über Arbeiten zur Existenz stabilisierender endlich-dimensionaler Regler für Klassen unendlich-dimensionaler Systeme. Die Erkenntnisse aus dem erstgenannten Themenbereich unterstreichen die Sinnhaftigkeit der Anwendung indirekter Methoden, während der letztgenannte Themenbereich eine theoretische Grenze bei der Regelung unendlich-dimensionaler Systeme mittels endlich-dimensionaler Regler zieht.

Die anschließenden Ausführungen in Abschnitt 4.2 zur endlich-dimensionalen Approximation begründen einführend, gestützt auf Satz 11, die Aussagekraft der in Abschnitt E.1.3 definierten Gap-Metrik als Abstandsmaß. Darauf folgen die Vorstellung allgemeiner projektionsbasierter Approximationsansätze sowie die Einführung der modalen Approximation als ein Spezialfall allgemeiner Petrov-Galerkin-Verfahren. Eine Betrachtung der Konvergenzeigenschaften der modalen Approximation qualifiziert das Verfahren als geeignet zur Anwendung auf das Beispielsystem und untermauert theoretisch die nachfolgende Generierung einer endlich-dimensionalen Approximation des Beispielsystems mittels modaler Approximation.

Nachfolgend thematisiert Abschnitt 4.3 die Formulierung verschiedener Modellscharen zur Reglersynthese für das Beispielsystem und zur anschließenden Analyse der resultierenden Regelkreise. Die Modellscharen basieren jeweils auf einer endlich-dimensionalen nominellen Strecke und normbeschränkten multiplikativen Modellunsicherheiten.

Mit dem Syntheseproblem \mathcal{H}_∞ -suboptimaler Regler und der μ -Synthese definiert Abschnitt 4.4 die beiden an dieser Stelle eingesetzten Reglersyntheseverfahren. Die Wahl der Verfahren begründet sich dabei durch die eingangs genannten Kriterien.

In Abschnitt 4.5 erfolgt die Synthese einer Modellfolgeregelung sowie einer Trajektorienfolgeregelung für das Beispielsystem. Dabei kommen die in Abschnitt 4.4 erläuterten Verfahren zur Reglersynthese zum Einsatz. Der Entwurf der besagten Regler basiert auf der in Abschnitt 4.2 generierten, endlich-dimensionalen nominellen Strecke, die Berücksichtigung des unendlich-dimensionalen Systems wird durch eine der in Abschnitt 4.3 formulierten Modellscharen gewährleistet. Alle resultierenden Regler sind endlich-dimensional. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass aus dem Blickwinkel der verwendeten Methoden des robusten Reglerentwurfs der in der angrenzenden regelungstechnischen Literatur zu findende Begriff des „Spillover-Effects“ als obsolet anzusehen ist ([BC88a], [BCS88] (S. 185)). Folglich wird dieser Begriff innerhalb dieser Arbeit nicht verwendet.

Ergänzend thematisiert Abschnitt E.3 im Rahmen dieser Arbeit relevante, charakteristische Eigenschaften geschlossener Regelkreise. Zur Überprüfung von Regelkreisen hinsichtlich jeder dieser Eigenschaften wird ebenfalls in Abschnitt E.3 jeweils ein einfach zu handhabendes Kriterium

eingeführt. Dabei erfolgt insbesondere auch die Einführung der μ -Analyse zur Überprüfung der robusten Performance geschlossener Regelkreise sowie im Hinblick auf die zur Reglersynthese eingesetzte μ -Synthese.

Abschnitt 4.6 beinhaltet die modellbasierte Analyse der aus dem Beispielsystem und den vorab entworfenen Reglern resultierenden Regelkreise hinsichtlich der in Abschnitt E.3 definierten Eigenschaften. Darüber hinaus erfolgt die Darstellung und Diskussion der Ergebnisse der Anwendung der verschiedenen Regler auf das reale System. Insbesondere die ausgezeichneten Resultate aus der Anwendung der entworfenen Regler auf die reale Strecke unterstreichen abschließend die Eignung des gesamten vorgeschlagenen Vorgehens zum Entwurf endlich-dimensionaler Regler für das Beispielsystem im Speziellen, aber auch für die behandelten Klassen unendlich-dimensionaler Systeme im Allgemeinen.

4.1 Ausgesuchte Betrachtungen zum Stand der Regelung unendlich-dimensionaler Systeme

Der Regelung linearer unendlich-dimensionaler Systeme widmet sich eine große Anzahl von Publikationen, und die darin geschilderten Regelungsverfahren stehen denen aus dem Bereich endlich-dimensionaler Systeme in ihrer Vielfalt in nichts nach. Allein die kaum zu überschauende Anzahl der thematisch in diesen Bereich fallenden Abhandlungen macht die Erstellung einer strukturierten sowie vollständigen Literaturübersicht schwierig und eine Selektion notwendig.

Die Betrachtungen konzentrieren sich an dieser Stelle zum einen auf Literatur zur Synthese \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler mittels direkter Methoden und zum anderen auf Arbeiten zur Existenz stabilisierender endlich-dimensionaler Regler für Klassen unendlich-dimensionaler Systeme. Die Erkenntnisse aus dem erstgenannten Themenbereich unterstreichen die Sinnhaftigkeit der Anwendung einer indirekten Methode, während der letztgenannte Themenbereich eine theoretische Grenze bei der Regelung unendlich-dimensionaler Systeme mittels endlich-dimensionaler Regler zieht.

4.1.1 \mathcal{H}_∞ -optimale Regelung unendlich-dimensionaler Systeme mittels direkter Ansätze

Hinsichtlich der Synthese \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler für unendlich-dimensionale Systeme finden sich in der Literatur unterschiedliche Herangehensweisen. Zunächst seien einige Ansätze genannt, die aufgrund der Betrachtung der Übertragungsfunktion des zu regelnden Systems den Frequenzbereichsmethoden und dabei insbesondere den direkten Ansätzen zuzuordnen sind. In einer Reihe von Arbeiten wird die Tatsache ausgenutzt, dass sich verschiedene \mathcal{H}_∞ -Optimierungsprobleme in die Berechnung der Norm sogenannter „skew Toeplitz“ Operatoren ([BFT88]) umformulieren lassen. Damit wird letztendlich die Berechnung der optimalen \mathcal{H}_∞ -Performance sowie zugehöriger, im Allgemeinen unendlich-dimensionaler Regler auf die Berechnung von Eigenwerten bzw. Singulär-

werten zugeordneter Operatoren mittels der Lösung einer endlichen Anzahl linearer Gleichungen zurückgeführt. Im Fall von 1-Block \mathcal{H}_∞ -Optimierungsproblemen, die äquivalent zum sogenannten Nehari-Problem sind, basiert die genannte Umformulierung auf Sarasons Theorem ([FÖT96], [Özb92]). Die Formulierung allgemeinerer \mathcal{H}_∞ -Optimierungsprobleme wie dem 2-Block- oder dem 4-Block-Problem erfolgt auf Basis des beispielsweise in [FÖT96], [BN+10] oder [Pau03] aufgeführten „Sz.-Nagy-Foias Commutant Lifting Theorems“, das seinerseits eine Generalisierung von Sarasons Theorem darstellt. Hinsichtlich der Anwendung der „skew Toeplitz“-Methodik und ihres Entwicklungsprozesses im regelungstechnischen Kontext finden sich zahlreiche Arbeiten. In einleitenden Werken werden Fragestellungen hinsichtlich der optimalen Sensitivität von SISO-Totzeitsystemen ([FTZ85], [TZF86], [FTZ87]) sowie allgemeinen unendlich-dimensionalen SISO-Systemen ([TZF86]), jeweils formuliert in Form eines 1-Block-Problems, betrachtet. Daran schließen sich Untersuchungen zur „Mixed-Sensitivity“-Minimierung für verschiedene Klassen unendlich-dimensionaler Systeme unter der Verwendung rationaler Gewichtungsfunktionen und beschrieben in Form von 2-Block oder allgemeiner 4-Block Problemen an [FT88b; FT88a; ÖT89; ÖST90b; ÖST90a; ÖT90; ÖST92; ÖST93; FY94; Tan95; FÖT96]. Das Bemerkenswerte an der in den genannten Arbeiten verfolgten Methodik ist die Berechnung unendlich-dimensionaler \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler für unendlich-dimensionale Strecken mittels des Lösen einer endlichen Anzahl linearer Gleichungen ohne jegliche Form der Approximation. Ein vergleichbares Vorgehen auf Basis der sogenannten „Adamjan-Arov-Krein“-Theorie findet sich in [FÖT96] und den dort aufgeführten Literaturverweisen.

Die praktische Umsetzung der mittels dieser Frequenzbereichsmethodik bestimmten unendlich-dimensionalen Regler erfordert eine endlich-dimensionale Approximation des Reglers. Dieser Thematik widmen sich beispielsweise [EÖT91] oder mit speziellem Bezug zu einem Euler-Bernoulli-Balken [Len+89; Len+91] und [Tan91]. Für die in den letztgenannten Arbeiten gezeigten Beispiele und den dortigen, in gewisser Hinsicht inversions-basierten Reglerentwürfen ergibt sich unabhängig von einem direkten oder indirekten Ansatz bei identischer Ordnung der Approximation ein identischer endlich-dimensionaler Regler.

Aktuelle Publikationen generalisieren die ursprünglich zur Bestimmung der optimalen \mathcal{H}_∞ -Performance bei der Regelung reiner Totzeit-Systeme aufgestellten Zhou-Khargonekar Formel auf das 1-Block-Problem ([YHT96]), das 2-Block-Problem ([HYT00]) oder das 4-Block Problem ([Kas05]) für endlich-dimensionale erweiterte Strecken in Kombination mit einer skalaren verlustfreien („inner“, [Rai94] (S. 116)) Funktion. Die in diesem Bereich genannten Arbeiten greifen den ursprünglichen Gedanken des „skew Toeplitz“-Ansatz auf und ermöglichen so, in Kombination mit Zustandsraumtechniken, die Lösung bestimmter \mathcal{H}_∞ -Optimierungsprobleme für spezielle unendlich-dimensionale Systeme auf die Lösung algebraischer Riccati-Gleichungen und einer Rang Bedingung bezüglich einer zugeordneten Hamiltonischen Matrix ([Fuh90], [Kas05], [KY08a]) zurückzuführen.

Die bisher genannten Ansätze zum Entwurf \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler setzen einschränkend eine bestimmte Struktur des zugrunde liegenden unendlich-dimensionalen Systems voraus. Insbesondere setzen diese Verfahren im Entwurfsproblem eine erweiterte Strecke mit einer endlichen Anzahl in-

stabiler Pole voraus. Darüber hinaus werden rationale Gewichtungsfunktionen, also Gewichtungsfunktionen mit einem endlichen MacMillan-Grad angenommen ([ÖST93], [Kas05]). Eine Verallgemeinerung der Methoden auf eine unendliche Anzahl instabiler Pole findet sich in [KY08b]. Es lässt sich allerdings feststellen, dass die Überführung eines beispielsweise durch partielle Differentialgleichungen beschriebenen Systems in eine für den Reglerentwurf mittels der geschilderten Methodiken geeignete Form mit einem im Allgemeinen nicht unerheblichen Aufwand verbunden ist. Dennoch finden die beschriebenen Frequenzbereichsverfahren Eingang in aktuelle regelungstechnische Problemstellungen wie beispielsweise die Regelung von Kommunikationsnetzwerken. Derartige Problemstellungen kommen dem ursprünglichen Anwendungsgebiet der geschilderten Verfahren, der Regelung totzeitbehafteter Strecken, im Kern sehr nah ([Özb06]).

Parallel zu den Frequenzbereichsmethoden findet eine Entwicklung der Zustandsraummethoden zur \mathcal{H}_∞ -optimalen Regelung unendlich-dimensionaler Systeme statt. Einen frühen Überblick über die Aktivitäten in diesem Bereich bieten [Cur90a] und [Cur91]. Eine direkte Verallgemeinerung der aus dem Endlich-dimensionalen bekannten Zustandsraummethoden zur \mathcal{H}_∞ -optimalen Regelung auf unendlich-dimensionale Systeme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren findet sich in [BB93]. Eine Generalisierung auf die ursprünglich im Hinblick auf den Entwurf und die Anwendung linear-quadratischer Regler formulierte Klasse der Pritchard-Salamon-Systeme wird beispielsweise in [Kau92b; Kau93] diskutiert. Damit steht für eine Klasse unendlich-dimensionaler Systeme mit im gewissen Rahmen unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren eine Parametrierung \mathcal{H}_∞ -suboptimaler Regler über die Lösung zweier gekoppelter operatorwertiger Riccati-Gleichungen zur Verfügung. Die Verallgemeinerung des Entwurfs linear-quadratischer Regler mittels der stabilisierenden Lösung einer zugeordneten Riccati-Gleichung auf die sehr allgemeine Klasse der korrekt gestellten Systeme findet sich in [Sta97; Sta98e]. Eine konsequente Erweiterung der Zustandsraummethoden zum Entwurf \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler auf Basis der Lösung operatorwertiger Riccati-Gleichungen auf korrekt gestellte Systeme erfolgt in [Sta98c; Sta98d] sowie [MS02; Mik02].

Ähnlich wie die zur Frequenzbereichsmethodik aufgeführten Arbeiten thematisieren die hinsichtlich der Zustandsraummethodiken zur \mathcal{H}_∞ -optimalen Regelung zitierten Arbeiten den Entwurf von Reglern am unendlich-dimensionalen System, d.h. der Reglerentwurf wird ohne vorherige endlich-dimensionale Approximation des unendlich-dimensionalen Systems durchgeführt. Die Zustandsraummethodiken setzen keine Gewichtungsfunktionen mit endlichem MacMillan-Grad voraus, eine Bestimmung der Lösung des \mathcal{H}_∞ -Problems anhand einer endlichen Anzahl von Gleichungen, die für stabile Systeme lediglich von dem besagten Grad der Gewichtungsfunktionen abhängt, ist demnach nicht zu erwarten. Im Gegensatz zu den Frequenzbereichsmethoden können die Zustandsraummethoden daher als allgemeiner und eher klassenbezogen denn als fallspezifisch angesehen werden, zudem ermöglichen sie eine elegante Verallgemeinerung der aus dem endlich-dimensionalen bekannten Theorie auf eine sehr direkte Weise ([Kau93]). Aufgrund der im Allgemeinen nicht ohne Schwierigkeiten zu lösenden operatorwertigen Riccati-Gleichungen kann die praktische Anwendbarkeit dieser Methoden zum Entwurf \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler für unendlich-dimensionale Systeme dennoch als eher eingeschränkt angesehen werden.

Ansätze zur Approximation der Lösung der unendlich-dimensionalen Riccati-Gleichungen des \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems durch eine im starken Sinne konvergierende Folge von Lösungen endlich-dimensionaler Riccati-Gleichungen und damit der Brückenschlag zu einer praktikablen Methodik wird beispielsweise in [IM98] oder [XB99a; XB99b] aufgezeigt. Eine Folge endlich-dimensionaler Riccati-Gleichungen wird dabei mittels eines Galerkin-Ansatzes bezüglich des verallgemeinerten unendlich-dimensionalen Systems konstruiert, für das beschränkte Eingänge vorausgesetzt werden. Mit den letztendlich resultierenden endlich-dimensionalen Reglern lässt sich im geschlossenen Regelkreis eine Performance erzielen, die beliebig nah an die durch den Einsatz eines unendlich-dimensionalen Reglers erzielbare Performance heranreicht. Da die Verwendung eines Galerkin-Ansatzes zur Approximation des verallgemeinerten unendlich-dimensionalen Systems einer endlich-dimensionalen Approximation vor der Reglersynthese entspricht und damit die eigentliche Berechnung des Reglers an einem endlich-dimensionalen System erfolgt, lässt sich eine gewisse Nähe der geschilderten Ansätze zu den indirekten Ansätzen feststellen.

Die bislang aufgeführten Methoden zur Bestimmung \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler beinhalten allesamt sehr reizvolle theoretische Aspekte. Aus einer anwendungsorientierten Betrachtungsweise heraus lassen sich hinsichtlich der praktischen Nutzbarkeit allerdings jeweils verschiedene Einschränkungen ausmachen. Die als Frequenzbereichs-Methoden klassifizierten Verfahren erweisen sich als sehr fallspezifisch, besitzen einige Einschränkungen hinsichtlich der erweiterten Strecke und weisen darüber hinaus einen nicht unerheblichen Aufwand bei der Formulierung und Lösung des Entwurfsproblems auf. Zudem kann eine in letzter Konsequenz nicht zu umgehende endlich-dimensionale Approximation des resultierenden \mathcal{H}_∞ -optimalen Reglers in gewissen Fällen auf einen identischen Regler führen wie ein indirekter Ansatz. Die Zustandsraum-Methoden dagegen umfassen umfangreiche und praktisch relevante Systemklassen, weisen allerdings im Allgemeinen schwer zu lösende Synthesegleichungen in Form operatorwertiger Riccati-Gleichungen auf. Die in der Literatur propagierten Approximationsansätze für diese Art von Gleichungen erlauben zum Teil eine beliebig gute Annäherung an die mittels unendlich-dimensionaler Regler erzielbare Performance, weisen gleichzeitig aber eine starke Analogie zu den Approximationsansätzen im Fall eines indirekten Ansatzes auf.

Die Abwägung des im Zuge der Anwendung direkter Verfahren auftretenden Aufwandes und Problemstellungen mit den diesen Verfahren gegenüber indirekten Verfahren inherenten Vorteilen bedingen an dieser Stelle die Wahl indirekter Methoden zur Reglersynthese. Die Anwendung indirekter Methoden ist mit einem wesentlich geringeren mathematischen Aufwand verbunden und bietet gleichzeitig hervorragende Flexibilität im Hinblick auf die Formulierung verschiedener Entwurfsprobleme. Darüber hinaus können die Werkzeuge zur Lösung endlich-dimensionaler \mathcal{H}_∞ -Entwurfsprobleme oder μ -Synthese-Probleme als ausgereift und praxiserprobt angesehen werden. Zudem lässt sich auf Basis verschiedener Annahmen zeigen ([Mor01]), dass für bestimmte Klassen unendlich-dimensionaler Systeme mittels eines endlich-dimensionalen \mathcal{H}_∞ -optimalen Reglers nicht nur die Stabilisierung der Strecke möglich ist, sondern dass auch ein Performance-Level im Regelkreis zu erreichen ist, der dem durch einen Entwurf am unendlich-dimensionalen System erzielbaren Maß an Performance beliebig nah kommt.

4.1.2 Stabilisierbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme mittels endlich-dimensionaler Regler

Für eine überwiegende Anzahl praktisch relevanter unendlich-dimensionaler Systeme lässt sich festhalten, dass jeder zugehörige Regler bereits aus Gründen der Implementierbarkeit eine endlich-dimensionale Realisierung aufweisen sollte. Daraus ergeben sich bereits einige sehr interessante Fragestellungen, angefangen mit der Überlegung, in welchen Fällen die Stabilisierung eines unendlich-dimensionalen Systems mittels eines endlich-dimensionalen Reglers grundsätzlich überhaupt möglich ist. Auf Basis algebraischer Konzepte wird in [Vid87] die Existenz endlich-dimensionaler stabilisierender Regler für eine große Klasse unendlich-dimensionaler System gezeigt, deren Übertragungsfunktionen einem bestimmten Ring angehören und als Elemente dieses Rings sowohl eine links als auch eine rechts kopprime Faktorisierung und eine endliche Anzahl von Polen endlicher Ordnung in der rechten s -Halbebene aufweisen.

Für Systeme der Pritchard-Salamon-Klasse knüpft Corollary 22. aus [Log92] (S. 124) die Existenz eines endlich-dimensionalen stabilisierenden Reglers für eine Strecke an die zulässige Stabilisierbarkeit und zulässige Detektierbarkeit eines derartigen Systems. Eigenschaften von gleichzeitig exponentiell stabilisierbaren und exponentiell detektierbaren Pritchard-Salamon-Systemen werden in Abschnitt C.3.6 thematisiert. Hier sei lediglich darauf verwiesen, dass derartige Systeme der Callier-Desoer-Klasse angehören und ihre Übertragungsfunktionen über eine höchstens endliche Anzahl von instabilen Polen verfügen ([Cur90b], [Cur92c]). Einige weitere Betrachtungen hinsichtlich der Verwendung endlich-dimensionaler Regler für unendlich-dimensionale Systeme mit Übersichtscharakter finden sich in [Cur92a]. Für das durch eine exponentiell stabile, analytische Halbgruppe beschriebene Beispielsystem wird in Abschnitt 3.3.4 sowohl die exponentielle Stabilisierbarkeit als auch die exponentielle Detektierbarkeit festgestellt. Daher existiert gemäß Corollary 22. aus [Log92] (S. 124) ein endlich-dimensionaler stabilisierender Regler für das Beispielsystem.

4.2 Endlich-dimensionale Approximation unendlich-dimensionaler Systeme

Dieser Abschnitt thematisiert die endlich-dimensionale Approximation Σ_N eines nicht zwingend unendlich-dimensionalen Systems Σ . Das Vorgehen bei der Approximation von Σ durch ein System Σ_N orientiert sich in der Regel am Verwendungszweck von Σ_N . In dieser Arbeit dient Σ_N in erster Linie als nominelles System einer Modellschar, die bei der Reglersynthese für Σ und der Robustheitsanalyse zugehöriger geschlossener Regelkreise verwendet wird. Im Vordergrund bei der Erzeugung von Σ_N steht daher die Frage, unter welchen Bedingungen die Approximation eines unendlich-dimensionalen Systems mittels einer endlich-dimensionalen Approximation im Hinblick auf die Synthese robuster Regler sinnvoll erfolgen kann. Hinsichtlich grundlegender Zielsetzungen bei der Approximation dynamischer Systeme sei auf die weiterführenden Betrachtungen in [Ant05] verwiesen.

Um die Anforderungen an ein Approximationsverfahren in dem geschilderten Kontext zu definieren, wird einleitend die Eignung der in Abschnitt E.1.3 definierten Gap-Metrik als Abstandsmaß zwischen einem System und einer zugehörigen Approximation diskutiert und begründet. Im Hinblick auf das Beispielsystem findet dabei insbesondere der Spezialfall stabiler Systeme Berücksichtigung, für den eine Äquivalenz zwischen der Gap-Metrik und der ∞ -Norm besteht. Für derartige Fälle leitet sich daraus die Erkenntnis ab, dass ein nominelles System mittels eines Approximationsverfahrens zu generieren ist, das die Konvergenz in der ∞ -Norm gewährleistet und damit auch eine Bemessung des Approximationsfehlers in der ∞ -Norm erlaubt. Damit wird die Basis gelegt, um in Abschnitt 4.3 eine Modellschar auf Basis des nominellen Modells und einer im Sinne der ∞ -Norm beschränkten Unsicherheit so zu formulieren, dass das unendlich-dimensionale System Element der Modellschar ist.

Da sich die nachfolgenden Betrachtungen auf projektionsbasierte Approximationen konzentrieren, schließt sich an die Einführung eines geeigneten Abstandsmaßes die Definition relevanter grundlegender Begrifflichkeiten aus dem Bereich derartiger Verfahren an. Die Allgemeinheit der Betrachtungen wird durch die Festlegung der Voraussetzungen an die betrachteten Systeme eingeschränkt, dabei werden insbesondere Pritchard-Salamon-Systeme mit diagonalisierbaren Systemoperatoren angenommen.

Mit dem Ziel, das Verfahren der modalen Approximation mit ausreichend Tiefe für die Anwendung auf das Beispielsystem einzuführen, enthält der Abschnitt über die Einführung und Einordnung des verwendeten Approximationsverfahrens einleitend die Erzeugung endlich-dimensionaler Zustandsraumdarstellungen mittels der Petrov-Galerkin-Verfahren („Non-standard Galerkin Method“, ([EG04])). Als ein Spezialfall eines Petrov-Galerkin-Verfahrens wird schließlich das Vorgehen im Fall der modalen Approximation vorgestellt und der Zusammenhang zwischen diesem Spezialfall der Petrov-Galerkin-Verfahren und den Eigenprojektionen von Σ hergestellt. Neben der Approximation von Σ in Zustandsraumdarstellung wird das sehr geradlinige Vorgehen zur Approximation der Übertragungsfunktion und des Hankel-Operators von Σ gezeigt. Eine kurze Betrachtung der Konvergenz sowie der Fehlerschranken der modalen Approximation mit unmittelbarem Bezug zum Beispielsystem erbringt den Nachweis der Eignung dieses Verfahrens zur Erzeugung einer endlich-dimensionalen Approximation des Beispielsystems.

Im Anschluss an die theoretische Einführung und Betrachtung der Eigenschaften der modalen Approximation erfolgt die Anwendung des Verfahrens auf das Beispielsystem. Die Vorstellung der zugehörigen Resultate erfolgt im Frequenzbereich. Neben der unendlich-dimensionalen Strecke wird dabei auch die gemessene Übertragungsfunktion des realen Beispielsystems berücksichtigt. Die Beurteilung der Qualität einer Approximation basiert hier in erster Linie auf den frequenzabhängigen relativen Abweichungen zwischen den Übertragungsfunktionen von Σ sowie Σ_{Mess} auf der einen Seite und Σ_N auf der anderen Seite. Die Verwendung dieses Maßes ist dem Ansatz zur Formulierung einer Modellschar in 4.3 geschuldet.

4.2.1 Die Gap-Metrik als Abstandsmaß

Im Folgenden werden die Konvergenzeigenschaften einer Folge $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ für $N \rightarrow \infty$ definiert, die G_N und damit das zugehörige System Σ_N zu einer im Sinne der Reglersynthese geeigneten Approximation von Σ machen. Die Ausführungen enthalten zunächst keine Aussagen zu den Approximationsverfahren, mittels derer $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ aus Σ gewonnen wird und können daher als sehr allgemein angesehen werden.

Die Messung der Güte einer Approximation erfordert ein im Hinblick auf die Reglersynthese aussagekräftiges Maß hinsichtlich des Abstands zweier Systeme, die dazu als Elemente eines zunächst nicht näher spezifizierten Raums anzusehen sind. Aus mathematischer Sicht ist der Begriff des Abstands zweier Elemente eines Raums eng mit der verwendeten Metrik und damit auf natürliche Weise mit der durch eine Metrik induzierten Topologie eines Raumes verbunden. Da nicht äquivalente Metriken zu unterschiedlichen Topologien und demzufolge zu nicht zwingend äquivalenten Konvergenzbegriffen führen, gilt es, eine bezüglich des vorliegenden Problems geeignete Topologie einzuführen. Bekanntermaßen führen im Hinblick auf die Bestimmung der Abweichung zweier Systeme im Kontext robuster Regelung die äquivalenten Gap- und Graph-Metriken ([ZES80],[ES85] bzw. [Vid82b; Vid84]) auf die schwächste Topologie, sodass die Abbildung von den Bestandteilen der offenen Wirkungskette zum geschlossenen Regelkreis $(G,K) \mapsto \mathcal{H}(G,K)$, definiert durch (E.62) auf Seite 387, noch stetig von der Strecke abhängt ([ES85],[Vid84],[GS90] sowie [DS94] (S. 118)).

Demnach bleibt für einen stabilen geschlossenen Regelkreis die Stabilität unter Variation der enthaltenen Strecke oder des Reglers in einer im Sinne der Gap-Topologie kleinen Umgebung um den nominellen Fall ([Zhu89] (S. 16)) erhalten ([Geo88]). Weiterführende Betrachtungen zu den genannten Metriken finden sich beispielsweise in [DS94], darüber hinaus enthalten [Geo88], [GS90] Aussagen hinsichtlich der Berechnung der genannten Metriken. Die Definition eines verallgemeinerten Abstandsmaßes zu Handhabung verschiedenster in der robusten Regelung gebräuchlicher Unsicherheitsformulierungen unter Wahrung der Konsistenz zur ν -Gap-Metrik findet sich in [LP09]. Eine eher operatortheoretisch motivierte Einführung der Gap-Metrik wird in [Kat95] (S. 197) gegeben. Innerhalb dieser Arbeit enthält Abschnitt E.1.3 eine kurze Einführung der Gap-Metrik.

Die Eignung der Gap-Metrik als Abstandsmaß zwischen einem unendlich-dimensionalen System und einem Element einer Folge endlich-dimensionaler Approximationen des Systems hinsichtlich des Entwurfs endlich-dimensionaler Regler unter Berücksichtigung einer bereits recht großen Klasse unendlich-dimensionaler Systeme wird in [Mor94c] diskutiert. Neben der Frage nach den notwendigen Konvergenzeigenschaften des Approximationsverfahrens, mittels dessen die Folge der endlich-dimensionalen Approximationen eines unendlich-dimensionalen Systems gewonnen wird, spielt in diesem Kontext die Existenz einer teilerfremden Zerlegung der Übertragungsfunktion unendlich-dimensionaler Systeme eine wichtige Rolle. Nützliche Aussagen dazu mit besonderem Bezug auf Pritchard-Salamon-Systeme finden sich in Abschnitt C.3.7. Eine Rechtfertigung für die Anwendung der Graph-Metrik beziehungsweise äquivalent der Gap-Metrik ist in folgendem Satz

und den anschließenden Ausführungen begründet ([Vid82b] (S. 149), [Vid84] (S. 411), [Mor94c] (S. 13), [Cur06] (S. 4683)).

Satz 11 $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ sei eine Folge von Übertragungsfunktionen in $\mathfrak{R}(\mathcal{H}_\infty)$.

- Es sei $K \in \mathfrak{R}(\mathcal{H}_\infty)$ ein $G \in \mathfrak{R}(\mathcal{H}_\infty)$ stabilisierender Regler. Ferner konvergiere G_i für $i \rightarrow \infty$ im Sinne der Graph-Topologie gegen G . Dann existiert ein i_0 , sodass K alle G_i mit $i \geq i_0$ stabilisiert. Darüber hinaus konvergiert $\mathcal{H}(G_i, K)$ in $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ gegen $\mathcal{H}(G, K)$.
- Es sei K ein Regler, der alle G_i mit $i \geq i_0$ stabilisiert. Ferner konvergiere $\mathcal{H}(G_i, K)$ gegen $\mathcal{H}(G, K)$. Dann konvergiert G_i in der Graph-Topologie gegen G . \square

Die Voraussetzungen an die Strecke G und den Regler K in Satz 11 sind durch ein Zugehörigkeitsproblem bezüglich der jeweiligen Übertragungsfunktion formuliert und schließen auch gewisse Klassen unendlich-dimensionaler Systeme mit unbeschränkten Ein- oder Ausgangsoperatoren ein. Gemäß Satz 11 folgt aus der Konvergenz von $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ gegen G im Sinne der Gap-Metrik auch die Konvergenz von $\mathcal{H}(G_i, K)$ gegen $\mathcal{H}(G, K)$. Demnach lassen sich die Performance-Eigenschaften von $\mathcal{H}(G, K)$ durch $\mathcal{H}(G_i, K)$ mit $i \rightarrow \infty$ beliebig annähern. Verschiedene aus Satz 11 folgende Schlüsse für den Fall, dass $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ nicht im Sinne der Graph-Topologie gegen G konvergiert, finden sich in [Mor94c] (S. 14).

Insbesondere für den Fall einer unendlich-dimensionalen Strecke G wird der Reglerentwurf für G in der Regel auf Basis eines Elements der Folge $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ durchgeführt. In diesem Kontext kann die Aussage, wann ein G_i stabilisierender Regler K_i auch G stabilisiert, als wesentlich angesehen werden. Unter der Annahme eines G stabilisierenden Reglers K sowie der Konvergenz von $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ gegen G im Sinne der Gap-Metrik folgt auf Basis von Satz 11, dass K neben G auch $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ mit $i \geq i_0$ stabilisiert. Demnach existiert also eine Schnittmenge der Menge der G stabilisierenden Regler und der Menge der $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ mit $i \geq i_0$ stabilisierenden Regler. Daher lässt sich annehmen, dass für den Fall der beschriebenen Konvergenz, auf Basis eines Elements von $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ mit ausreichend großem i , ein Regler aus der besagten Schnittmenge zu synthetisieren ist. Einschränkend lässt sich aus Satz 11 nicht unmittelbar eine Bedingung ableiten, unter der ein G_i stabilisierender Regler K_i auch G stabilisiert.

Unter der Annahme beschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren finden sich notwendige Bedingungen dafür beispielsweise in [Mor94a] und [Mor01]. Insbesondere letztere Quelle geht dabei von einer Folge \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler $\{K_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ aus und nennt notwendige Bedingungen für die Konvergenz einer Folge von Regler gegen einen \mathcal{H}_∞ -optimalen unendlich-dimensionalen Regler K im Sinne der Gap-Metrik ([Mor01] (S. 9), Th. 3.6). Diese Form der Konvergenz erlaubt den Schluss, dass Elemente der Folge von Reglern für ausreichend große N die unendlich-dimensionale Strecke stabilisieren und darüber hinaus die Performance des unendlich-dimensionalen Reglers beliebig gut annähern. Die Annahmen dazu sind in Form von Bedingungen an die erweiterte Strecke formuliert und schließen insbesondere die Kompaktheit der auftretenden Eingangsoperatoren ein. Die Betrachtungen in [Cur06] beziehen sich auf den Entwurf von linear quadratischen Reglern mit

ebensolchen Beobachtern („LQG“) und relaxieren die Voraussetzungen aus [Mor94a] auf die Konvergenz der approximierenden Folge von Strecken im Sinne der Gap-Metrik. Insbesondere wird damit die Voraussetzung beschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren vermieden. In [XB99a; XB99b] wird der Spezialfall einer Galerkin-Approximation im Zusammenhang mit dem Entwurf endlich-dimensionaler \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler für unendlich-dimensionale Strecken mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren betrachtet und ein Nachweis für die Konvergenz der Performance gegen die eines entsprechenden unendlich-dimensionalen Reglers erbracht.

Eine entsprechende Quelle für die Verallgemeinerung der Betrachtungen aus [Mor01] und damit eine Aussage hinsichtlich der Annäherung des Performance-Levels \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler im Falle unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren ist an dieser Stelle nicht bekannt.

Die vorangehenden Ausführungen erlauben den Schluss, dass ein Approximationsverfahren zur Bestimmung einer endlich-dimensionalen Approximation eines unendlich-dimensionalen Systems zum Zwecke der Reglersynthese sinnvollerweise auf eine Folge von endlich-dimensionalen Systemen führen sollte, die im Sinne der Gap-Metrik gegen die ursprüngliche Strecke konvergieren. Im besten Fall lässt sich darüber hinaus die Konvergenz einer Folge zugehöriger Regler gegen einen unendlich-dimensionalen Regler ebenfalls im Sinn der Gap-Metrik zeigen. Eine Untersuchung der Konvergenzeigenschaften von Approximationen, erzeugt durch verschiedene Approximationsverfahren, findet sich beispielsweise in [Cur03] (S. 95). Im Hinblick auf das Beispielsystem ist die im Falle stabiler Systeme bestehende und beispielsweise in Abschnitt E.1.3 gezeigte Äquivalenz zwischen der Gap-Metrik und der ∞ -Norm von besonderer Bedeutung. Für derartige Systeme nimmt die ∞ -Norm die Rolle der Gap-Metrik ein, und entsprechend kann damit die ∞ -Norm als sinnvolles Maß für den Abstand zwischen stabilen Systemen angesehen werden.

Der an dieser Stelle verfügbare mathematische Formalismus erlaubt keine Aussage hinsichtlich der Frage, ob die Performance eines vorausgesetzten unendlich-dimensionalen \mathcal{H}_∞ -optimalen Reglers bei der Regelung des Beispielsystems beliebig durch eine Folge endlich-dimensionaler Regler zu approximieren ist. Da die Berechnung eines unendlich-dimensionalen Reglers und damit der bestenfalls erreichbaren Performance im Allgemeinen aber auch nicht als trivial anzusehen ist, kann diese Einschränkung als geringfügig angesehen werden.

Für den anwendungsorientierten Reglerentwurf mit besonderem Bezug auf das Beispielsystem ergibt sich im Hinblick auf die Reglersynthese ein einfaches systematisches Vorgehen. Eine stabile unendlich-dimensionale Strecke ist zunächst mittels eines endlich-dimensionalen Systems so zu approximieren, dass der Abstand zwischen den beiden Systemen im Sinne der ∞ -Norm unterhalb einer Schranke liegt. Anschließend wird auf Basis der Approximation und einer wiederum im Sinne der ∞ -Norm beschränkten Unsicherheit eine Modellschar derart definiert, dass das unendlich-dimensionale System ein Element der Modellschar ist. Anschließend führt die Anwendung von Reglersyntheseverfahren, die a priori zumindest robuste Stabilität gegenüber einer entsprechenden Modellschar garantieren, auf praktisch einsetzbare Regler. Falls ein Reglersyntheseverfahren darüber hinaus a priori Aussagen über die robuste Performance des geschlossenen Regelkreises gegenüber einer besagten Modellschar erlaubt, sind ebenfalls Aussagen zur Performance im Falle

des geregelten unendlich-dimensionalen Systems möglich. Der Einsatz von Reglersyntheseverfahren, die per se keine oder lediglich eine der beiden Robustheitseigenschaften garantieren, sollte in jedem Fall in Kombination mit einer Robustheitsanalyse des geschlossenen Regelkreises erfolgen.

4.2.2 Einführung projektionsbasierter Approximationen

Die nachfolgend verwendeten Approximationsverfahren lassen sich als projektionsbasierte Approximationen auffassen. Dazu werden an dieser Stelle Projektionen $P_N \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ mit einem Rang von $N < \infty$ und $P_M = (I - P_N)$ vorausgesetzt, die mittels $\mathcal{X}_N = P_N \mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}(A)$ und $\mathcal{X}_M = P_M \mathcal{X}$ eine Zerlegung des Zustandsraums \mathcal{X} in eine direkte Summe der Form

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_N \oplus \mathcal{X}_M \quad (4.1)$$

definieren ([Bal86] (S. 22)). Die angenommenen Projektionen sind zeitunabhängig, sodass $\frac{\partial x_N(t)}{\partial t} = P_N \frac{\partial x(t)}{\partial t}$. Die Eigenschaften einer in (4.1) geschilderten Zerlegung werden in [Kat95] (S. 155ff) diskutiert. Der endliche Rang macht eine Projektion P_N zu einem degenerierten Operator. Eigenschaften degenerierter Operatoren finden sich beispielsweise in [Kat95] (S. 160).

Die Zerlegung des Zustandsraums entsprechend (4.1) führt auf eine Darstellung von Σ der Form

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_N(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_M(t)}{\partial t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_N & A_{NM} \\ A_{MN} & A_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_N(t) \\ x_M(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_N \\ B_M \end{pmatrix} u(t), & \begin{pmatrix} x_N(0) \\ x_M(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{N,0} \\ x_{M,0} \end{pmatrix} \\ y(t) &= \begin{pmatrix} C_N & C_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_N(t) \\ x_M(t) \end{pmatrix} + Du(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dabei ist die Zerlegung des Zustandsvektors durch $x_N(t) = P_N x(t)$ und $x_M(t) = P_M x(t)$ gegeben. Für die Komponenten des Systemoperators gilt $A_N = P_N A P_N, A_{NM} = P_N A P_M, A_{MN} = P_M A P_N$ und $A_M = P_M A P_M$, der Eingangsoperator ergibt sich aus $B_N = P_N B$ und $B_M = P_M B$ während der Ausgangsoperator mittels $C_N = C P_N$ und $C_M = C P_M$ gebildet wird. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, dass aufgrund von $x_N(t) = P_N x(t) = P_N P_N x(t)$ auch $\frac{\partial x_N(t)}{\partial t} = P_N \frac{\partial x(t)}{\partial t} = P_N P_N \frac{\partial x(t)}{\partial t}$ gilt.

Eine endlich-dimensionale Approximation von Σ kann durch die Vernachlässigung der Anteile des Zustandsvektors in \mathcal{X}_M durch ein System Σ_N der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_N(t)}{\partial t} &= A_N x_N(t) + B_N u(t), & x_N(0) &= x_{N,0} \\ y_N(t) &= C_N x_N(t) + D_N u(t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

beschrieben werden. $N < \infty$ wird an dieser Stelle als Approximationsordnung bezeichnet. Für die Operatoren der Zustandsraumdarstellung (4.3) gilt

$$A_N = P_N A P_N \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_N), \quad B_N = P_N B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_N, \mathcal{X}_N), \quad (4.4)$$

$$C_N = C P_N \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_N, \mathcal{Y}_N), \quad D_N = D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}_N), \quad (4.5)$$

mit $u_N(t) = u(t)$, $\mathcal{U}_N = \mathcal{U} = \mathbb{C}^p$, und $\mathcal{Y}_N = \mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$. Da jegliche in der Repräsentation (4.3) von Σ_N auftretenden Räume aufgrund des endlichen Rangs von P_N endlich-dimensional sind, folgt die Beschränktheit und Kompaktheit der vier Operatoren A_N, B_N, C_N, D_N . Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Räumen lassen sich nach Festlegung der Basen der Räume stets als Matrizen geeigneter Dimension darstellen. Tatsächlich ist der Raum der linearen Abbildungen zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen isomorph zum Raum der Matrizen geeigneter Dimension ([HK71] (S. 87ff)). Aus diesem Grund lässt sich jede der Σ_N definierenden Abbildungen jeweils mit einer Matrix identifizieren.

Den voranstehenden Ausführungen folgend, gibt eine Approximation Σ_N von Σ bestenfalls das Verhalten von Σ auf dem abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{X}_N = \mathcal{R}(P_N)$ wieder. Innerhalb dieser Arbeit werden Projektionen vorausgesetzt, für die $AP_N = P_N AP_N$ gilt und dementsprechend

$$P_N AP_M = P_N A(I - P_N) = 0 \quad \text{und} \quad P_M AP_N = (I - P_N) AP_N = 0 \quad (4.6)$$

ist. Damit nimmt der Systemoperator in (4.2) eine Block-Diagonalform an und der Unterraum \mathcal{X}_N ist invariant gegenüber diesem Systemoperator. Unter dieser Annahme existieren somit keine Wechselwirkungen zwischen den berücksichtigten und den unberücksichtigten Teilen des ursprünglichen Systems. Entsprechend beschreibt die Zustandsgleichung von Σ_N aus (4.3) in einem derartigen Fall die Systemdynamik auf dem Unterraum \mathcal{X}_N vollständig. Entsprechende Ausführungen dazu finden sich in [Bal86] (S. 23) und dem dort genannten Theorem 6.17. aus [Kat95] (S. 178).

Unter der Annahme verschwindender Anfangsbedingungen $x_{N,0} = 0$ ist das Übertragungsverhalten von Σ_N im Bildbereich der Laplace-Transformation durch $y_N(s) = G_N(s) u_N(s)$ mit

$$\begin{aligned} G_N(s) &= \left[\begin{array}{c|c} A_N & B_N \\ \hline C_N & D_N \end{array} \right] \\ &= C_N(sI - A_N)^{-1} B_N + D_N \end{aligned} \quad (4.7)$$

gekennzeichnet. Um Aussagen über die Eignung einer Approximation Σ_N von Σ im Hinblick auf die Reglersynthese für Σ treffen zu können, wird das System Σ_N als Element einer Folge endlich-dimensionaler Systeme $\{\Sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ angesehen, der eine Folge von Übertragungsfunktionen $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ zugeordnet ist. Die Folge $\{\Sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ beziehungsweise $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ wird demnach ausgehend von Σ durch Anwendung eines einzigen Approximationsverfahrens unter Berücksichtigung einer ansteigenden Approximationsordnung gewonnen.

4.2.3 Eingrenzung der betrachteten unendlich-dimensionalen Systeme

Ausgangspunkt für das zunächst allgemein gehaltene Vorgehen zur Erzeugung einer endlich-dimensionalen Approximation ist ein unendlich-dimensionales System $\Sigma(A, B, C, D)$ der Pritchard-Salamon-Klasse. Das System sei auf einer Raumskala der Form $\mathcal{W} \xhookrightarrow{d} \mathcal{X} = \mathcal{X}' \xhookrightarrow{d} \mathcal{V}'$ definiert.

Darüber hinaus sei der Systemoperator A diagonalisierbar. Die Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von A bilden also eine Rieszbasis des Zustandsraums. Die Eigenvektoren von A^* werden mit $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bezeichnet und bilden eine zu $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ biorthogonale Menge, die ihrerseits ebenfalls eine Rieszbasis des Zustandsraums darstellt. Unter Verwendung der Rieszbasis $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ lässt sich die Lösung der Zustandsgleichung auf allen Räumen der dem System zugrunde liegenden Raumskala mittels der als Grenzwertbildung aufzufassenden Reihenentwicklung

$$x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \quad (4.8)$$

darstellen ([TW09] (S. 90)). Die Elemente von \mathcal{V}' lassen sich als lineare Funktionale verstehen. Eine Repräsentation dieser Funktionale in Form von Dualitätsprodukten führt auf eine schwache Formulierung der Zustandsgleichung

$$\left\langle \frac{\partial x(t)}{\partial t}, \phi \right\rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \langle Ax(t), \phi \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \langle Bu(t), \phi \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}, \quad x(0) = x_0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}. \quad (4.9)$$

Die letztgenannte Gleichung dient zusammen mit der Ausgangsgleichung des unendlich-dimensionalen Systems als Ansatzpunkt des im weiteren Verlauf geschilderten Petrov-Galerkin-Verfahrens.

Im Bildbereich der Laplace-Transformation besitzen die an dieser Stelle zulässigen Systeme eine Übertragungsfunktion, die sich mittels

$$G(s) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{c_i^* b_i^{*T}}{s + \lambda_i} \quad (4.10)$$

darstellen lässt. Dem zu approximierenden System ist ferner Definition 99 folgend ein Hankel-Operator $\Gamma : L^2([0, \infty), \mathcal{U}) \rightarrow L^2([0, \infty), \mathcal{Y})$ zugeordnet, der unter den getroffenen Annahmen eine Darstellung der Form

$$(\Gamma u)(t) = \int_0^\infty \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i(t+s)} c_i^* \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}} ds = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \int_0^\infty e^{\lambda_i(t+s)} c_i^* \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}} ds \quad (4.11)$$

besitzt. Die zugehörigen Hankel-Singulärwerte werden mit $\{\sigma_i(\Gamma)\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bezeichnet.

4.2.4 Einführung und Einordnung des verwendeten Approximationsverfahrens

Die nachfolgend eingeführten Approximationsverfahren zielen auf eine Erzeugung von Σ_N durch eine Semidiskretisierung hinsichtlich der örtlichen Unabhängigen der schwachen Formulierung von Σ ab. Das Vorgehen beruht dabei auf den Eigenfunktionen des Systemoperators von Σ sowie den damit assoziierten Eigenprojektionen und lässt sich somit auf die in Abschnitt 4.2.3 definierten zulässigen Systeme anwenden. Die Verwendung der Eigenfunktionen als Basisfunktionen von \mathcal{X}_N klassifiziert das Vorgehen als Spektralmethode, wobei die Eigenfunktionen naturgemäß die Randbedingungen erfüllen und damit konforme Elemente darstellen.

Aufgrund der im weiteren Verlauf begründeten Verwendung voneinander verschiedener Basis- und Testfunktionen lässt sich das folgende Vorgehen darüber hinaus, gemäß der Klassifizierung aus [Boy01] (S. 63), als ein Spezialfall der Petrov-Galerkin-Verfahren („Non-Standard Galerkin Method“, [EG04]) auffassen. Die Petrov-Galerkin Verfahren zählen ihrerseits zu den Methoden der gewichteten Reste. Weitere ausführliche Klassifizierungen der Methoden der gewichteten Reste beziehungsweise der Galerkin-Verfahren lassen sich beispielsweise [Fle84], [Boy01], [EG04] oder [Bra07a] entnehmen. Insbesondere [Boy01] (S. 63) enthält eine Diskussion über die uneinheitliche Nomenklatur hinsichtlich der verschiedenen Verfahren zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Eine weitreichende Diskussion bezüglich der Eignung verschiedener numerischer Approximationsverfahren zur endlich-dimensionalen Approximation unendlich-dimensionaler Systeme zum Zwecke der Reglersynthese findet sich in [Sch11].

Erzeugung einer endlich-dimensionalen Zustandsraumdarstellung mittels Petrov-Galerkin-Verfahren

Die Verwendung eines Petrov-Galerkin-Verfahrens zielt an dieser Stelle auf die Bestimmung eines endlich-dimensionalen Systems der Form (4.3) ab, dessen Lösung $x_N(t) \in \mathcal{X}_N$ die Lösung der schwachen Formulierung der Zustandsgleichung (4.9) in \mathcal{X}_N approximiert. Die Erzeugung des endlich-dimensionalen Systems erfolgt dabei ausgehend von den beiden im vorangehenden Abschnitt zuletzt genannten Gleichungen. Die Ausführungen beschränken sich an dieser Stelle auf die Anwendung des Verfahrens und beinhalten keine Aussagen oder Beweise zur Konvergenz des Verfahrens, derartige Betrachtungen finden sich beispielsweise in [QV94].

Anstelle der durch (4.8) gegebenen exakten Lösung eines zu approximierenden unendlich-dimensionalen Systems lautet der für ein Petrov-Galerkin-Verfahren charakteristische endlich-dimensionale Lösungsansatz

$$\mathcal{X}_N \ni x_N(t) = \sum_{i=1}^N x_i^*(t) u_i, \quad N < \infty. \quad (4.12)$$

Der aufgeführte Lösungsansatz beinhaltet eine Trennung der zeitlichen und örtlichen Unabhängigen. Während die Koeffizienten $x_i^*(t)$ jegliche Informationen über den zeitlichen Verlauf von $x_N(t)$ beinhalten, werden die örtlichen Unabhängigen von $x_N(t)$ ausschließlich in den Basisfunktionen $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ berücksichtigt. Die Separation der Unabhängigen spiegelt sich im weiteren Verlauf in der numerischen Berechnung der approximierten Lösung $x_N(t)$ wider.

Neben der zu wählenden Approximationsordnung $N < \infty$, beinhaltet ein Petrov-Galerkin-Verfahren im Wesentlichen zwei weitere Freiheitsgrade. Zum einen gilt es, ein Funktionensystem $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ als Basis des Approximationsraums \mathcal{X}_N zu wählen, sodass

$$\mathcal{X}_N = \text{span}(u_1, \dots, u_N) \quad (4.13)$$

gilt. Zum anderen basiert die Bestimmung der Koeffizienten $x_i^*(t)$, $i = 1, \dots, N$ in (4.12) auf der Auswertung linearer Funktionale, die mittels eines als Testfunktionen bezeichneten, ebenfalls zu

wählenden, zweiten Funktionensystems gebildet werden. Die Testfunktionen $\{\tilde{\phi}_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ bilden die Basis des Raums der Testfunktionen. Entsprechend der Nomenklatur aus [Bra07a] wird dieser Raum mit

$$\mathcal{T}_N = \text{span}(\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_N) \quad (4.14)$$

bezeichnet. Da beide Funktionensysteme die Anforderungen an eine Basis des jeweils zugeordneten Raums erfüllen und für $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ sowie $\{\tilde{\phi}_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ eine identische Anzahl an Elementen gefordert wird, gilt $\dim(\mathcal{X}_N) = \dim(\mathcal{T}_N)$. An dieser Stelle wird zusätzlich die Verwendung von konformen Approximationen angenommen, sodass zusätzlich $\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}$ und $\mathcal{T}_N \subset \mathcal{V}$ zu erfüllen ist.

Während im Zuge gewöhnlicher Galerkin-Verfahren identische Funktionensysteme als Basis- und Testfunktionen genutzt werden, erlauben Petrov-Galerkin-Verfahren die Nutzung voneinander verschiedener Funktionensysteme. Die Anwendung der Galerkin-Verfahren zur Approximation unendlich-dimensionaler Systeme findet sich beispielsweise in [BSY96], [BI97] oder [BR01].

Die Eignung eines Funktionensystems zur Verwendung als Basisfunktionen oder Testfunktionen ist an verschiedene Anforderungen geknüpft, die sich beispielsweise in [Fle84] finden. Um die Konvergenz der approximierten Lösung gegen die Lösung der Zustandsgleichung zu gewährleisten, sollten beide Funktionensysteme grundsätzlich vollständig sein ([Fle84]). Insbesondere im Falle eines Galerkin-Verfahrens ergeben sich aus der Verwendung eines orthonormalen Funktionensystems einige signifikante Vorteile, die im Einzelnen beispielsweise in [Boy01] aufgeführt sind. In der Regel erweist sich zudem die Verwendung von Basis- und Testfunktionen als vorteilhaft, die auf natürliche Weise zu dem zu approximierenden System in Beziehung stehen und möglichst viele Informationen über das System enthalten. Eine ausführliche Diskussion hinsichtlich der im Fall von Spektralverfahren gegebenen Abhängigkeit der Approximationsgüte von der Wahl der Basis- und Testfunktionen findet sich in [Fle84].

Die Bestimmung der Operatoren der Zustandsraumdarstellung (4.3) wird formal durch eine Restriktion der schwachen Darstellung des unendlich-dimensionalen Systems beschrieben. Dazu wird zunächst $x_N(\cdot) \in \mathcal{X}_N$ und $\phi \in \mathcal{T}_N$ in (4.9) angenommen. Daraus resultiert eine Gleichung, die für alle Elemente des Raums der Testfunktionen einzuhalten ist. Da die Basis von \mathcal{T}_N eine Mächtigkeit von N aufweist, ist eine Lösung der resultierenden Gleichung allerdings gleichwertig unter Verwendung einer Basis $\{\tilde{\phi}\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ von \mathcal{T}_N durch N Gleichungen möglich. Das Einsetzen des Lösungsansatzes (4.12) für $x_N(\cdot)$ und die Verwendung eines Vektors der Koeffizienten $x^*(t) = \begin{pmatrix} x_1^*(t) & \dots & x_N^*(t) \end{pmatrix}^T$ führen auf das aus N Gleichungen bestehende Differentialalgebraische System (Deskriptor-System)

$$\tilde{E}_N \dot{x}^*(t) = \tilde{A}_N x^*(t) + \tilde{B}_N u(t), \quad x^*(t=0) = x_0^*, \quad (4.15)$$

mit $x_0^* = \begin{pmatrix} x_1^* & \dots & x_N^* \end{pmatrix}$. Der zugehörige Zustandsraum $\tilde{\mathcal{X}}_N$ ist in diesem Fall kein Funktionenraum mehr, vielmehr lässt sich die aus dem Endlich-dimensionalen wohlbekannte Wahl $\tilde{\mathcal{X}}_N = \mathbb{C}^N$

treffen. Für die beiden $N \times N$ dimensionalen Matrizen \tilde{E}_N und \tilde{A}_N gilt

$$\tilde{E}_N = \begin{pmatrix} \langle u_1, \tilde{\phi}_1 \rangle & \dots & \langle u_N, \tilde{\phi}_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_1, \tilde{\phi}_N \rangle & \dots & \langle u_N, \tilde{\phi}_N \rangle \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_N = \begin{pmatrix} \langle Au_1, \tilde{\phi}_1 \rangle & \dots & \langle Au_N, \tilde{\phi}_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Au_1, \tilde{\phi}_N \rangle & \dots & \langle Au_N, \tilde{\phi}_N \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

während die $N \times p$ dimensionale Eingangsmatrix

$$\tilde{B}_N = \begin{pmatrix} \overline{B_1^* \tilde{\phi}_1} & \dots & \overline{B_p^* \tilde{\phi}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{B_1^* \tilde{\phi}_N} & \dots & \overline{B_p^* \tilde{\phi}_N} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

lautet. Wenn die beiden Basen von \mathcal{X}_N und \mathcal{T}_N eine identische Mächtigkeit aufweisen, sind die resultierenden Matrizen \tilde{A}_N und \tilde{E}_N stets quadratisch. Grundsätzlich legt $\dim(\mathcal{T}_N)$ die Anzahl der Gleichungen fest und $\dim(\mathcal{X}_N)$ die Anzahl der Unbekannten ([EG04]).

Das Einsetzen des Lösungsansatzes (4.12) in die Ausgangsgleichung von Σ führt auf

$$y(t) = C \sum_{i=1}^N x_i^*(t) u_i + Du(t). \quad (4.18)$$

Da für den Durchgriffsoperator $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ mit $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ und $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ gilt, folgt die Ausgangsgleichung des approximierten Systems zu

$$y_N(t) = \tilde{C}_N x^*(t) + \tilde{D}_N u(t) \quad (4.19)$$

mit

$$\tilde{C}_N = \begin{pmatrix} Cu_1 & \dots & Cu_N \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

und $\tilde{D}_N = D$. Unter der Voraussetzung geeignet gewählter Basis- und Testfunktionen gemäß [Fle84] (S. 30) folgt die Regularität von \tilde{E}_N und damit die Existenz von \tilde{E}_N^{-1} . Es ist zu beachten, dass die Lösung von (4.15) zunächst lediglich die zeitliche Änderung der Koeffizienten des allgemeinen Lösungsansatzes aus (4.12) determiniert. Demnach ist $x^*(t) \in \mathbb{C}^N, t \geq 0$ allein kein Element von \mathcal{X}_N . Allerdings lassen sich die Matrizen $\tilde{E}_N^{-1} \tilde{A}_N, \tilde{E}_N^{-1} \tilde{B}_N, \tilde{C}_N, \tilde{D}_N$ einer Darstellung der Operatoren A_N, B_N, C_N, D_N in der verwendeten Basis von \mathcal{X}_N zuordnen. Die Bestimmung der Lösung $x_N(t) \in \mathcal{X}_N$ von (4.3) erfolgt mittels der Abbildung

$$\mathbb{C}^N \rightarrow \mathcal{X}_N, x^* \mapsto x_N = \sum_{i=1}^N x_i^* u_i. \quad (4.21)$$

Das System $\Sigma_{\tilde{N}} \left(\tilde{E}_N^{-1} \tilde{A}_N, \tilde{E}_N^{-1} \tilde{B}_N, \tilde{C}_N, \tilde{D}_N \right)$ dient damit als Repräsentation des approximierten Systems Σ_N . Die Bestimmung einer approximierten Lösung $x_N(t)$ eines unendlich-dimensionalen Systems Σ wird hier unter der Annahme bekannter Basisfunktionen auf die Lösung $x^*(t)$ eines

Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt. Dem Lösungsansatz (4.12) entsprechend erfolgt dabei eine Trennung der örtlichen und zeitlichen Unabhängigen. Die Berechnung von $x^*(t)$ lässt sich beispielsweise mittels verschiedener bekannter numerische Integrationsverfahren durchführen. Ferner lassen sich auf Basis von $\Sigma_{\tilde{N}}$ die aus dem Endlich-dimensionalen bekannten Verfahren zur Reglersynthese und Systemanalyse auf das approximierte System Σ_N anwenden.

Aufgrund der in Abschnitt 4.2.2 geschilderten Möglichkeit, eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen nach Wahl der Basen der Räume mit einer Matrix geeigneter Dimension zu identifizieren ([HK71] (S. 87ff)), werden im Folgenden die beiden endlich-dimensionalen Systeme Σ_N und $\Sigma_{\tilde{N}}$ gleichwertig als Approximation des unendlich-dimensionalen Systems Σ angesehen. Im Falle des geschilderten Vorgehens wird die Basis von \mathcal{X}_N durch die $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ gebildet und die Repräsentationen der linearen Abbildungen aus (4.3) sind durch $\tilde{E}_N^{-1} \tilde{A}_N$, $\tilde{E}_N^{-1} \tilde{B}_N$, \tilde{C}_N und \tilde{D}_N gegeben.

Einführung der modalen Approximation als Spezialfall eines Petrov-Galerkin-Verfahrens

Aus den im vorherigen Abschnitt beschriebenen Gründen eignet sich die Teilfolge $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ einer Rieszbasis $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ aus den Eigenfunktionen von A in besonderem Maße als Basis des Approximationsraums \mathcal{X}_N . Unter Verwendung der ersten $N < \infty$ Eigenfunktionen des zu approximierenden Systems gilt daher im Folgenden die spezielle Wahl

$$\mathcal{X}_N = \text{span}(v_1, \dots, v_N). \quad (4.22)$$

Da sowohl die Eigenfunktionen des Systemoperators als auch deren Linearkombinationen im Definitionsbereich des Systemoperators $\mathcal{D}(A)$ liegen, gilt zudem $\mathcal{X}_N \subseteq \mathcal{D}(A)$ für alle $N < \infty$. Anders als beliebige, weniger systemspezifische Basisfunktionen erfüllen in diesem Fall alle Elemente aus \mathcal{X}_N auf natürliche Weise die Randbedingungen des zugrunde liegenden Systems. Allerdings sind die Elemente einer Rieszbasis im Allgemeinen nicht paarweise orthogonal zueinander. Um dennoch die Vorteile zueinander paarweise orthogonaler Basis- und Testfunktionen zu genießen, werden als Testfunktionen die zu $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ biorthogonalen Eigenfunktionen des adjungierten Systemoperators $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eingesetzt. Der Raum der Testfunktionen wird für eine feste Wahl von N durch

$$\mathcal{T}_N = \text{span}(w_1, \dots, w_N), \quad N < \infty \quad (4.23)$$

definiert. Das Einsetzen der Basisfunktionen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ in den Lösungsansatz (4.12) und die Innenproduktbildung mit einer Testfunktion führt $\forall j \in \mathbb{I}^{N+}$ auf eine Berechnungsvorschrift für die Koeffizienten

$$\langle x, w_j \rangle = \left\langle \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} x_i^* v_i, w_j \right\rangle = x_j^* \quad (4.24)$$

des Lösungsansatzes (4.12).

Die Eigenschaften der systemspezifischen Basis- und Testfunktionen führen auf eine besondere Struktur der Matrizen in der Zustandsgleichung (4.15) des endlich-dimensionalen Systems $\Sigma_{\tilde{N}}$.

Unter Berücksichtigung von $Av_i = \lambda_i v_i, i = 1, \dots, N$ sowie der Biorthogonalität der gewählten Basis- und Testfunktionen gilt

$$\tilde{E}_N = I, \quad \tilde{A}_N = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad (4.25)$$

während die Eingangsmatrix zu

$$\tilde{B}_N = \begin{pmatrix} \overline{B_1^* w_1} & \dots & \overline{B_p^* w_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{B_1^* w_N} & \dots & \overline{B_p^* w_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{*T} \\ \vdots \\ b_N^{*T} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

folgt. Die Biorthogonalität von Basis- und Testfunktionen bedingt die Diagonalstruktur der Matrizen \tilde{E}_N und \tilde{A}_N und bewirkt damit eine Entkopplung der N Gleichungen zur Bestimmung der N Koeffizienten der approximierten Lösung $x_N(t)$. Durch die verwendete Kombination aus Basis- und Testfunktionen stimmen die Eigenwerte des approximierten Systems mit den ersten N Eigenwerten des unendlich-dimensionalen Systems überein.

Die einzelnen skalaren Gleichungen aus (4.15) lauten

$$\dot{x}_i^*(t) = \lambda_i x_i^*(t) + b_i^{*T} u(t), \quad \forall i \in \mathbb{I}^{N+}. \quad (4.27)$$

Ist Σ in modaler Darstellung gegeben und sind die Moden geeignet geordnet, stimmen die Einträge der Eingangsmatrix \tilde{B}_N mit den ersten N Einträgen von B überein. Damit erlaubt \tilde{B}_N unmittelbar eine Aussage über die Steuerbarkeit der einzelnen Moden des Systems $\Sigma_{\tilde{N}}$ und der ersten N Moden von Σ . In (4.18) ist die Ausgangsmatrix durch

$$\tilde{C}_N = \begin{pmatrix} C v_1 & \dots & C v_N \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

gegeben, während die Durchgriffsmatrix unabhängig von der Wahl der Basis des Zustandsraums \mathcal{X}_N und der Wahl der Basis des Raums der Testfunktionen ist. Die Einträge von \tilde{C}_N lassen eine Beurteilung der modalen Beobachtbarkeit von $\Sigma_{\tilde{N}}$ zu.

Zusammenhang zwischen Petrov-Galerkin-Verfahren und Eigenprojektionen

Die Berücksichtigung der Basisfunktionen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ sowie der Koeffizienten $x_i^* = \langle x, w_i \rangle$ gemäß (4.24) im Lösungsansatz (4.12) verdeutlicht den Zusammenhang zwischen dem verwendeten Petrov-Galerkin-Verfahren und den in Abschnitt B.8.4 eingeführten Eigenprojektionen. Die Eigenprojektion eines diagonalisierbaren Systemoperators

$$P_{e,N} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_N$$

$$x \mapsto x_N = P_{e,N} x = \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} \langle x, w_i \rangle v_i \quad (4.29)$$

projiziert für $N < \infty$ die Lösung x auf den endlich-dimensionalen Raum \mathcal{X}_N . Die stetige Fortsetzung des Innenprodukts aus (4.29) auf ein Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'}$ ist im Sinne von (B.103) aus

Abschnitt B.9.1 zu verstehen. Ein mittels einer Eigenprojektion definierter endlich-dimensionaler Raum erfüllt die Anforderungen an einen Unterraum, es gilt $\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{V}$. Der endlich-dimensionale Unterraum \mathcal{X}_N besitzt eine Darstellung in Form einer direkten Summe gemäß (B.98).

Die Folge der durch die Eigenprojektionen definierten endlich-dimensionalen Räume $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$, $N < \infty$ erfüllt die in [BSY96] (S. 105) aufgeführte Monotoniebedingung $\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}_{N+1}$ und es gilt $P_{e,N+1}P_{e,N} = P_{e,N}$. Die Eigenprojektionen stellen einen Sonderfall der eingangs in Abschnitt 4.2.2 eingeführten Projektionen zur Erzeugung endlich-dimensionaler Approximationen dar. Insbesondere gilt im Rahmen der zugelassenen Systeme für den Systemoperator

$$A_N = P_{e,N} (A P_{e,N}) = \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} \lambda_i \langle \cdot, w_i \rangle v_i.$$

Gleichzeitig gilt ebenfalls aufgrund der Eigenschaften biorthogonaler Funktionensysteme und der A -Invarianz der durch die Eigenprojektionen entstehenden Unterräume

$$A_{NM} = P_{e,N} (A (I - P_{e,N})) = \sum_{j \in \mathbb{I}^{N+}} \langle \sum_{i \in \mathbb{I}_{N+1}^+} \lambda_i \langle \cdot, w_i \rangle v_i, w_j \rangle v_j = 0$$

sowie $A_{MN} = (I - P_{e,N}) (A P_{e,N}) = 0$. Damit liegt keine Wechselwirkung der Lösung auf dem Unterraum \mathcal{X}_N mit dem Anteil der Lösung auf dem Unterraum $\mathcal{X}_M = (I - P_{e,N}) \mathcal{X}$ vor, siehe auch [Bal83] (S. 530). Die Anwendung der Eigenprojektionen im Fall diagonalisierbarer Operatoren lässt sich im Sinne von Theorem 6.17. aus [Kat95] (S. 178) als eine Zerlegung des Spektrums von A interpretieren.

Modale Approximation des Übertragungsverhaltens und des Hankel-Operators

Die Ausführungen in diesem Abschnitt beziehen sich auf die Übertragungsfunktion gemäß (4.10) und den Hankel-Operator entsprechend (4.11) der in Abschnitt 4.2.3 definierten Systeme. Die Ein-/Ausgangsabbildung des approximierten Systems im Bildbereich der Laplace-Transformation stimmt mit der entsprechenden Abbildung von $\Sigma_{\tilde{N}}$ und damit von Σ_N überein und lautet

$$y(s) = G_N(s) u(s) \quad (4.30)$$

mit $G_N(s) = \tilde{C}_N (sI - \tilde{A}_N)^{-1} \tilde{B}_N + \tilde{D}_N$. Das Einsetzen der Matrizen $\tilde{A}_N, \tilde{B}_N, \tilde{C}_N$ sowie die ohne eine Beschränkung der Allgemeinheit zulässige Vernachlässigung der Durchgriffsmatrix \tilde{D}_N führen auf

$$G_N(s) = \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} \frac{c_i^* b_i^{*T}}{s + \lambda_i}. \quad (4.31)$$

Die Reihendarstellung der Übertragungsfunktion G_N des approximierten Systems folgt damit unmittelbar aus der Reihendarstellung des Übertragungsverhalten des unendlich-dimensionalen Systems durch einen Reihenabbruch nach dem N -ten Glied. Falls ein zu approximierendes System Σ

eine endliche Anzahl Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq 0$ aufweist, ist es in der Regel wünschenswert, alle diese Eigenwerte unmittelbar in Σ_N zu berücksichtigen. Insbesondere anhand der Approximation der Übertragungsfunktion (4.31) ist das Vorgehen in einem derartigen Fall ersichtlich. Zudem lässt sich erkennen, dass die modale Approximation keine Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq 0$ erzeugen kann, die nicht bereits in Σ enthalten sind. Unter der Annahme, dass auch keine derartigen Nullstellen erzeugt werden, führt eine zielgerichtete Anwendung der modalen Approximation zu übereinstimmenden Eigenwerten mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq 0$ innerhalb von Σ_N und Σ .

Der Hankel-Operator einer endlich-dimensionalen Approximation Σ_N lautet

$$(\Gamma_N u)(t) = \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} \int_0^\infty e^{\lambda_i(t+\tau)} c_i^* \langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}} d\tau \quad (4.32)$$

und besitzt die Hankel-Singulärwerte $\{\sigma_i(\Gamma_N)\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$. Die Hankel-Singulärwerte werden in der Literatur an verschiedenen Stellen zur Angabe einer a priori Fehlerschranke einer Approximation eingesetzt ([GCP88]).

4.2.5 Konvergenzeigenschaften und Fehlerschranken der modalen Approximation

Konvergenzeigenschaften der modalen Approximation

Dieser Abschnitt umfasst Betrachtungen zu Konvergenzeigenschaften der modalen Approximation, wobei die in Abschnitt 4.2.3 definierten Systeme vorausgesetzt werden. Das Hauptaugenmerk liegt an dieser Stelle auf dem Nachweis der Konvergenz der modalen Approximation im Sinne der Gap-Metrik und Gap-Topologie. Aus der Konvergenz im Sinne der Gap-Metrik gemäß Definition 106 wird auf die Eignung der modalen Approximation geschlossen, endlich-dimensionale Systeme zur Reglersynthese für eine unendlich-dimensionale Strecke Σ zu generieren. Aufgrund von Definition 106 erfolgt die Repräsentation von Σ auf Basis einer gemäß (4.10) zugeordneten Übertragungsfunktion G . Gleichzeitig ist jedem Element von $\{\Sigma_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ eine Übertragungsfunktion der Form (4.31) zugeordnet.

Für die nachfolgenden Betrachtungen werden exponentiell stabile Systeme G sowie eine Folge jeweils exponentiell stabiler Systeme $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ vorausgesetzt. Im Falle exponentiell stabiler Systeme erweist sich die in (E.39) mittels der \mathcal{H}_∞ -Norm formulierte Bedingung als notwendig und hinreichend für die Konvergenz von $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ gegen G im Sinne der Gap-Topologie. Darüber hinaus wird die Einhaltung der Ungleichung

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{|c_i^*| |b_i^{*T}|}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} < \infty \quad (4.33)$$

gefordert. Entsprechend der Ausführungen in Abschnitt C.4.5 stellt die Einhaltung von (4.33) eine hinreichende Bedingung für die Kompaktheit des dem System Σ zugeordneten Hankel-Operators

Γ dar. Die Ordnung der Eigenwerte des Beispielsystems finden sich in Tabelle 2.2, die Ordnung der Entwicklungskoeffizienten des Eingangsoperators beziehungsweise des Ausgangsoperators sind in (2.131) beziehungsweise (2.142) angegeben. Aus der Berücksichtigung der Ordnung der drei in (4.33) auftretenden Größen $|c_i^*|$, $|b_i^{*T}|$ sowie $|\operatorname{Re}(\lambda_i)|$ leitet sich die Gültigkeit der Ungleichung (4.33) im Falle des Beispielsystems ab.

Falls ein System die voranstehend aufgeführten Annahmen erfüllt, gilt gemäß [CG84] und [CG86] (S. 174)

$$\begin{aligned} \|G - G_N\|_\infty &= \left\| \sum_{i \in \mathbb{I}_{N+1}^+} \frac{c_i^* b_i^{*T}}{s + \lambda_i} \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{I}_{N+1}^+} \frac{|c_i^*| |b_i^{*T}|}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Aufgrund der Einhaltung von (4.33) folgt aus der voranstehenden Ungleichung die Konvergenz der Approximation $\{G_N\}_{i \in \mathbb{I}_{N+1}^+}$ für $N \rightarrow \infty$ gegen G im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm. Die eingangs angenommene exponentielle Stabilität aller beteiligten Systeme erlaubt dann den Schluss auf die Konvergenz des verwendeten Approximationsansatzes im Sinne der Gap-Topologie.

Da das Beispielsystem alle getroffenen Annahmen erfüllt, wird die modale Approximation im Falle des Beispielsystems als geeignet zur Generierung einer endlich-dimensionalen Approximation zum Zwecke des Reglerentwurfs angesehen.

Fehlerschranken im Fall der modalen Approximation

Neben der grundlegenden Konvergenzaussage stellt sich bei der Verwendung eines Approximationsverfahrens stets die Frage nach dem Abstand einer resultierenden Approximation von dem ursprünglichen System Σ . Eine in der Literatur übliche Vorgehensweise zur Angabe einer oberen Fehlerschranke für die modale Approximation beruht auf den Hankel-Singulärwerten $\{\sigma_i(\Gamma)\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ des Hankel-Operators Γ von Σ . Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, dass unter den getroffenen Annahmen die modale Approximation nicht nur die Konvergenz im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm garantiert, sondern ebenfalls die Konvergenz der Hankel-Singulärwerte von Σ_N gegen die Hankel-Singulärwerte von Σ .

Gleichung (4.34) beschreibt eben diese obere Beschränkung und entspricht damit dem bekannten Resultat, demzufolge die Differenz zwischen dem ursprünglichen System G und der Approximation G_N im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm das Zweifache der Summe aller durch die Approximation vernachlässigten Hankel-Singulärwerte nicht übersteigt (Theorem 5.1., [GCP88] (S. 882)). Ein Beispiel für die Berechnung der Summe aller Hankel-Singulärwerte für ein unendlich-dimensionales System mit einem nuklearen Hankel-Operator findet sich in [GCP88] (S. 891).

Eine Beschränkung der Güte einer Approximation im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm wird durch den ersten vernachlässigten Hankel-Singulärwert definiert. Eine Approximation G_N von G besitzt demnach

im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm einen Abstand zu G , der nie kleiner ist als der erste vernachlässigte Hankel-Singulärwert von G ([GCP88]). Weitere Betrachtungen und Fehlerschranken für unterschiedliche Klassen von Systemen und Approximationsverfahren finden sich beispielsweise in [CG84; CG86], [SC00], [Sas01], [Sas02] sowie [Cur03] und werden an dieser Stelle nicht wiederholt.

Die explizite Berechnung der oberen und unteren Fehlerschranke auf Basis von (4.34) ist an dieser Stelle nicht erforderlich. Als relevante Information wird hier die Beschränkung des Fehlers einer Approximation im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm angesehen. Die Berücksichtigung der Abweichung zwischen Σ_N und Σ erfolgt in Abschnitt 4.3 im Hinblick auf den Reglerentwurf mittels im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm beschränkter frequenzabhängiger Unsicherheitsformulierungen und darauf aufbauender Modellscharen. Die Modellscharen dienen ihrerseits als Grundlagen der Synthese robuster Regler in Abschnitt 4.5 sowie der Robustheitsanalyse in Abschnitt 4.6.

4.2.6 Anwendung der modalen Approximation auf das Beispielsystem

Die Anwendung der modalen Approximation auf das Beispielsystem beruht auf der Anwendung der assoziierten Eigenprojektionen aus Abschnitt B.8.4. Die Anwendung der Eigenprojektionen erfordert die Kenntnis der Lösungen der A beziehungsweise A^* zugeordneten Eigenwertprobleme aus Abschnitt D.1.1 beziehungsweise Abschnitt D.1.2. Als Ausgangspunkt wird die Übertragungsfunktion des Beispielsystems aus Abschnitt 2.3.4 in Reihendarstellung gemäß (2.160) angenommen. Der Abbruch der Reihe in (2.160) nach einem endlichen Glied $N < \infty$ führt unmittelbar auf eine modale Approximation des Beispielsystems mit einer Approximationsordnung von N und einer entsprechenden Systemordnung $n = N$. Die Parametrierung der Reihendarstellung des Beispielsystems in (2.160) erfolgt gemäß Tabelle 2.3. Abbildung 4.1 zeigt das gemessene Bodediagramm des trimorphen Biegewandlers G_{Mess} , das Bodediagramm von G sowie die Bodediagramme verschiedener modaler Approximationen G_N , $N \in \{2, 4, 6, 30\}$ des Beispielsystems. Der dargestellte Frequenzbereich ist durch den Frequenzbereich der Messung am realen System definiert. Innerhalb dieses Frequenzbereichs lässt sich für anwachsende N die schnelle Konvergenz der modalen Approximation G_N gegen G erkennen. Hinsichtlich des in Abb. 4.1 gezeigten Frequenzbereichs ist bereits für $N = 6$ nahezu kein Unterschied zwischen dem Bodediagramm der Approximation und dem von G zu erkennen.

Zur Verdeutlichung der vorhandenen Abweichung und im Hinblick auf die Verwendung multiplikativer Modellunsicherheiten zur Formulierung von Modellscharen in Abschnitt 4.3 zeigt Abb. 4.2a die relativen Abweichungen zwischen G und den modalen Approximationen G_N , $N \in \{2, 4, 6, 30\}$. Für den Fall $N = 2$ enthält die modale Approximation G_N lediglich die erste Eigenmode von G , diese Charakteristik spiegelt sich im Verlauf der relativen Abweichung $\delta_{\text{rel}}(G, G_N)$, $N = 2$ im Frequenzbereich um die zweite Eigenfrequenz wider. Für den Fall $N = 2$ überschreitet die relative Abweichung ab etwa 4000 rad/s signifikant die 0 dB Linie.

Ab einer Approximationsordnung von $N = 4$ enthalten die resultierenden modalen Approximationen im betrachteten Frequenzbereich die gleiche Anzahl von Singularitäten wie G . Ab einer

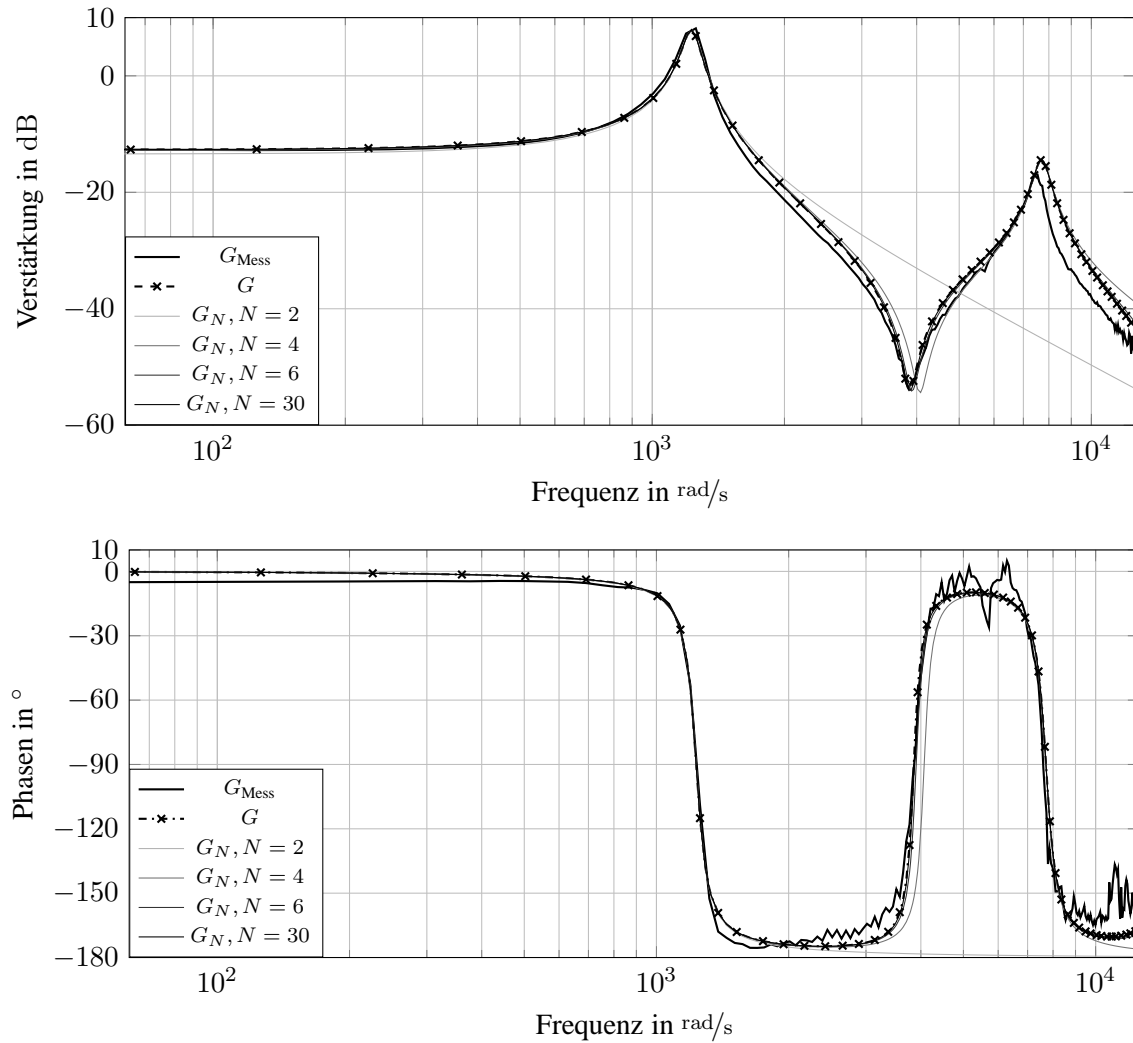
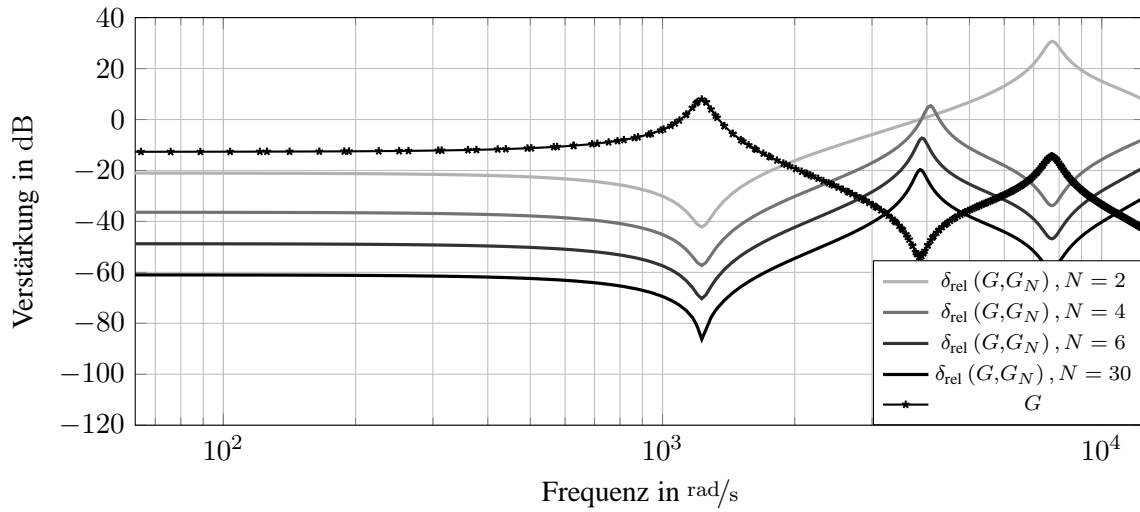
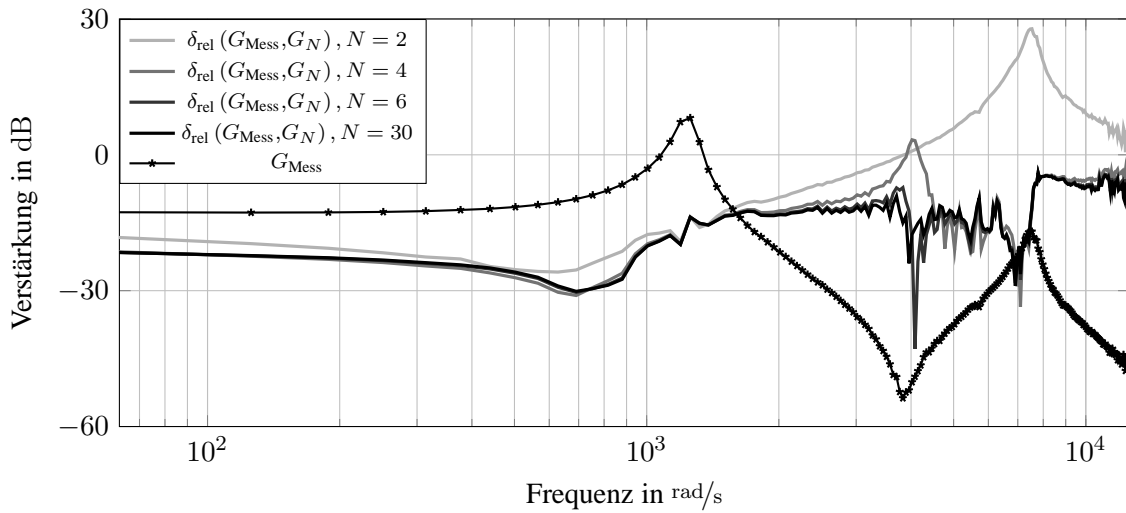
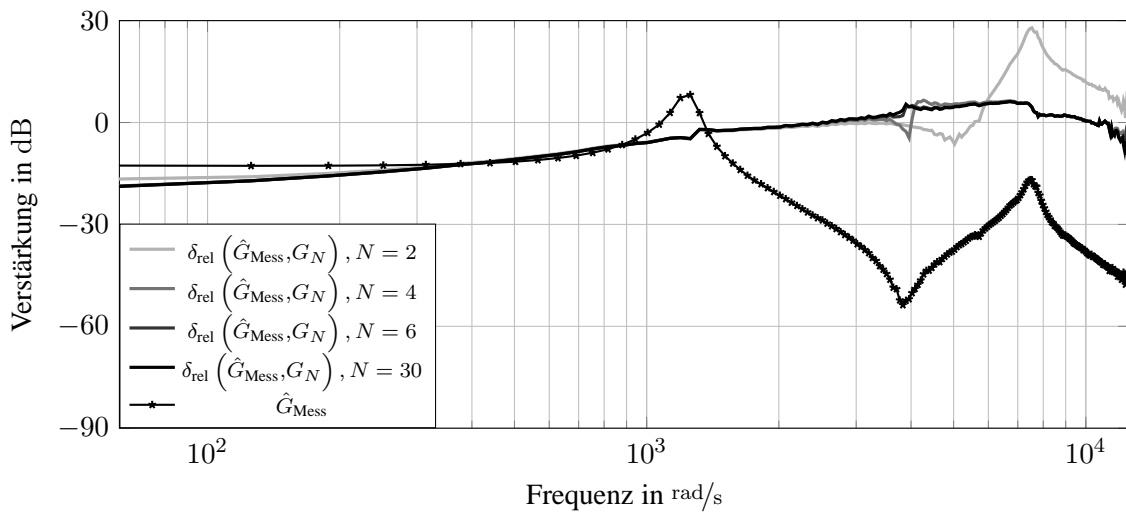


Abbildung 4.1: Bodediagramm verschiedener Darstellungen der Übertragungsfunktion des Beispielsystems: G_{Mess} , G und modale Approximationen G_N , $N \in \{2, 4, 6, 30\}$.

Approximationsordnung von $N \geq 6$ verläuft die relative Abweichung $\delta_{\text{rel}}(G, G_N)$ im betrachteten Frequenzintervall stets unterhalb von -10 dB. Hinsichtlich des betrachteten Frequenzbereichs und der relativen Abweichung kann damit bereits eine modale Approximation geringer Ordnung von zumindest $N = 6$ als gute endlich-dimensionale Annäherung der Übertragungsfunktion des unendlich-dimensionalen Beispielsystems G im betrachteten Frequenzbereich angesehen werden.

Da für die innerhalb dieser Arbeit verwendeten Verfahren zur Reglersynthese die Ordnung der resultierenden Regler von der Ordnung der verwendeten nominellen Strecke abhängt, erscheint die modale Approximation zur Gewinnung einer endlich-dimensionalen Darstellung von G zum Zwecke der Reglersynthese als sehr gut geeignet. In Abb. 4.2b findet sich die relative Abweichung zwischen dem gemessenen Frequenzgang und G_N , $N \in \{2, 4, 6, 30\}$. Qualitativ gelten für $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G_N)$ analoge Aussagen wie für $\delta_{\text{rel}}(G, G_N)$.

(a) $\delta_{\text{rel}}(G, G_N)$, $N \in \{2, 4, 6, 30\}$ (b) $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G_N)$, $N \in \{2, 4, 6, 30\}$ (c) $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G_N)$, $N \in \{2, 4, 6, 30\}$ Abbildung 4.2: Relative Abweichungen zwischen jeweils $G, G_{\text{Mess}}, \hat{G}_{\text{Mess}}$ und G_N mit $N \in \{2, 4, 6, 30\}$.

Lediglich im Frequenzbereich oberhalb der ersten Eigenfrequenz von G_{Mess} weist $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G_N)$ selbst für $N \geq 6$ einen Wert um die -5 dB auf, dieser Verlauf entspricht ausgehend von $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G)$ in Abb. 4.1 allerdings den Erwartungen.

Die relativen Abstände $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G_N)$ mit jeweils $N \in \{2, 4, 6, 30\}$ in Abb. 4.2c werden deutlich durch die in der modalen Approximation vernachlässigte Totzeit dominiert. Die in \hat{G}_{Mess} auftretende, durch die enthaltene Totzeit bedingte, frequenzabhängige Phasenabsenkung führt bereits im Frequenzbereich vor der ersten Eigenfrequenz zu einem signifikanten Anstieg der relativen Abweichung. Ab einer Approximationsordnung von $N = 6$ lässt sich im betrachteten Frequenzbereich keine wesentliche Verbesserung in den Verläufen von $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G_N)$ feststellen.

Unter der Annahme, dass die Messung den für die Regelung relevanten Frequenzbereich abdeckt, wird eine modale Approximation G_N mit einer Approximationsordnung $N = 6$ als nominelle Strecke zur Formulierung einer Modellschar in Abschnitt 4.3 angenommen, es gilt

$$G_{\text{Nom}} = G_N, N = 6. \quad (4.35)$$

Der Übertragungsfunktion des nominellen Systems ist gleichwertig das nominelle System $\Sigma_{\text{Nom}} = \Sigma_N, N = 6$ mit einer Systemordnung von $n_{G_{\text{Nom}}} = 6$ zugeordnet. Im Hinblick auf die Simulation des Beispielsystems werden ferner die Festlegungen

$$G_{\text{Sim}} = G_N, N = 30 \quad (4.36)$$

$$\hat{G}_{\text{Sim}} = e^{-0,0005 \cdot i\omega} G_{\text{Sim}} \quad (4.37)$$

getroffen.

Eine zur Synthese robuster Regler geeignet formulierte Modellschar sollte das zu regelnde System, in diesem Fall G_{Mess} beziehungsweise \hat{G}_{Mess} , einschließen. Als Anhaltspunkte zur Formulierung verschiedener Modellscharen in 4.3 dienen die Verläufe von $\delta_{\text{rel}}(G, G_{\text{Nom}})$, $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G_{\text{Nom}})$ und $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G_{\text{Nom}})$, die sich für $N = 6$ aus Abb. 4.2a, Abb. 4.2b beziehungsweise Abb. 4.2c ergeben.

4.3 Formulierung einer Modellschar zur Regelung des Beispielsystems

Zwischen einem realen System und einem zugehörigen mathematischen Modell des Systems ist grundsätzlich keine vollständige Übereinstimmung zu erwarten. Allein aus derartigen Modellabweichungen leitet sich für modellbasiert entworfene Regler die Forderung ab, die Robustheit verschiedener Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu garantieren. Aus der Definition der robusten Eigenschaften eines Regelkreises (Definition 108) lässt sich dabei entnehmen, dass sich Aussagen hinsichtlich der Robustheit stets auf eine spezifische Modellschar beziehen. Eine problemspezifisch formulierte Modellschar lässt sich als Grundlage der Synthese robuster Regler oder

auch zur Robustheitsanalyse bestehender Regelkreise einsetzen. Eine übersichtliche Beschreibung des Grundgedankens dieses Ansatzes sowie Überlegungen zur sinnvollen Formulierung einer Modellschar finden sich beispielsweise in [SP05] oder [DP05].

Dieser Abschnitt beinhaltet die Formulierung verschiedener strukturell identischer Modellscharen, die zum einen Verwendung bei der Synthese robuster Regler für das Beispielsystem und zum anderen bei der Analyse der Robustheit zugehöriger Regelkreise finden. Durch das innerhalb dieser Arbeit verfolgte Vorgehen zur Reglersynthese für Σ auf Basis von Σ_N ergibt sich neben den eingangs geschilderten, stets vorhandenen Modellabweichungen zwischen Σ und dem realen System in einem derartigen Fall ein zusätzlicher Approximationsfehler. Für geeignete Modellscharen wird gefordert, dass sie die beiden genannten Quellen für Modellunsicherheiten berücksichtigen und neben dem realen System auch das unendlich-dimensionale Modell des realen Systems inkludieren.

Die Formulierung der Modellscharen erfolgt dazu basierend auf der nominellen Strecke G_{Nom} gemäß (4.35) und zusätzlichen Abweichungen vom Nominalfall, beschrieben durch im Sinne der ∞ -Norm beschränkten Unsicherheiten. Dieser Ansatz geht auf die in Abschnitt 4.2 gezeigte Tatsache ein, dass die Eigenschaften des unendlich-dimensionalen Beispielsystems Σ und das gewählte Approximationsverfahren die Generierung eines endlich-dimensionalen Systems $\Sigma_{\text{Nom}} = \Sigma_N$, $N = 6$ mit einer zugehörigen rationalen Übertragungsfunktion erlauben, sodass der Abstand zwischen Σ und Σ_N im Sinne der ∞ -Norm beschränkt ist.

Einleitend begründen verschiedene Überlegungen in Abschnitt 4.3.1 die strukturelle Festlegung der Unsicherheit innerhalb der zu formulierenden Modellscharen auf multiplikative Modellfehler. Daran schließt sich in Abschnitt 4.3.2 die allgemeine Einführung der gewählten multiplikativen Modellfehler als Spezialfall unstrukturierter Modellunsicherheiten an. Da die Berücksichtigung unstrukturierter Modellunsicherheiten innerhalb des Entwurfsproblems robuster Regler eine LFT-basierte Formulierung voraussetzt, folgen in Abschnitt 4.3.3 entsprechende Ausführungen für den Spezialfall multiplikativer Modellunsicherheiten. Abschließend erfolgt in Abschnitt 4.3.4 die Formulierung verschiedener Modellscharen zur Verwendung für das Beispielsystem.

4.3.1 Vorüberlegungen zur Formulierung einer Modellschar

Um unnötig konservative Modellscharen zu vermeiden, sollten vorhandene Kenntnisse über die Struktur von Modellunsicherheiten in die Auswahl einer Unsicherheitsstruktur einfließen. Im Folgenden werden lediglich die hinsichtlich des Beispielsystems angenommenen Unsicherheitsstrukturen vorgestellt und eingesetzt. Als primäre Quelle der Modellunsicherheiten wird dazu die Vernachlässigung hochfrequenter Dynamiken, verursacht durch eine endlich-dimensionale Approximation des unendlich-dimensionalen Modells des Beispielsystems, angesehen.

Die Ausführungen aus Abschnitt 4.2.4 erlauben die Annahme, dass die modale Approximation im Fall des Beispielsystems auf eine Approximation ohne Eigenwerte in der offenen rechten s-Halbebene führt. Da die exakte Übertragungsfunktion G des unendlich-dimensionalen Modells des Beispielsystems Σ bekannt ist, lässt sich zu der Übertragungsfunktion einer endlich-dimensionalen

Approximation G_N dieses Modells stets sowohl eine relative als auch eine absolute Abweichung zu jeder diskreten Frequenz bestimmen. Falls die exakte Übertragungsfunktion eines unendlich-dimensionalen Systems zur Bestimmung dieser Abweichungen nicht zur Verfügung steht, wird üblicherweise als Ersatz für Σ eine Approximation Σ_M mit $M \gg N$ eingesetzt. Im Zusammenhang mit der modalen Approximation auf Basis des Übertragungsverhaltens ist die Annahme additiver Modellunsicherheiten nicht unüblich. Aufgrund der einfachen Integrierbarkeit in die Entwurfsprobleme der hier verwendeten Verfahren zur Reglersynthese wird für die mathematische Repräsentation der darzustellenden Unsicherheit strukturell jedoch eine multiplikative Modellunsicherheit angenommen. Ein erfolgreicher Reglerentwurf mittels der hier eingesetzten Verfahren gewährleistet damit a priori zumindest die robuste Stabilität des geschlossenen Regelkreises hinsichtlich der aus der multiplikativen Modellunsicherheit resultierenden Modellschar.

Da es sich bei dem Beispielsystem um ein System mit lediglich einem Eingang und einem Ausgang handelt, führt die Annahme multiplikativer Modellfehler am Streckeneingang oder am Streckenausgang auf eine äquivalente Fehlerbeschreibung.

4.3.2 Multiplikativer Modellfehler als Spezialfall einer unstrukturierten Modellunsicherheit

Den einleitenden Ausführungen über Unsicherheitsformulierungen folgend, wird als Spezialfall unstrukturierter Modellunsicherheiten ein multiplikativer Modellfehler eingeführt. In Anlehnung an das Beispielsystem beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf Systeme mit skalaren Eingangssignalen und skalaren Ausgangssignalen. Allgemeine und ausführliche Betrachtungen zu verschiedenen Formen unstrukturierter Modellunsicherheiten finden sich beispielsweise in [ZDG95], [SP05], [GPK05]. Die folgende Darstellung orientiert sich an [SP05]. Eine multiplikative Modellunsicherheit wird strukturell durch das nominelle Modell G_{Nom} sowie einen zusätzlichen Vorwärtzweig definiert. Unter Vernachlässigung der komplexen Variabel s besitzt ein durch eine multiplikative Modellunsicherheit am Streckeneingang beschriebenes System $G_{\text{M,e}}$ ausgehend von G_{Nom} die Form

$$G_{\text{M,e}} = G_{\text{Nom}} (1 + E_{\text{M,e}}), \quad \text{mit} \quad E_{\text{M,e}} = \Delta_{\text{M,e}} W_{\text{M,e}}, \quad (4.38)$$

während für eine am Streckenausgang lokalisierte multiplikative Modellunsicherheit $G_{\text{M,a}}$

$$G_{\text{M,a}} = (1 + E_{\text{M,a}}) G_{\text{Nom}}, \quad \text{mit} \quad E_{\text{M,a}} = \Delta_{\text{M,a}} W_{\text{M,a}}, \quad (4.39)$$

folgt. Die Übertragungsfunktion $E_{\text{M},\cdot}$ wird dabei als Reihenschaltung einer stabilen unsicheren Übertragungsfunktion beschränkter Norm aus der Menge

$$\Pi_{\Delta_{\text{M},\cdot}} = \{\Delta_{\text{M},\cdot} \in \mathcal{RH}_{\infty} \mid \|\Delta_{\text{M},\cdot}\|_{\infty} < 1\} \quad (4.40)$$

und einer Gewichtungsfunktion $W_{\text{M},\cdot} \in \mathcal{RH}_{\infty}$ angenommen. Damit handelt es sich sowohl bei $\Delta_{\text{M},\cdot} \in \Pi_{\Delta_{\text{M},\cdot}}$ als auch bei der Gewichtungsfunktion $W_{\text{M},\cdot}$ und somit auch ihrer Reihenschaltung

um endlich-dimensionale, realisierbare und stabile Systeme. Die zu (4.38) beziehungsweise (4.39) gehörigen Blockschaltbilder finden sich in Abb. 4.3a beziehungsweise Abb. 4.3b. Für Eingrößensysteme sind die beiden multiplikativen Unsicherheitsformulierungen (4.38) und (4.39) äquivalent. Die Definition einer Modellschar erfolgt unter Berücksichtigung einer festen Gewichtungsfunktion

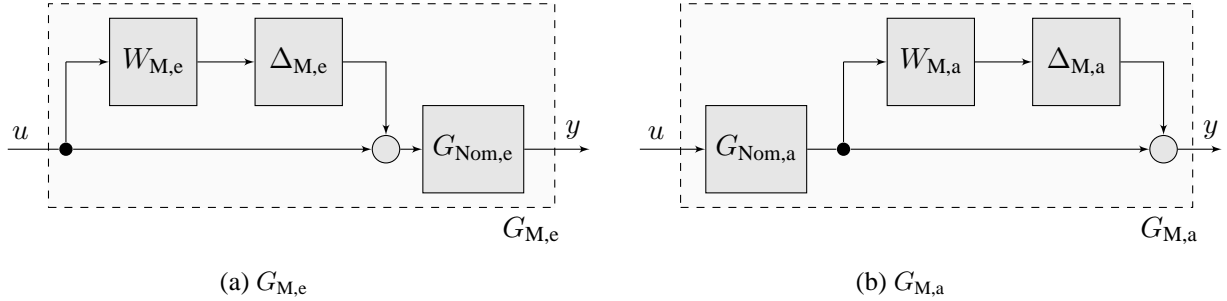


Abbildung 4.3: Strecke mit multiplikativer Modellunsicherheit am Streckeneingang $G_{M,e}$ beziehungsweise am Streckenausgang $G_{M,a}$.

$W_{M,\cdot}$ durch das Zulassen aller in $\Pi_{\Delta_{M,\cdot}}$ enthaltener Übertragungsfunktionen. Für multiplikative Modellunsicherheiten am Streckeneingang gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{M,e} &= \{G_{Nom,e} (1 + \Delta_{M,e} W_{M,e}) \mid \Delta_{M,e} \in \Pi_{\Delta_{M,e}}\} \\ &= \{G_{Nom,e} (1 + \Delta_{M,e} W_{M,e}) \mid \Delta_{M,e} \in \mathcal{RH}_{\infty}, \|\Delta_{M,e}\|_{\infty} < 1\}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

während die durch multiplikative Modellfehler am Streckenausgang definierte Modellschar durch

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{M,a} &= \{(1 + \Delta_{M,a} W_{M,a}) G_{Nom,a} \mid \Delta_{M,a} \in \Pi_{\Delta_{M,a}}\} \\ &= \{(1 + \Delta_{M,a} W_{M,a}) G_{Nom,a} \mid \Delta_{M,a} \in \mathcal{RH}_{\infty}, \|\Delta_{M,a}\|_{\infty} < 1\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

gegeben ist. Unter Annahme eines bekannten nominellen Modells $G_{Nom,\cdot}$ reduziert sich die Formulierung von $\mathcal{G}_{M,\cdot}$ gemäß (4.41) oder (4.42) damit auf die Wahl von $W_{M,\cdot}$. Unter Voraussetzung der asymptotischen Stabilität der multiplikativen Modellunsicherheit weist kein Element von $\mathcal{G}_{M,\cdot}$ eine höhere Anzahl instabiler Pole als $G_{Nom,\cdot}$ auf. Die Möglichkeit der Kürzung instabiler Pole von G_{Nom} wird in [Rai94] (S. 181) gezeigt. Derartige Fälle lassen sich aus der Modellschar durch eine Einschränkung der zulässigen multiplikativen Modellfehler ausschließen. Im Hinblick auf das stabile Beispielsystem und die gleichsam stabilen Approximationen des Beispielsystems wird die Problematik der Kürzung instabiler Pole der Strecke an dieser Stelle nicht weiter berücksichtigt.

Das Einschließen einer beliebigen Modellschar \mathcal{G} durch eine Modellschar $\mathcal{G}_{M,\cdot}$ lässt sich auf Basis einer frequenzabhängigen relativen Abweichung, definiert durch die Funktion

$$l_M(\omega) = \max_{G_S \in \mathcal{G}} \left| \frac{G_S(i\omega) - G_{Nom,\cdot}(i\omega)}{G_{Nom,\cdot}(i\omega)} \right|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (4.43)$$

erreichen. Per Definition entspricht $l_M(\omega)$ zu jeder Frequenz $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ dem maximalen relativen Abstand, den das nominelle Modell $G_{Nom,\cdot}$ zu allen Elementen der einzuschließenden Modellschar

\mathcal{G} im Sinne von (4.43) aufweist. Aufgrund von (4.43) ist l_M für jede Frequenz $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ reell. Die Beschränkung des Arguments von l_M auf ω ist die in der Literatur übliche Kennzeichnung für die Tatsache, dass l_M nicht die rationale Übertragungsfunktion eines endlich-dimensionalen Systems ist.

Die Verwendung einer Gewichtungsfunktion $W_{M,\cdot} \in \mathcal{RH}_\infty$ mit

$$l_M(\omega) \leq |W_{M,\cdot}(i\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (4.44)$$

führt (4.41) beziehungsweise (4.42) folgend auf eine Modellschar $\mathcal{G}_{M,\cdot}$. $|W_{M,\cdot}(i\omega)|$ beschränkt $l_M(\omega)$ zu jeder Frequenz $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ von oben. Folglich inkludiert $\mathcal{G}_{M,\cdot}$ aufgrund von (4.43) alle Strecken aus der ursprünglichen Modellschar \mathcal{G} .

Um eine multiplikative Modellunsicherheit innerhalb des Entwurfsprozesses eines robusten Reglers nach den in Abschnitt 4.4 beschriebenen Verfahren zu berücksichtigen, wird $W_{M,\cdot}$ in geeigneter Form in die erweiterte Strecke integriert. Folglich wirkt sich die Ordnung von $W_{M,\cdot}$ auf die Ordnung der erweiterten Strecke aus. Eine allgemeine Einführung der erweiterten Strecke findet sich in Abschnitt E.2.1.

In Abhängigkeit von der Wahl des Verfahrens zur Reglersynthese besteht im Hinblick auf den Entwurf robuster Regler gegebenenfalls ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Ordnung eines resultierenden Reglers und der Ordnung der erweiterten Strecke. Falls eine solche Abhängigkeit besteht und eine geringe Ordnung des zu entwerfenden Reglers angestrebt wird, ist für $W_{M,\cdot}$ eine möglichst geringe Ordnung zu wählen. Aus dem Bestreben, mit einer Gewichtungsfunktion geringer Ordnung dennoch (4.44) zu erfüllen, resultiert in der Regel eine konservativ formulierte multiplikative Modellschar.

4.3.3 Verallgemeinerte LFT-basierte Formulierung multiplikativer Modellunsicherheiten

Die Berücksichtigung von Modellunsicherheiten innerhalb verschiedener auf dem strukturierten Singulärwert basierender Synthese- und Analyseverfahren setzt gewöhnlich eine Formulierung der zugehörigen Modellschar unter Verwendung einer „Linear Fractional Transformation“ LFT der in Abb. 4.4 dargestellten Form voraus. Die allgemeine Einführung der LFT findet sich in Abschnitt E.1.1.

Der vorliegende Abschnitt beinhaltet die Formulierung multiplikativer Modellunsicherheiten innerhalb des in [Rai94] (S. 183ff) beschriebenen LFT-basierten Rahmens zur verallgemeinerten Darstellung unstrukturierter Modellunsicherheiten. Ein Effekt einer solchen LFT-basierten Unsicherheitsformulierung ist die Auftrennung eines unsicherheitsbehafteten Systems G_u in einen als

vollständig bekannt angenommenen verallgemeinerten nominellen Teil

$$\begin{pmatrix} y_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{G}_{\text{Nom},\Delta,\Delta} & \tilde{G}_{\text{Nom},\Delta,s} \\ \tilde{G}_{\text{Nom},m,\Delta} & \tilde{G}_{\text{Nom},m,s} \end{pmatrix}}_{\tilde{G}_{\text{Nom}}} \begin{pmatrix} u_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

und einen Teil Δ , der jegliche Unsicherheiten in sich vereint. Das unsicherheitsbehaftete System ist in diesem Fall durch

$$\begin{aligned} G_u &= \mathcal{F}_u(\tilde{G}_{\text{Nom}}, \Delta) \\ &= \tilde{G}_{\text{Nom},m,s} + \tilde{G}_{\text{Nom},m,\Delta} \Delta \left(I - \tilde{G}_{\text{Nom},\Delta,\Delta} \Delta \right)^{-1} \tilde{G}_{\text{Nom},\Delta,s} \end{aligned} \quad (4.46)$$

definiert. Aus der Forderung $G_{\text{Nom}} = \mathcal{F}_u(\tilde{G}_{\text{Nom}}, 0)$ und der Definition der oberen LFT aus Abschnitt E.1.1 ergibt sich in (4.45) die strukturelle Einschränkung $\tilde{G}_{\text{Nom},m,s} = G_{\text{Nom}}$, vergleiche auch [Rai94]. Eine ausführliche Definition der im Allgemeinen zulässigen Unsicherheiten Δ findet sich in [Rai94] (S. 184).

Im Falle multiplikativer Modellunsicherheiten gemäß (4.38) beziehungsweise (4.39) erfolgt eine Aufteilung von G_u in verallgemeinerte nominelle Strecken

$$G_{\text{Nom},e,v} = \begin{pmatrix} 0 & W_{M,e} \\ G_{\text{Nom},e} & G_{\text{Nom},e} \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad G_{\text{Nom},a,v} = \begin{pmatrix} 0 & W_{M,a} G_{\text{Nom},a} \\ I & G_{\text{Nom},a} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

und Rückführungen der Form $u_\Delta = \Delta_{M,e} y_\Delta$ beziehungsweise $u_\Delta = \Delta_{M,a} y_\Delta$. Die zulässigen

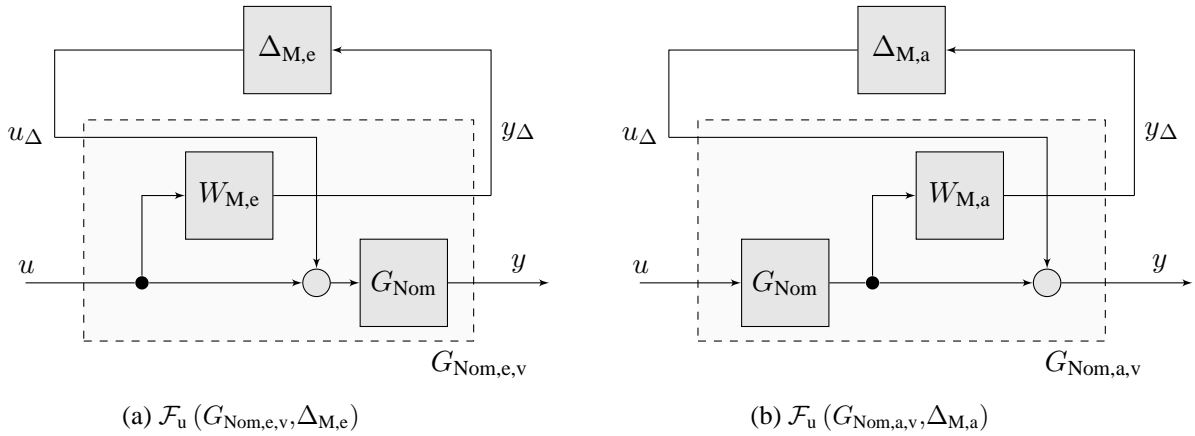


Abbildung 4.4: Ein- und ausgangsseitige multiplikative Modellunsicherheit in verallgemeinerter LFT-basierter Darstellung $\mathcal{F}_u(G_{\text{Nom},e,v}, \Delta_{M,e})$ beziehungsweise $\mathcal{F}_u(G_{\text{Nom},a,v}, \Delta_{M,a})$.

normbeschränkten unsicheren Übertragungsfunktionen sind gemäß (4.40) definiert, für die Gewichtungsfunktionen gilt erneut $W_{M,\cdot} \in \mathcal{RH}_\infty$. Hinsichtlich des Beispielsystems lässt sich zudem die asymptotische Stabilität der nominellen Strecke annehmen. Für jede zulässige Unsicherheit folgt

damit mittels

$$\begin{aligned} G_{M,e} &= \mathcal{F}_u(G_{\text{Nom},e,v}, \Delta_{M,e}) = G_{\text{Nom},e} + G_{\text{Nom},e} \Delta_{M,e} W_{M,e} \\ &= G_{\text{Nom},e} (I + \Delta_{M,e} W_{M,e}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} G_{M,a} &= \mathcal{F}_u(G_{\text{Nom},a,v}, \Delta_{M,a}) = G_{\text{Nom},a} + \Delta_{M,a} W_{M,a} G_{\text{Nom},a} \\ &= (I + \Delta_{M,a} W_{M,a}) G_{\text{Nom},a} \end{aligned} \quad (4.49)$$

ein Element der jeweiligen Modellschar $\mathcal{G}_{M,\cdot}$. Die Blockschaltbilder der voranstehenden LFTs finden sich in Abb. 4.4a beziehungsweise Abb. 4.4b. Die Äquivalenz der verallgemeinerten LFT-basierten Formulierung multiplikativer Modellunsicherheiten zu der gewöhnlichen Formulierung dieser Klasse von Modellunsicherheiten erschließt sich unmittelbar aus einem Vergleich von (4.48) mit (4.38) und von (4.49) mit (4.39).

4.3.4 Formulierung verschiedener Modellscharen zur Regelung des Beispielsystems

Da es sich bei dem Beispielssystem um ein Eingrößensystem handelt, stimmen ein- und ausgangsseitige multiplikative Modellunsicherheiten gemäß (4.48) beziehungsweise (4.49) überein. Abkürzend gilt daher im Folgenden $G_{\text{Nom}} = G_{\text{Nom},\cdot}$, $\Delta_M = \Delta_{M,\cdot}$, $W_M = W_{M,\cdot}$ und $\mathcal{G}_M = \mathcal{G}_{M,\cdot}$ mit $\cdot \in \{e,a\}$. Die zugehörige Modellschar sei definiert durch

$$\mathcal{G}_M = \{(1 + \Delta_M W_M) G_{\text{Nom}} \mid \Delta_M \in \mathcal{RH}_\infty, \|\Delta_M\|_\infty < \gamma_\Delta^{-1}\}. \quad (4.50)$$

Die vollständige Bestimmung von \mathcal{G}_M erfordert unter Annahme eines gegebenen $\gamma_\Delta > 0$ die Festlegung einer nominellen Strecke G_{Nom} sowie der Gewichtungsfunktion W_M . Die durch (4.41) beziehungsweise (4.42) unter Verwendung von (4.40) definierten Modellscharen ergeben sich ausgehend von (4.50) für den Fall $\gamma_\Delta = 1$.

Die Festlegung eines nominellen Streckenmodells G_{Nom} im Vorfeld des Entwurfs robuster Regler lässt sich als Freiheitsgrad des Entwurfsprozesses auffassen. In diesem Fall resultiert die Festlegung des nominellen Streckenmodells in (4.35) zu $G_{\text{Nom}} = G_N$, $N = 6$ aus einem Kompromiss zwischen einer möglichst geringen Ordnung des nominellen Streckenmodells und gleichzeitig geringen relativen $\delta_{\text{rel}}(G, G_{\text{Nom}}), \delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G_{\text{Nom}}), \delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G_{\text{Nom}})$ im relevanten Frequenzbereich. Die Verläufe der genannten Abweichungen in Abhängigkeit von der Approximationsordnung N finden sich in Abb. 4.2.

Um W_M festzulegen, wird ausgehend von einer gegebenen Modellschar zunächst $l_M(\omega)$ entsprechend (4.43) bestimmt. Unter Annahme eines bekannten $l_M(\omega)$, wird W_M , der Ungleichung (4.44) entsprechend, als eine obere Schranke von $l_M(\omega)$ definiert, sodass

$$l_M(\omega) \leq |W_M(i\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (4.51)$$

Durch die Einhaltung der voranstehenden Ungleichung folgt mit $\gamma_\Delta = 1$ in (4.50) die Beziehung

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_M. \quad (4.52)$$

Die Festlegung von W_M wird durch die Wahl einer möglichst einfach strukturierten Übertragungsfunktion auf eine endliche Zahl von Parametern zurückgeführt. Dabei kommt es in der Regel zu einem Kompromiss zwischen der Komplexität und der Ordnung von W_M auf der einen Seite und der Konservativität der Modellschar auf der anderen Seite. Im Fall des Beispielsystems wird für W_M eine Struktur der Form

$$W_M = \left(\frac{s + \omega_{B,W_M} K_{0,W_M}^{-\frac{1}{n_{W_M}}}}{K_{\infty,W_M}^{\frac{1}{n_{W_M}}} s + \omega_{B,W_M}} \right)^{n_{W_M}} \quad (4.53)$$

gewählt.

Im Folgenden werden zunächst zwei Modellscharen zur Regelung des Beispielsystems eingeführt. Die Modellschar \mathcal{G} besteht lediglich aus dem unendlich-dimensionalen Beispielsystem G , G_{Sim} sowie der Übertragungsfunktion G_{Mess} . Die Modellschar $\hat{\mathcal{G}}$ umfasst dagegen zusätzlich die Übertragungsfunktionen \hat{G}_{Mess} und \hat{G}_{Sim} .

Mit dem Ziel, jeweils die Beziehung (4.52) zu erfüllen, werden zu \mathcal{G} beziehungsweise $\hat{\mathcal{G}}$ die auf multiplikativen Modellunsicherheiten beruhenden Modellscharen \mathcal{G}_M und $\hat{\mathcal{G}}_M$ definiert. Die Definition von \mathcal{G}_M und $\hat{\mathcal{G}}_M$ folgt (4.50), wobei für die letztgenannte Modellschar die Gewichtungsfunktion \hat{W}_M verwendet wird. Die Wahl der Gewichtungsfunktionen unterliegt (4.51). Grundsätzlich eröffnet sich an dieser Stelle eine einfache Möglichkeit, parametrische oder andere Unsicherheiten in den Entwurfsprozess einfließen zu lassen. Dazu ist es allein notwendig, weitere Systeme in die Modellscharen zu inkludieren und diese damit bei der Bestimmung von $l_M(\omega)$ beziehungsweise $\hat{l}_M(\omega)$ anhand von (4.43) zu berücksichtigen.

Mit einer Parametrierung gemäß Tabelle 4.1 und jeweils $\gamma_\Delta = 1$ folgt für alle Frequenzen

$$\delta_{\text{rel}}(G, G_{\text{Nom}}) < |W_M| < |\hat{W}_M|, \quad \text{und} \quad \delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G_{\text{Nom}}) < |W_M| < |\hat{W}_M| \quad (4.54)$$

sowie

$$\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G_{\text{Nom}}) < |\hat{W}_M|. \quad (4.55)$$

Eine grafische Darstellung der voranstehenden Ungleichungen findet sich für den relevanten Fre-

Übertragungsfunktion				
$W_M(i\omega)$	$n_{W_M} = 6$	$\omega_{B,W_M} = 1980 \text{ rad/s}$	$K_{0,W_M} = 10$	$K_{\infty,W_M} = 1$
$\hat{W}_M(i\omega)$	$n_{\hat{W}_M} = 6$	$\omega_{B,\hat{W}_M} = 700 \text{ rad/s}$	$K_{0,\hat{W}_M} = 7,8$	$K_{\infty,\hat{W}_M} = 0,316$

Tabelle 4.1: Parametrierung der Gewichtungsfunktionen W_M und \hat{W}_M .

quenzbereich in Abb. 4.5. Die Parametrierungen von W_M und \hat{W}_M vervollständigen die Festlegung der beiden Modellscharen \mathcal{G}_M und $\hat{\mathcal{G}}_M$. Die vergleichsweise hohe Ordnung der verwendeten Gewichtungsfunktionen dient der Vermeidung übertrieben konservativer Modellscharen.

Zusammenfassend gilt für die bisher definierten Modellscharen die Beziehung $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_M \subset \hat{\mathcal{G}}_M$.

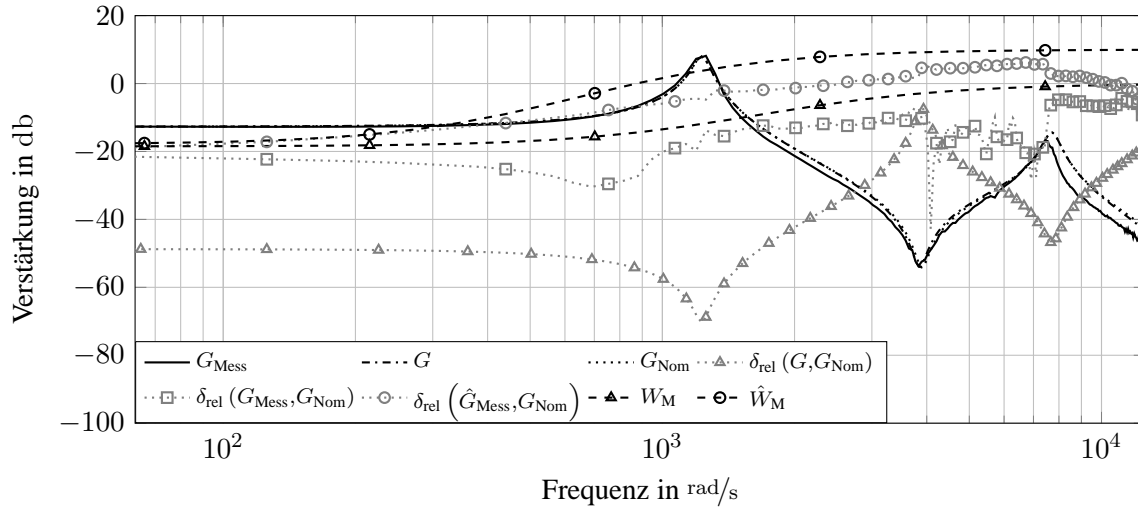


Abbildung 4.5: Relative Abweichungen $\delta_{\text{rel}}(G, G_{\text{Nom}})$, $\delta_{\text{rel}}(G_{\text{Mess}}, G_{\text{Nom}})$ sowie $\delta_{\text{rel}}(\hat{G}_{\text{Mess}}, G_{\text{Nom}})$ und Gewichtungsfunktionen W_M und \hat{W}_M der Modellscharen \mathcal{G}_M und $\hat{\mathcal{G}}_M$.

Falls die Eigenschaften eines Regelkreises zumindest robust gegenüber \mathcal{G}_M sind, gilt diese Robustheit aufgrund von (4.52) auch für alle Elemente aus \mathcal{G} und damit insbesondere für die unendlichdimensionale Strecke G und G_{Mess} .

Im Hinblick auf die Reglersynthese für das Beispielsystem erfolgt die strukturelle Festlegung einer weiteren Modellschar. Alle innerhalb dieser Arbeit verwendeten Kombinationen aus Entwurfsproblem und Reglersyntheseverfahren gewährleisten a priori ein Maß an robuster Stabilität des geschlossenen Regelkreises gegenüber multiplikativen Modellunsicherheiten. Um diese Kenntnis in die Analyse der geschlossenen Regelkreise in Abschnitt 4.6 einfließen zu lassen, wird neben den Modellscharen $\mathcal{G}_M \subset \hat{\mathcal{G}}_M$ zu jedem Regelkreis eine zusätzliche, ebenfalls auf einer multiplikativen Modellunsicherheit basierende Modellschar

$$\mathcal{G}_{M_d} = \{(1 + \Delta_M W_d) G_{\text{Nom}} \mid \Delta_M \in \mathcal{RH}_\infty, \|\Delta_M\|_\infty < 1\} \quad (4.56)$$

eingeführt. Die Gewichtungsfunktion W_d ist dabei innerhalb verschiedener Reglerentwürfe in Abschnitt 4.5 spezifisch festgelegt.

4.4 Methoden zur Synthese endlich-dimensionaler Regler

Der vorliegende Abschnitt dient der Definition und Diskussion der Entwurfsprobleme beider innerhalb dieser Arbeit verwendeten Reglersyntheseverfahren. Ein wesentliches Auswahlkriterium

für die verwendeten Reglersyntheseverfahren bildet die Konsistenz hinsichtlich der verfolgten Methodik zum Entwurf endlich-dimensionaler Regler für die betrachteten Klassen unendlich-dimensionaler Systeme und das Beispielsystem im Speziellen. Insbesondere wird bei der Reglersynthese innerhalb dieser Arbeit der unendlich-dimensionale Charakter der Strecke nur noch implizit durch ihre Zugehörigkeit zu einer Modellschar berücksichtigt, deren Formulierung sich in Abschnitt 4.3 findet. Aus diesem Vorgehen leitet sich der Anspruch an die Reglersyntheseverfahren ab, auf natürliche Weise die Einbeziehung einer entsprechenden Modellschar zu ermöglichen und unter Annahme eines erfolgreichen Reglerentwurfs a priori die Gewährleistung robuster Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu bieten. Ferner werden die Möglichkeit zur systematischen Berücksichtigung von Regelungszielen innerhalb des Entwurfsproblems sowie die Verfügbarkeit ausgereifter und zuverlässiger Werkzeuge zur Lösung des Entwurfsproblems als essentiell für die Eignung eines Reglersyntheseverfahrens angesehen.

In Anbetracht der genannten Auswahlkriterien wird nachfolgend die Synthese \mathcal{H}_∞ -suboptimaler Regler sowie die μ -Synthese zum Reglerentwurf für das Beispielsystem eingesetzt. Einleitend erfolgt dazu in Abschnitt 4.4.1 die Definition und Diskussion des Entwurfsproblems \mathcal{H}_∞ -optimaler und -suboptimaler Regler, gefolgt von Bemerkungen zu den gängigen Lösungsansätzen, die zu letzterem Entwurfsproblem existieren. Bekanntermaßen erlaubt die LFT-basierte Formulierung des \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems die geforderte systematische Berücksichtigung von Regelungszielen, eine explizite Berücksichtigung von Modellunsicherheiten erfolgt innerhalb dieses Entwurfsproblems jedoch in der Regel nicht. Dennoch garantieren die aus der Lösung eines geeignet formulierten \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems resultierenden \mathcal{H}_∞ -suboptimalen Regler a priori die robuste Stabilität des zugehörigen geschlossenen Regelkreises gegenüber gewissen unstrukturierten Modellunsicherheiten. Allerdings lassen sich im Allgemeinen bei Verwendung derartiger Regler nicht unmittelbar Aussagen zur robusten Performance des geschlossenen Regelkreises treffen.

Da die performanceorientierte Regelung des Beispielsystems a priori Aussagen zur robusten Performance des geschlossenen Regelkreises wünschenswert macht, folgen auf die Definition des \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems die Einführung der μ -Synthese als zweites Reglerentwurfsverfahren sowie Ausführungen zur algorithmischen Umsetzung dieses Verfahrens. Im Gegensatz zum \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblem ermöglicht und erfordert die auf dem strukturierten Singulärwert beruhende μ -Synthese explizit das Einbinden von Informationen über die Struktur vorhandener Modellunsicherheiten. Eine Einführung des strukturierten Singulärwertes findet sich in Abschnitt E.1.2. Unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen dem größten Singulärwert und dem strukturierten Singulärwert sind im Vergleich zu \mathcal{H}_∞ -suboptimalen Reglern daher die aus einer μ -Synthese resultierenden Regler insbesondere im Fall strukturierter Modellunsicherheiten als weniger konservativ zu erwarten. Ferner gestattet das Resultat einer μ -Synthese unmittelbar eine Aussage über die robuste Stabilität sowie die robuste Performance des zugehörigen Regelkreises und kann daher in diesem Sinn als Generalisierung des \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems angesehen werden.

4.4.1 Das \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblem

Definition des \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems

Das Standard-Entwurfsproblem \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler lässt sich als ein Optimierungsproblem formulieren, dessen Zielfunktion die induzierte Operatornorm einer in Abb. 4.6 dargestellten unteren LFT $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ der erweiterten Strecke \tilde{P} hinsichtlich eines Reglers K darstellt. Diesem Gedanken folgend, wird das Optimierungsproblem

$$\min_K \left\| \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K) \right\|_\infty \quad (4.57)$$

als \mathcal{H}_∞ -Standard-Entwurfsproblem bezeichnet. Sowohl im endlich-dimensionalen als auch im unendlich-dimensionalen Fall bietet das \mathcal{H}_∞ -Standard-Entwurfsproblem einen Rahmen, innerhalb dessen sich verschiedenste spezifische \mathcal{H}_∞ -Entwurfsprobleme formulieren und lösen lassen. Einen

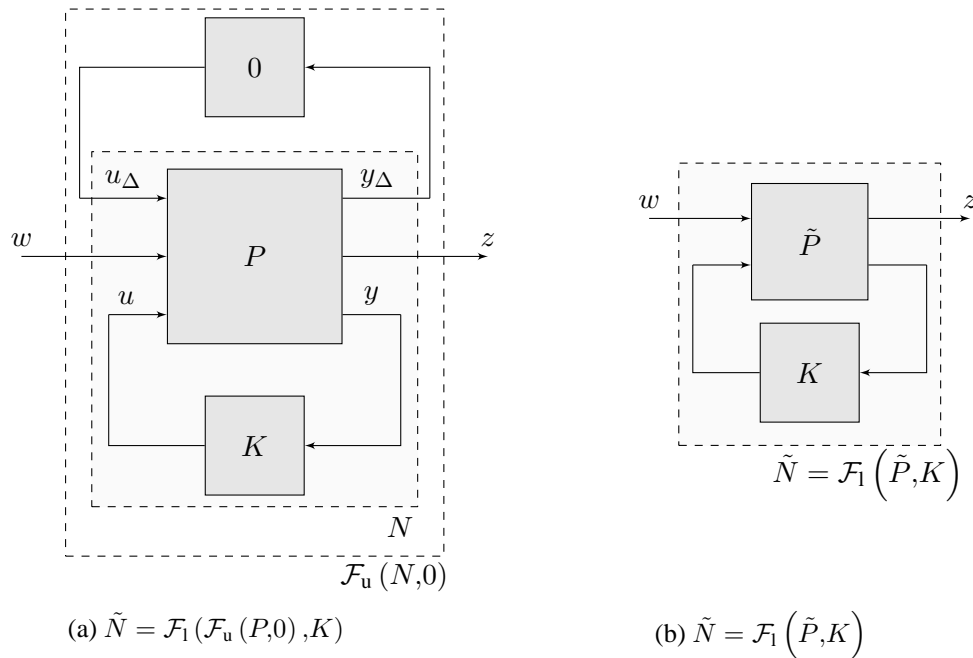


Abbildung 4.6: Die als Argument der \mathcal{H}_∞ -Norm im Kostenfunktional des \mathcal{H}_∞ -Standard-Entwurfsproblems auftretende LFT.

Überblick über die vielfältigen Möglichkeiten in diesem Kontext zusammen mit einer historischen Einordnung ausgehend von [Zam81] findet sich in unterschiedlichen Textbüchern wie beispielsweise [ZDG95], [SP05] oder [Sto00]. Darüber hinaus sei auf die deutschsprachige Einführung in [Rai94] verwiesen.

Den Ausführungen aus Abschnitt E.1.1 und insbesondere (E.93) folgend, wird $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ als Abbildung energiebeschränkter, kausaler externer Störgrößen w auf ebensolche Performance-Größen z verstanden. Die Annahme von $w \in \mathcal{H}_2(\mathcal{U}_w)$ und $z \in \mathcal{H}_2(\mathcal{Y}_z)$ sowie der jeweiligen 2-Norm

induziert gemäß (B.151) die ∞ -Norm hinsichtlich des in Abb. 4.6 dargestellten Operators

$$\left\| \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K) \right\|_{\infty} = \sup_{\|w\|_2=1, w \in \mathcal{H}_2(\mathcal{U}_w)} \left\| \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K) w \right\|_2. \quad (4.58)$$

Auf Basis von Satz 58 und (B.149) gilt zudem

$$\left\| \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K) \right\|_{\infty} = \sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma} \left(\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)(s) \right). \quad (4.59)$$

Gemäß der Operatornorm (Definition 43) lässt sich in diesem Fall $\left\| \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K) \right\|_{\infty}$ als schlimmstenfalls mögliche Verstärkung in einer Einheitssphäre enthaltener energiebeschränkter, kausaler externer Störgrößen während der Abbildung an $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ auf $z \in \mathcal{H}_2(\mathcal{Y}_z)$ interpretieren. Die hinsichtlich $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ induzierte Operatornorm hängt von der Festlegung der Funktionenräume der Eingangs- und Ausgangssignale ab. Neben der hier verwendeten Kombination von Funktionenräumen für die Eingangs- und Ausgangssignale finden sich weitere Kombinationen von Funktionenräumen, die ebenfalls die \mathcal{H}_{∞} -Operatornorm induzieren in [ZDG95] (S. 107). Durch alternative Festlegungen der beiden Funktionenräume lassen sich darüber hinaus auch weitere Operatornormen induzieren. Neben der ∞ -Norm sind im regelungstechnischen Kontext aufgrund physikalischer Deutbarkeit in erster Linie die 1- und 2-Operatornormen bedeutsam und gebräuchlich. Detaillierte Ausführungen zu induzierten Operatornormen finden sich beispielsweise in [ZDG95] (S. 107). Sowohl die \mathcal{H}_2 -Norm als auch die \mathcal{H}_{∞} -Norm zeichnen sich dabei zusätzlich insbesondere dadurch aus, dass zu diesen Operatornormen vergleichsweise einfach jeweils normoptimale Regler zu berechnen sind. Die \mathcal{H}_2 -Norm ist im Unterschied zur \mathcal{H}_{∞} -Norm eine Integral-Norm und wird durch die Annahme von Eingangssignalen mit beschränkter Spektraldichte und Ausgangssignalen mit beschränkter Leistung induziert. Im Folgenden beschränken sich die Betrachtungen aufgrund gewisser immanenter Robustheitseigenschaften \mathcal{H}_{∞} -optimaler Regler auf ebendiese normoptimalen Regler. Weitere Ausführungen hinsichtlich der Einführung der \mathcal{H}_{∞} -optimalen Regelungsansätze finden sich beispielsweise in [Zam81].

Motiviert durch praktische Überlegungen [ZDG95] (S. 406) sowie aufgrund einer vereinfachten numerischen Lösbarkeit wird anstelle der Bestimmung \mathcal{H}_{∞} -optimaler Regler auf Basis des Optimierungsproblems (4.57) häufig die Bestimmung \mathcal{H}_{∞} -suboptimaler Regler durchgeführt. Das Entwurfsproblem zur Bestimmung \mathcal{H}_{∞} -suboptimaler Regler besteht im Auffinden aller Regler, sodass

$$\left\| \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K) \right\|_{\infty} = \sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma} \left(\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)(s) \right) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma} \left(\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)(i\omega) \right) < \gamma. \quad (4.60)$$

Alle zu diesem Entwurfsproblem zulässigen \mathcal{H}_{∞} -suboptimalen Regler garantieren somit den Inhalt einer oberen Schranke γ hinsichtlich der Verstärkung der Energie der externen Störgrößen $w \in \mathcal{H}_2(\mathcal{U}_w)$ bei der Abbildung an $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ auf die Performance-Größen $z \in \mathcal{H}_2(\mathcal{Y}_z)$. In der Regel findet die Synthese \mathcal{H}_{∞} -suboptimaler Regler auf Basis von (4.60) unter Minimierung von γ statt. Die in (4.60) auftretende Gleichung ist nach der Substitution $s = i\omega$ durch die beispielsweise in [ZD98] (S. 50) beschriebene Verallgemeinerung des Maximum-Modulus Theorems begründet.

Im Hinblick auf die Synthese robuster Regler für das Beispielsystem bleibt festzuhalten, dass durch die Verwendung von \tilde{P} innerhalb des \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems keine explizite Berücksichtigung einer Modellschar während des Reglerentwurfs erfolgt und die Lösung des \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems im Allgemeinen nicht auf robuste Regler führt. Ein Beispiel dafür, dass das Standard-Entwurfsproblem gemäß (4.57) nicht zwingend Robustheitseigenschaften des geschlossenen Regelkreises gewährleistet, findet sich in [Sto00] (S. 4). Erst durch eine zielführende Formulierung der erweiterten Strecke garantieren resultierende \mathcal{H}_∞ -suboptimale Regler a priori ein gewisses Maß an robuster Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Die robuste Performance eines Regelkreises lässt sich im Allgemeinen nicht a priori durch \mathcal{H}_∞ -suboptimale Regler gewährleisten, die Aufhebung dieser Einschränkung erfordert die Anwendung alternativer Verfahren zur Reglersynthese. Innerhalb dieser Arbeit wird dazu in Abschnitt 4.4.2 die μ -Synthese eingeführt.

Bemerkungen zur numerischen Bestimmung \mathcal{H}_∞ -suboptimaler Regler

Im Hinblick auf die numerische Bestimmung \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler existieren verschiedene Ansätze, denen unterschiedliche Vorgehensweisen und letztendlich auch unterschiedliche Optimierungsprobleme zugrunde liegen. Ein wohlbekannter Lösungsansatz auf Basis algebraischer Riccati-Gleichungen [Doy+89] führt auf den zentralen Regler im Sinne von [Doy+89]. Motiviert durch die Entwicklung numerisch effizienter Lösungsalgorithmen für konvexe Optimierungsprobleme existieren Formulierungen des Entwurfsproblems \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler in Form konvexer Optimierungsprobleme ([Boy+94],[DP05]). Derartige Ansätze beruhen auf einer Minimierung von γ unter Einhaltung von Nebenbedingungen in Form linearer Matrixungleichungen. Das letztgenannte Vorgehen zur Berechnung \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler erlaubt weniger restriktive Anforderungen an die erweiterte Strecke, bietet erhöhte Flexibilität im Hinblick auf zusätzliche Nebenbedingungen, und darüber hinaus stehen zur numerischen Lösung vielfach zitierte effiziente Innere-Punkte-Methoden ([Boy+94]) zur Verfügung. Unter der Annahme der Existenz zulässiger Regler resultiert aus den beiden geschilderten Vorgehensweisen, ohne weitere Schritte zur Reduktion der Ordnung des Reglers, jeweils ein Regler, dessen Ordnung mit der Ordnung der erweiterten Strecke übereinstimmt. Ein derartig berechneter Regler besitzt somit bestenfalls die Ordnung der ursprünglichen Strecke. Diese vergleichsweise hohe Reglerordnung kann als ein wesentlicher Nachteil der Synthese \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler nach den beschriebenen Verfahren angesehen werden.

Aktuelle Ansätze zur Bestimmung \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler fester Ordnung oder vorgegebener Struktur nutzen unmittelbar die \mathcal{H}_∞ -Operatornorm als Zielfunktional und heben dabei den Nachteil hinsichtlich der hohen Reglerordnung nahezu vollständig auf. Allerdings führen derartige strukturell beschränkte \mathcal{H}_∞ -Entwurfsprobleme im Allgemeinen auf nicht konvexe Optimierungsprobleme mit einem nicht-glatten Zielfunktional. Diese Problemstruktur erfordert einen mathematisch umfangreicheren Rahmen und darüber hinaus erhöht sich der Aufwand während der Berechnung des Reglers mitunter erheblich. Insbesondere im Falle der Verwendung lokaler Optimierungsalgorithmen zur Lösung der resultierenden nicht konvexen Probleme ist darüber hinaus der Nachweis für das Erreichen eines globalen Optimums offen. Trotz der verschiedenen theoretischen Herausforderungen bei der Bestimmung strukturell beschränkter \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler konnten mittels der für diese

Problemstellung existierenden Programmpakete bereits verschiedentlich bei der Lösung diverser Benchmark-Probleme gute Ergebnisse erzielt werden ([Bur+06; AN06; Apk11]).

4.4.2 μ -Synthese

Der vorliegende Abschnitt führt mit der μ -Synthese das zweite innerhalb dieser Arbeit eingesetzte Verfahren zur Reglersynthese ein. Unter einer μ -Synthese wird die Bestimmung eines Reglers K durch das Lösen des Entwurfsproblems

$$\inf_K \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\mathcal{M}_{\Delta_e}}(\mathcal{F}_1(P, K)(i\omega)) \quad (4.61)$$

verstanden. Der μ -Synthese liegt somit der strukturierte Singulärwert (Definition 105) des erweiterten Regelkreises $N = \mathcal{F}_1(P, K)$ als Gütemaß für den Reglerentwurf zugrunde. Damit instrumentalisiert die μ -Synthese die ursprünglich zur Robustheitsanalyse von Regelkreisen herangezogene Erweiterung des größten Singulärwertes für die Reglersynthese. Eine suboptimale Formulierung der μ -Synthese wird beispielsweise in [Mac04] (S. 397) eingeführt. Die Entwurfsaufgabe entsprechend (4.61) besteht in der Bestimmung eines Reglers, der gewährleistet, dass über alle Frequenzen erst ein möglichst großes $\Delta_e \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ die Singularität von $I - N\Delta_e$ herbeiführt. Die Sinnhaftigkeit dieses Entwurfsproblems im Hinblick auf die robuste Stabilität und robuste Performance eines zugehörigen Regelkreises ergibt sich dabei aus Satz 78.

Da im Allgemeinen kein direktes Verfahren zur Lösung von (4.61) zur Verfügung steht, wird die Lösung des μ -Synthese-Problems in der Regel auf Basis des Ergebnisses einer veränderten Problemformulierung approximiert. Innerhalb dieser Arbeit wird dazu die in diesem Zusammenhang wohlbekannte D-K-Iteration eingesetzt. Eine ausführliche Beschreibung des Vorgehens bei der D-K-Iteration lässt sich beispielsweise [Bal89] oder [ZDG95] entnehmen. Im Rahmen der D-K-Iteration wird das Entwurfsproblem der μ -Synthese aus (4.61) zunächst durch

$$\min_K \inf_{D, D^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty} \|D\mathcal{F}_1(P, K)D^{-1}\|_\infty \quad (4.62)$$

substituiert. Dabei wird der strukturierte Singulärwert durch seine obere Schranke ersetzt, zudem erfolgt eine Skalierung des erweiterten Regelkreises $\mathcal{F}_1(P, K)$. Ausführungen zu relevanten Eigenschaften der dabei verwendeten Skalierung D und insbesondere hinsichtlich ihres Einflusses auf den strukturierten und größten Singulärwert von $N = \mathcal{F}_1(P, K)$ finden sich in Abschnitt E.1.2. Vereinfachend werden an dieser Stelle alle innerhalb von Δ_e auftretenden vollbesetzten Unsicherheitsblöcke $\Delta_j \in \mathbb{C}^{n_j \times m_j}, j = 1, \dots, n_F$ durch die Festlegung $n_j = m_j, j = 1, \dots, n_F$ als quadratisch $\Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}, j = 1, \dots, n_F$ angenommen. Eine Verallgemeinerung auf nicht quadratische vollbesetzte Unsicherheiten lässt sich durch die Anwendung voneinander unabhängiger linksseitiger und rechtsseitiger Skalierungen D_L beziehungsweise D_R erreichen ([Bal89]).

Der Prozess zum Auffinden einer Lösung des noch immer komplexen Entwurfsproblems (4.62) besteht in einem iterativen Vorgehen, dessen Konvergenz exemplarisch vielfach belegt werden konnte, allerdings in letzter Konsequenz mathematisch unbewiesen ist. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt,

dass das Fixieren einer der beiden in (4.62) gesuchten Größen, also entweder von D oder von K , das Entwurfsproblem auf die Suche nach der jeweils verbleibenden Größe und damit auf ein separates Problem vereinfachter Struktur reduziert. Tatsächlich führt die Annahme eines festen D beziehungsweise eines fixen K auf ein konvexes Optimierungsproblem hinsichtlich K respektive D . Das iterative Ermitteln einer Lösung von (4.62) besteht im wiederholten sukzessiven Lösen der beiden vereinfachten Teilprobleme.

Für feste Skalierungen $D, D^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ resultiert aus (4.62) aufgrund von $D\mathcal{F}_1(P, K)D^{-1} = \mathcal{F}_1(P_D, K)$ mit $P_D = \tilde{D}P\tilde{D}^{-1}$ und

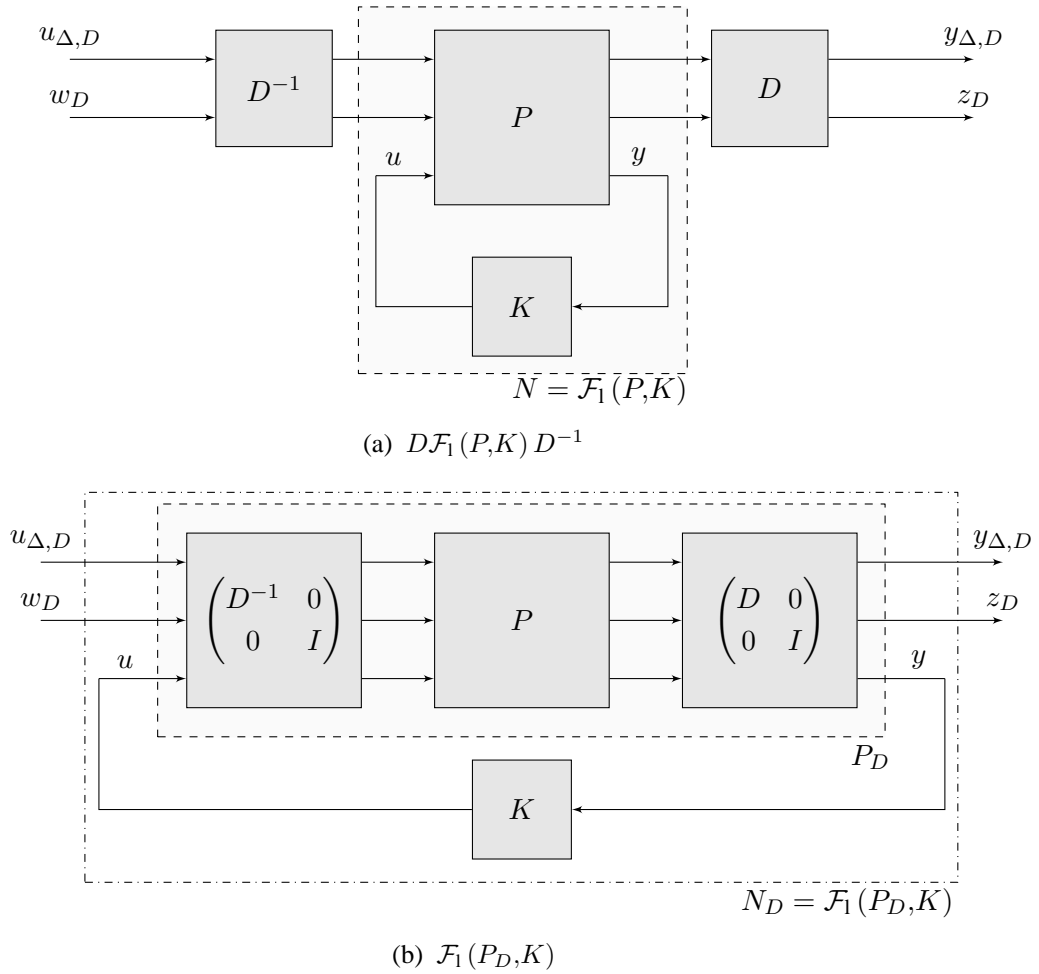


Abbildung 4.7: Äquivalente Darstellungen des Arguments $\mathcal{F}_1(P_D, K) = D\mathcal{F}_1(P, K)D^{-1}$ innerhalb des Kostenfunktional der D-K-Iteration.

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

ein \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblem für die skalierte erweiterte Strecke P_D der Form

$$\min_K \|D\mathcal{F}_1(P, K)D^{-1}\|_\infty = \min_K \|\mathcal{F}_1(P_D, K)\|_\infty. \quad (4.64)$$

Eine Darstellung der skalierten erweiterten Strecke in Form eines Blockdiagramms findet sich in Abb. 4.7. Eine genaue Definition der zulässigen Skalierungen D findet sich in Abschnitt E.1.2. Das zugehörige suboptimale \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblem hinsichtlich P_D lässt sich als Optimierungsproblem formulieren und anschließend mit den bekannten Methoden lösen. Ein resultierender Regler besitzt in einem derartigen Fall eine Ordnung von $n_K = n_P + 2n_D$. Entsprechend ist für die Skalierungen D eine möglichst geringe Ordnung anzustreben.

Unter der Annahme eines festen Reglers K entspricht (4.62) der Suche nach der oberen Schranke des strukturierten Singulärwertes. Angelehnt an die Formulierung aus [ZDG95] (S. 288) gilt

$$\inf_{D, D^{-1} \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{H}_\infty}} \|D \mathcal{F}_1(P, K) D^{-1}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \inf_{D \in \{D_\omega\}_{\omega \in \mathbb{R}}} \bar{\sigma}(D_\omega \mathcal{F}_1(P, K)(i\omega) D_\omega^{-1}). \quad (4.65)$$

Eine Begründung für die Gültigkeit der voranstehenden Gleichung findet sich in [ZDG95] (S. 288). Die Definition der Folgen $\{D_\omega\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ sowie der Menge $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{H}_\infty}$ wird in Abschnitt E.1.2 eingeführt. Die rechte Seite von (4.65) lässt sich zu diskreten Frequenzen jeweils als konvexes Optimierungsproblem formulieren und als solches lösen. Beweise der Konvexität des resultierenden Problems finden sich unter anderem in [SD84] oder in [SO90]. Da der größte Singulärwert die obere Schranke des strukturierten Singulärwertes bildet, folgt aus $\bar{\sigma}(D_\omega \mathcal{F}_1(P, K)(i\omega) D_\omega^{-1}) < \gamma, \forall \omega$ unmittelbar $\mu_{\mathcal{M}_{\Delta_e}}(\mathcal{F}_1(P, K)(i\omega)) < \gamma, \forall \omega$. Eine Beschreibung des hinreichenden Charakters der oberen Schranke in diesem Zusammenhang und eine entsprechende Verwendung der unteren Schranke des strukturierten Singulärwertes wird in [PD93] (S. 78) diskutiert.

Die Lösung von (4.65) zu einer endlichen Anzahl diskreter Frequenzen $\omega_i, i = 1, \dots, N_\omega, N_\omega < \infty$ führt auf eine entsprechende Anzahl von Skalierungsmatrizen $\{D_{\omega_i}\}_{\omega_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, N_\omega}, N_\omega < \infty$. Um die Voraussetzungen für die erneute Reglersuche zu schaffen, wird der über alle Frequenzen durch $D_{\omega_i}, i = 1, \dots, N_\omega, N_\omega < \infty$ diskretisierte Verlauf von D_ω durch ein endlich-dimensionales, realisierbares, minimalphasiges und stabiles D approximiert, sodass neben $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{RH}_\infty}$ auch $D^{-1} \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{RH}_\infty}$ gilt. Da für derartige Übertragungsfunktionen bei bekanntem Amplitudenverlauf in eindeutiger Weise der Phasenverlauf folgt, kann die besagte Approximation allein anhand des Amplitudenverlaufs durchgeführt werden. Dabei ist zu beachten, dass entsprechend der Ausführungen aus Abschnitt E.1.2 weder die $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{H}_\infty}$ noch die approximierenden $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{RH}_\infty}$ zu einer festen Frequenz ein Element von $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ sein müssen.

Ergänzend zu und im Wechsel mit den genannten Optimierungsschritten hinsichtlich K beziehungsweise D beinhaltet die D-K-Iteration jeweils eine μ -Analyse des geschlossenen Regelkreises. Das Resultat dieser Analyse-Schritte kann zur Überprüfung eines Abbruchkriteriums herangezogen werden. Im Folgenden wird als Resultat der μ -Synthese ein Regler K angenommen, sodass für ein $\gamma > 0$

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\Delta_e}(N(i\omega)) < \gamma \quad (4.66)$$

gilt. Unter der Annahme der nominellen Stabilität von $N = \mathcal{F}_1(P, K)$ gewährleistet ein derartiger Regler gemäß Satz 78 neben der Korrektgestelltheit auch die robuste Stabilität und robuste Performance von N hinsichtlich der angenommenen Unsicherheiten mit $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$.

Eine ausführliche kritische Diskussion der Vor- und Nachteile der μ -Synthese im Allgemeinen sowie der D-K-Iteration als algorithmische Umsetzung der μ -Synthese im Speziellen findet sich in [Bal89] (S. 28). Als wesentliche Schwachstelle der D-K-Iteration wird dabei der fehlende Nachweis der Konvergenz des Verfahrens gegen ein globales Minimum von (4.61) angeführt. Darüber hinaus erlaubt die Beschränkung auf ein kompaktes Frequenzintervall keine unmittelbaren Aussagen hinsichtlich aller $\omega \in \mathbb{R}$. Diesen offenen Punkten theoretischer Natur steht die durch verschiedene Quellen belegte Eignung des Verfahrens zur Behandlung praktischer regelungstechnischer Problemstellungen gegenüber. Innerhalb dieser Arbeit wird auf weiterführende Betrachtungen zur globalen Optimalität eines mittels der D-K-Iteration entworfenen Reglers verzichtet. Die ausgezeichnete Eignung der mittels der D-K-Iteration synthetisierten Regler zur Regelung des Beispielsystems wird durch die Anwendung der Regler auf das reale Beispielsystem und damit im praktischen Einsatz nachgewiesen. Die entsprechenden Resultate finden sich in Abschnitt 4.6.

4.5 Entwurf endlich-dimensionaler Regler für das Beispielsystem

Der vorliegende Abschnitt thematisiert die Anwendung der in Abschnitt 4.4 eingeführten Methoden zur Synthese endlich-dimensionaler Regler auf das Beispielsystem. Entsprechend der dort geschilderten Systematik beruht der Entwurf der endlich-dimensionalen Regler für das unendlich-dimensionale Beispielsystem an dieser Stelle auf der in Abschnitt 4.2.6 definierten nominellen Strecke und den unter Annahme multiplikativer Modellunsicherheiten in Abschnitt 4.3 eingeführten Modellscharen $\hat{\mathcal{G}}_M \supset \mathcal{G}_M$.

Einleitend erfolgt in Abschnitt 4.5.1 eine Definition der Regelungsziele, die es bei der Regelung des Beispielsystems im geschlossenen Regelkreis einzuhalten gilt. Darauf folgt in Abschnitt 4.5.2 ein kurzer Überblick über die nachfolgend aus Kombinationen von Regelkreisstrukturen und Reglersyntheseverfahren formulierten Entwurfsprobleme. Entsprechend dieser Strukturierung wird mit der Formulierung verschiedener erweiterter Strecken die Basis für die Aufstellung zugehöriger \mathcal{H}_∞ -Entwurfsprobleme und μ -Synthese-Probleme geschaffen. Die anschließende Formulierung und Lösung der einzelnen Entwurfsprobleme in den Abschnitten 4.5.3 und 4.5.4 enthält jeweils eine vollständige Parametrierung der Problemstellung sowie die Vorstellung und Diskussion des Resultats des Reglerentwurfs. Neben den geschlossen auf Basis einer LFT im Rahmen der Reglersyntheseverfahren aus Abschnitt 4.4 zu formulierenden Regelungskonzepten findet dabei zusätzlich ein Konzept auf Basis einer flachheitsbasierten Vorsteuerung Verwendung.

4.5.1 Definition der Regelungsziele

Der Reglerentwurf für das Beispielsystem erfolgt mit der Intention, eine gezielte Einhaltung des Sollwerts der Auslenkung des realen Biegewandlers an einer definierten Position zu ermöglichen.

Als Messgröße steht der zeitliche Verlauf der Auslenkung an der definierten Position zur Verfügung. Entsprechend Abschnitt 2.3.4 ist das reale Messglied totzeitbehaftet.

Ohne weitere Ausführungen wird die Stabilisierung der endlich-dimensionalen nominellen Strecke G_{Nom} als fundamentale Anforderung an einen Regler aufgefasst. Der in Abschnitt 4.4 geschilderten Systematik zum Entwurf endlich-dimensionaler Regler für unendlich-dimensionale Strecken folgend und unter Berücksichtigung des realen Messglieds wird ferner die robuste Stabilisierung der Modellschar $\hat{\mathcal{G}}_{\text{M}} \supset \mathcal{G}_{\text{M}}$ als Regelungsziel mit gleichsam hoher Priorität erachtet.

Über die robuste Stabilisierung der Strecke hinaus soll die Regelung des Biegewandlers die Möglichkeit zu gleichsam hoch agilen und äußerst präzisen Veränderungen der Regelgröße gewährleisten. Unter Annahme sprungförmiger Änderungen der Führungsgröße mit einer maximalen Sprunghöhe von 0,1 mm sind Anstiegszeiten von 3 ms bei einem maximalen Überspringen von 5 % und einer Einschwingzeit von 6 ms zu realisieren. In Tabelle 4.7 findet sich eine Zusammenfassung der genannten Regelungsziele. Neben der Einhaltung der nominellen Performance gewährleistet ein Regler idealerweise auch die robuste Performance des geschlossenen Regelkreises unter Berücksichtigung von $\hat{\mathcal{G}}_{\text{M}}$. Die innerhalb von $\hat{\mathcal{G}}_{\text{M}}$ berücksichtigte totzeitbehaftete Strecke bedingt allerdings in Kombination mit G_{Nom} eine sehr konservative Formulierung von $\hat{\mathcal{G}}_{\text{M}}$. Daher wird im Folgenden die robuste Performance in erster Linie hinsichtlich der idealisierten Strecke \mathcal{G}_{M} gefordert.

Neben den genannten quantitativen Anforderungen an den Regelkreis leitet sich eine strukturelle Anforderung an den Regler aus der Forderung nach stationärer Genauigkeit des Regelkreises

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (4.67)$$

unter Berücksichtigung sprungförmiger Führungs- und Störgrößen ab.

4.5.2 Formulierung der Regelungsziele innerhalb des Entwurfsproblems

Die Einhaltung der in Abschnitt 4.5.1 genannten Anforderungen an die Regelung des Beispielsystems erfordert die Festlegung einer geeigneten Reglerstruktur, die als Grundlage des Reglerentwurfs dient. Die Forderung nach hoch dynamischen und präzisen Änderungen der Regelgröße, bei gleichzeitiger robuster Stabilität des Regelkreises, bedingt die Wahl einer Reglerstruktur mit zwei Freiheitsgraden. Als Spezialfall einer derartigen Reglerstruktur wird zunächst eine Modellfolgeregelung gemäß Abschnitt E.2.3 eingeführt. Zur Formulierung des zugehörigen Entwurfsproblems im Rahmen der \mathcal{H}_{∞} und μ -Methodik wird dazu ein später detailliert spezifiziertes Gewichtungsschema mit der Bezeichnung Gewichtungsschema A eingeführt. Besonders hervorzuheben ist die im Fall der Modellfolgeregelung innerhalb des Gewichtungsschemas A systematisch berücksichtigte integrale Erweiterung. Das Gewichtungsschema A kann damit als eine Generalisierung eines eingangsseitigen $S_e/KS_e/T_e$ -Gewichtungsschemas mit integraler Streckenerweiterung angesehen werden, und insbesondere die Rückführung der Modellfolgeregelung beruht auf dem letztgenannten Gewichtungsschema. Ausgehend vom Gewichtungsschema A wird die Synthese eines \mathcal{H}_{∞} -suboptimalen Modellfolgereglers als Reglerentwurf A bezeichnet, der Entwurf einer entsprechenden Regelung mittels der μ -Methodik trägt die Bezeichnung Reglerentwurf A_{μ} .

Entwurf	Regelkreisstruktur	Gewichtungsschema	Synthesverfahren	Nominelle Strecke	Explizite Modellschar
A	2 Freiheitsgrade, Modellfolgeregelung	A	\mathcal{H}_∞ -suboptimal	G_{Nom}	-
A_μ	2 Freiheitsgrade, Modellfolgeregelung	A	μ -Synthese	G_{Nom}	\mathcal{G}_M
B	2 Freiheitsgrade, Trajektorienfolgeregelung	$S_e/KS_e/T_e$	Flachheitsbasiert/ μ -Synthese	G_{Nom}	\mathcal{G}_M

Tabelle 4.2: Übersicht über die eingesetzten Kombinationen aus Gewichtungsschemata und Reglersyntheseverfahren.

Im Anschluss an die Modellfolgeregelung wird ein zweiter Regelungsansatz mit zwei Freiheitsgraden eingeführt, der im Folgenden die Bezeichnung Trajektorienfolgeregelung beziehungsweise Reglerentwurf B trägt. Strukturell stimmt der Regelkreis der Trajektorienfolgeregelung mit dem der Modellfolgeregelung überein. Abweichend wird bei der Trajektorienfolgeregelung allerdings die differentielle Flachheit der nominellen Strecke zur Generierung der Vorsteuerung ausgenutzt. Da sich der Entwurf der Trajektorienfolgeregelung dadurch nicht unmittelbar geschlossen im Rahmen der \mathcal{H}_∞ - oder μ -Methodik formulieren lässt, erfolgt die Synthese der Vorsteuerung und der Rückführung in diesem Fall separat voneinander. Wie bereits im Fall der Modellfolgeregelung basiert die Synthese der Rückführung dabei auf einem eingangsseitigen $S_e/KS_e/T_e$ -Gewichtungsschema mit integraler Streckenerweiterung. Die Berechnung der Rückführung beruht dabei auf der μ -Synthese.

4.5.3 Entwurf einer Modellfolgeregelung mittels \mathcal{H}_∞ - und μ -Methodik

Der vorliegende Abschnitt thematisiert einleitend die Definition einer erweiterten Strecke zur Formulierung eines Entwurfsproblems einer Modellfolgeregelung für das Beispielsystem. Das zugehörige Gewichtungsschema wird als Gewichtungsschema A bezeichnet. Daran schließen sich die Synthese jeweils einer Modellfolgeregelung mittels der \mathcal{H}_∞ - und der μ -Methodik an. Diese Reglerentwürfe tragen die Bezeichnung Reglerentwurf A beziehungsweise Reglerentwurf A_μ .

Umsetzung struktureller Anforderungen

Als Spezialfall einer Reglerstruktur mit zwei Freiheitsgraden wird im Folgenden die in Abschnitt E.2.3 vorgestellte Modellfolgeregelung eingesetzt. Das zugehörige Regelgesetz lautet

$$y_K = \begin{pmatrix} K_f + \tilde{K}_b G_r & -\tilde{K}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Der aus der Verwendung der Modellfolgeregelung resultierende geschlossene Regelkreis findet sich in Abb. 4.8. Die Vorteile des gewählten Ansatzes werden in Abschnitt E.2.3 erläutert. Die charakteristischen Pfade des geschlossenen Regelkreises gemäß Abb. 4.8 ergeben sich aus (E.77)

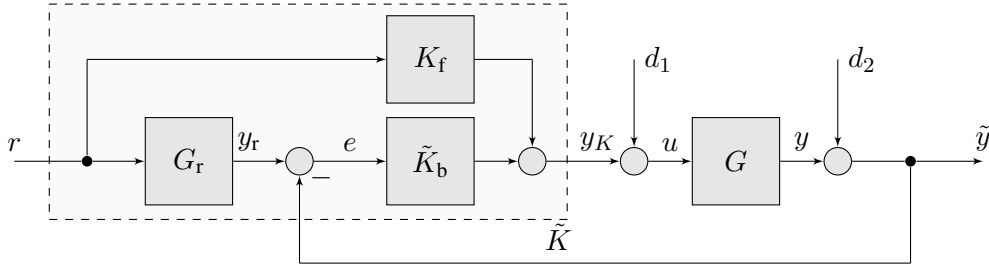


Abbildung 4.8: Struktur der Modellfolgeregelung.

zu

$$\begin{pmatrix} y \\ \tilde{y} \\ y_K \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_e G & -T_e & S_e G (K_f + \tilde{K}_b G_r) \\ S_e G & S_e & S_e G (K_f + \tilde{K}_b G_r) \\ -T_u & -S_u \tilde{K}_b & S_u (K_f + \tilde{K}_b G_r) \\ -S_e G & -S_e & S_e (G_r - G K_f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ r \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Dabei gilt $S_{er} = S_e G_r - T_{fyr} = S_e (G_r - G K_f)$ mit $T_{fyr} = S_e G K_f$ und

$$S_e = (1 + G \tilde{K}_b)^{-1}, \quad T_e = G \tilde{K}_b (1 + G \tilde{K}_b)^{-1} = 1 - S_e, \quad (4.70)$$

$$S_u = (1 + \tilde{K}_b G)^{-1}, \quad T_u = (1 + \tilde{K}_b G)^{-1} \tilde{K}_b G = 1 - S_u. \quad (4.71)$$

Für das Beispielsystem folgt aufgrund von $G \tilde{K}_b = \tilde{K}_b G$ zusätzlich $S_e = S_u$ sowie $T_e = T_u$. Die Übertragungsfunktion S_{er} kann als mit der Sensitivität gewichtete Abweichung des Verhaltens der vorgesteuerten Strecke $G K_f$ vom Verhalten des Referenzmodells G_r angesehen werden. Im Falle einer stabil invertierbaren Strecke folgt eine ideale Modellfolgeregelung $(G_r - G K_f) = 0$ formal unmittelbar aus der Wahl $K_f = G^{-1} G_r$, sodass im störungsfreien Fall $e = 0 \cdot r$ gilt. Die Übertragungsfunktion $T_{fyr} = S_e G K_f = G S_u K_f$ beschreibt den Anteil des Übertragungsverhaltens der Führungsgröße r auf die Regelgröße y , der im geschlossenen Regelkreis durch den im Vorwärtszweig angeordneten Anteil des Reglers K_f bedingt wird.

Die in 4.5.1 erklärten Anforderungen an die Regelung des Beispielsystems umfassen mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}(e(t)) s = 0 \quad (4.72)$$

die stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises unter Berücksichtigung sprungförmiger Führungsgrößen und Störsignale. Um im Allgemeinen die stationäre Genauigkeit unter Berücksichtigung bestimmter Klassen von Führungs- oder Störgrößen garantieren zu können, muss, dem Prinzip des inneren Modells [Lun06] (S. 329) folgend, die offene Wirkungskette beziehungsweise die Kreisverstärkung $L_e = G \tilde{K}_b$ ein Modell der Führungs- beziehungsweise Störgröße enthalten. Unter der Annahme sprungförmiger Störungen muss L_e demnach einen Integralanteil aufweisen. Da im Fall des Beispielsystems kein Modell einer derartigen Störung in der Strecke enthalten ist,

muss zur Gewährleistung von (4.72) der Regler den besagten Integralanteil enthalten. Ohne weitere strukturelle Forderungen hinsichtlich der zulässigen Regler weist ein aus der Lösung eines \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems oder einer μ -Synthese resultierender Regler diese Eigenschaft nicht auf.

Um im Fall der verwendeten Modellfolgeregelung einen Integralanteil im Regler zu erzwingen, ist das folgende Vorgehen an die Ausführungen in [ZDG95] (S. 450ff) angelehnt und an die Anwendung in Kombination mit der Modellfolgeregelung adaptiert. Zunächst erfolgt eine Überführung des Regelungsziels (4.72) in Anforderungen an die charakteristischen Übertragungsfunktionen. Um (4.72) unter Berücksichtigung sprungförmiger Eingangssignale $r = \frac{1}{s}, d_1 = \frac{1}{s}$ und $d_2 = \frac{1}{s}$ gewährleisten zu können, folgt unter der Annahme von

$$\lim_{s \rightarrow 0} G < \infty, \quad \lim_{s \rightarrow 0} G_r < \infty, \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow 0} GK_f < \infty \quad (4.73)$$

aus der letzten Zeile von (4.69) die Bedingung

$$\lim_{s \rightarrow 0} S_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (I + G(s)K_b(s))^{-1} = 0. \quad (4.74)$$

Die Einhaltung der Forderung aus (4.72) ist damit auch im Fall der Modellfolgeregelung nur von der verwendeten Rückführung K_b abhängig. Das Erzwingen der Einhaltung von (4.74) im geschlossenen Regelkreis erfordert eine Gewichtung der Sensitivität im Entwurfsproblem mit einer Gewichtungsfunktion, deren Verstärkung für $s \rightarrow 0$ gegen unendlich geht, also einen Integralanteil enthält. Aus den in [ZDG95] genannten Gründen besteht nicht die Möglichkeit, eine derartige Gewichtung unmittelbar in das \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblem einzubringen. Statt dessen wird eine zumindest in der erweiterten Strecke als integrale Erweiterung der Strecke zu interpretierende Übertragungsfunktion $y_Q = Qu_Q$ der Form

$$Q = \frac{K_Q (s + \omega_{B,Q})}{s} \quad (4.75)$$

mit den zwei freien Parametern K_Q und $\omega_{B,Q} > 0$ derart eingeführt, dass $\tilde{K}_b = K_b Q$.

Die daraus folgenden charakteristischen Übertragungsfunktionen des Regelkreises lassen sich unmittelbar aus Gleichung (4.69) ableiten. Für das Beispielsystem gilt die Kommutativität der Übertragungsfunktionen Q, G und K_b und somit $Q GK_b = GK_b Q$. Unter Berücksichtigung von (4.75) und der Annahme, dass K_b keine Nullstelle im Ursprung besitzt, weisen der Regler $\tilde{K}_b = K_b Q$ und damit die Kreisverstärkung $\tilde{L}_e = G\tilde{K}_b$ den erwünschten Integralanteil auf.

Die Vernachlässigung der Elemente der Vorsteuerung führt mit $K_f = 0$ und $G_r = 1$ in Gleichung (4.69) auf das Übertragungsverhalten eines Regelkreises mit einem Freiheitsgrad. Die resultierenden charakteristischen Übertragungsfunktionen ergeben sich analog zu (E.69).

Definition der erweiterten Strecke

Die Reglersynthese zur Bestimmung der Modellfolgeregelung erfolgt innerhalb dieser Arbeit basierend auf der in Abb. 4.9 dargestellten erweiterten Strecke in einem einzelnen Schritt. Grundsätzlich

besteht allerdings auch die Möglichkeit des separaten und sukzessiven Entwurfs der Bestandteile $K_r = K_f + \tilde{K}_b G_r$ und $K_y = \tilde{K}_b$ des Regelgesetzes. Insbesondere hinsichtlich des Entwurfs von K_r sei dazu auf den im Zusammenhang mit dem Entwurf \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler konsistenten Ansatz aus [PP01] verwiesen. Um eine gezielte Vorgabe der frequenzabhängigen Singulärwertverläufe

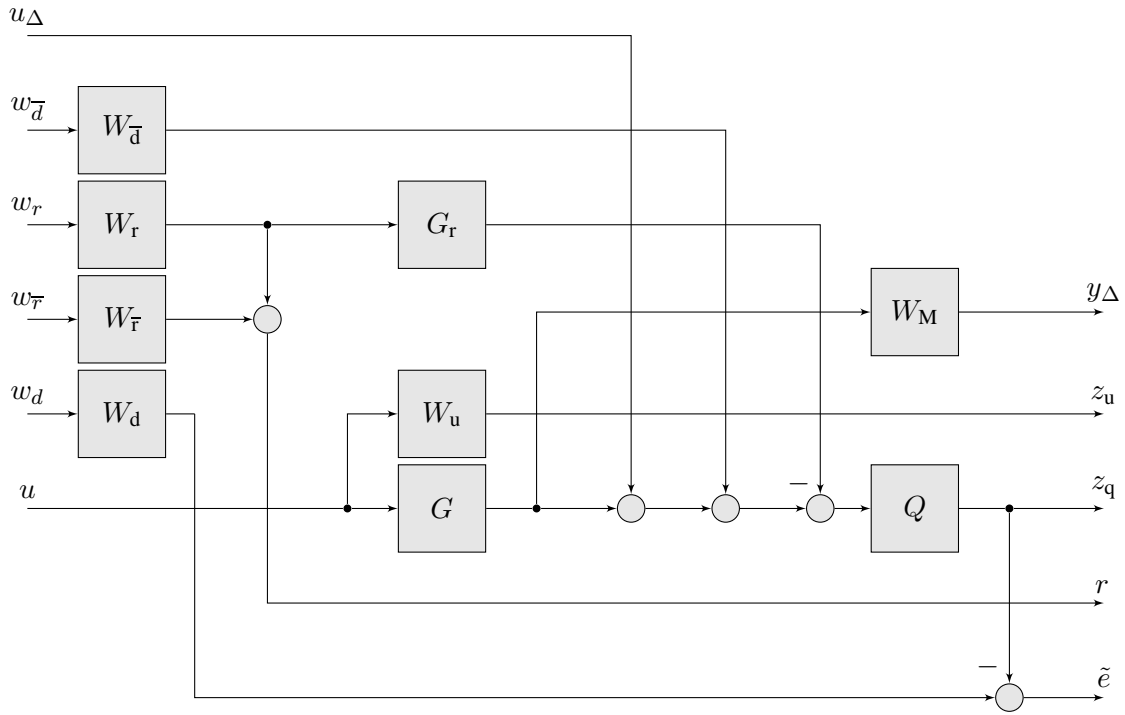


Abbildung 4.9: Erweiterte Strecke P des Gewichtungsschemas A.

der charakteristischen Übertragungsfunktionen des Regelkreises aus Abbildung 4.8 vornehmen zu können, wird zunächst die erweiterte Strecke P strukturell festgelegt. Die Wahl der Struktur der erweiterten Strecke wird nachfolgend durch die Betrachtung der für den erweiterten geschlossenen Regelkreis \tilde{N} aus der besagten Struktur resultierenden Übertragungspfade verdeutlicht.

Die erweiterte Strecke P aus Abb. 4.9 wird äquivalent durch

$$\begin{pmatrix} y_\Delta \\ z_u \\ z_q \\ r \\ \tilde{e} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_M G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_u \\ \hline Q & Q W_{\bar{d}} & -Q G_r W_r & 0 & 0 & Q G \\ \hline 0 & 0 & W_r & W_{\bar{r}} & 0 & 0 \\ -Q & -Q W_{\bar{d}} & Q G_r W_r & 0 & W_d & -Q G \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w_{\bar{d}} \\ w_r \\ w_{\bar{r}} \\ w_d \\ u \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

beschrieben.

Die erweiterte Strecke der Modellfolgeregelung ohne Unsicherheitsformulierung $\tilde{P} = \mathcal{F}_u(P, 0)$ ergibt sich aus der in (4.76) definierten erweiterten Strecke P formal durch Vernachlässigung

der ersten Zeile und der ersten Spalte. Die Vernachlässigung der dritten und vierten Spalte sowie der vierten Zeile in P führt formal auf die erweiterte Strecke eines eingangsseitigen $S_e/KS_e/T_e$ -Gewichtungsschemas mit integraler Streckenerweiterung. Eine derartige Reduzierung der erweiterten Strecke führt damit auf einen Reglerentwurf mit nur einem Freiheitsgrad, was einer Einschränkung des Regelgesetzes in (4.68) auf die Rückführung entspricht. Es lässt sich entnehmen, dass die innerhalb der Modellfolgeregelung eingesetzte Rückführung auf einem Standard-Ansatz zum Entwurf \mathcal{H}_∞ -suboptimaler Regler mit einem Freiheitsgrad beruht.

Ausgehend von dem angenommenen Regelgesetz (4.68) und einer erweiterten Strecke der Form (4.76) ergibt sich mit

$$\left(I - \begin{pmatrix} 0 \\ -QG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix} \right)^{-1} = (I + QGK_b)^{-1} \quad (4.77)$$

und unter Ausnutzung der Kommutativität bestimmter Übertragungsfunktionen die den Zielfunktionalen der Reglersyntheseverfahren zugrunde liegende Übertragungsfunktion N der externen Störgrößen $w = \begin{pmatrix} u_\Delta & w_{\bar{d}} & w_r & w_{\bar{r}} & w_d \end{pmatrix}^T$ auf $\tilde{z} = \begin{pmatrix} y_\Delta & z_u & z_q \end{pmatrix}^T$ zu $N = \mathcal{F}_l \left(P, \begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix} \right)$ mit

$$N = \begin{pmatrix} -W_M T_e & -W_M T_e W_{\bar{d}} & W_M S_e G (K_f + \tilde{K}_b G_r) W_r & W_M T_{fyr} W_{\bar{r}} & W_M G K_b S_e W_d \\ -W_u S_u \tilde{K}_b & -W_u S_u \tilde{K}_b W_{\bar{d}} & W_u S_u (K_f + \tilde{K}_b G_r) W_r & W_u S_u K_f W_{\bar{r}} & W_u S_u K_b W_d \\ S_e Q & S_e Q W_{\bar{d}} & -S_e (G_r - G K_f) Q W_r & T_{fyr} Q W_{\bar{r}} & T_e W_d \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Eine äquivalente Darstellung von N in Form eines Blockschaltbildes findet sich in Abb. 4.10. Ferner gilt $\tilde{N} = \mathcal{F}_u(N, 0)$ mit

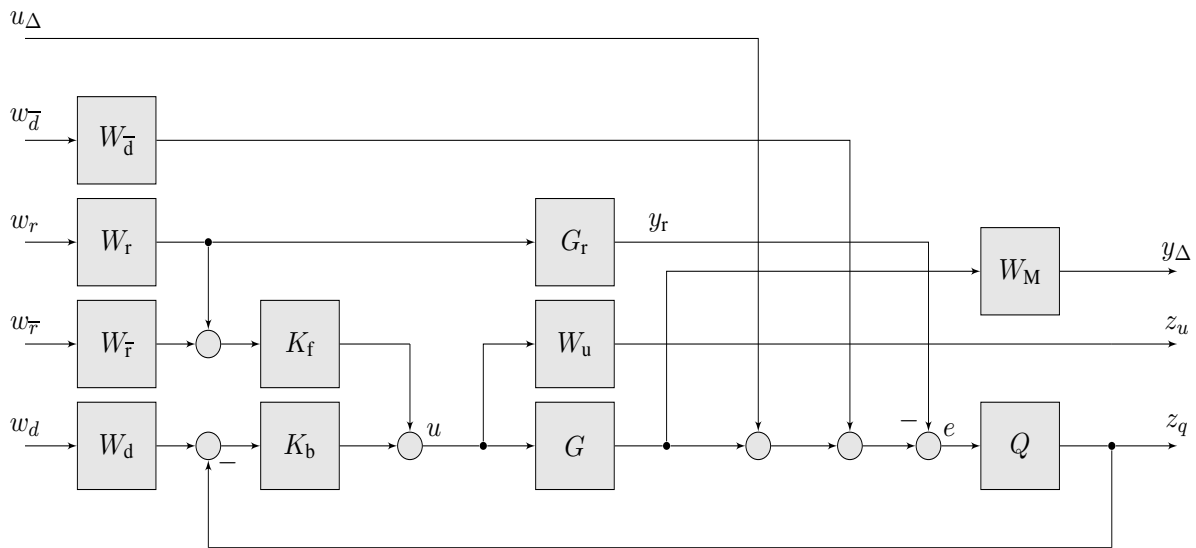


Abbildung 4.10: Erweiterter Regelkreis N des Gewichtungsschemas A.

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} -W_u S_u \tilde{K}_b W_d & W_u S_u (K_f + \tilde{K}_b G_r) W_r & W_u S_u K_f W_r & W_u S_u K_b W_d \\ S_e \tilde{W}_d & -S_e (G_r - G K_f) Q W_r & T_{fy} Q W_r & T_e W_d \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

Neben der Interpretation von Q als integrale Erweiterung der Strecke lässt sich $\tilde{W}_d = Q W_d$ als eine Gewichtung der Sensitivitätsfunktion auffassen. Ausgehend von (E.69) charakterisiert die Sensitivität S_e das Übertragungsverhalten der Führungsgröße und der Störgröße auf die Regeldifferenz e . Damit gewährleistet \tilde{W}_d die Anforderungen hinsichtlich der stationären Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises. Unter der Annahme, dass W_d keine Nullstelle im Ursprung besitzt, enthält die Übertragungsfunktion $\tilde{W}_d = Q W_d$ voraussetzungsgemäß einen Integralanteil.

Parametrierung der Übertragungsfunktionen innerhalb der erweiterten Strecke

Die vollständige Formulierung des Entwurfsproblems einer Modellfolgeregelung für das Beispielsystem erfordert neben der Festlegung von W_M und Q eine Parametrierung der innerhalb der erweiterten Strecke verbleibenden Gewichtungsfunktionen W_d, W_r, W_f und W_u sowie des Referenzmodells G_r .

Die Parametrierung der mit der Rückführung der verwendeten Regelung assoziierten Gewichtungsfunktionen W_d, W_r und W_u wird durch eine in der Literatur übliche Vorgabe der Struktur der Gewichtungsfunktionen auf eine endliche Anzahl von Parametern zurückgeführt. Im Falle des Beispielsystems werden dazu Gewichtungsfunktionen der Form

$$W_d = K_S \left(\frac{K_{\infty, S}^{-\frac{1}{n_S}} s + \omega_{B, S}}{s + \omega_{B, S} K_{0, S}^{\frac{1}{n_S}}} \right)^{n_S} \quad \text{und} \quad W_r = K_T \left(\frac{s + \omega_{B, T} K_{0, T}^{-\frac{1}{n_T}}}{K_{\infty, T}^{\frac{1}{n_T}} s + \omega_{B, T}} \right)^{n_T} \quad (4.80)$$

eingeführt. Die Gewichtungsfunktion W_u entspricht strukturell W_d , die Benennung der Parameter lautet im Fall von W_u allerdings $K_{KS}, \omega_{B, KS}, K_{0, KS}, K_{\infty, KS}$ und n_{KS} . Die qualitativen Verläufe der Gewichtungsfunktionen leiten sich aus den gewünschten Verläufen der charakteristischen Funktionen des geschlossenen Regelkreises ab. Unter der Annahme $\|N\|_{\infty} < \gamma$ folgt aus (4.78) beziehungsweise wahlweise auch aus (4.79) unter Berücksichtigung der Eigenschaften der auftretenden Übertragungsfunktionen und den Eigenschaften der ∞ -Norm

$$\begin{aligned} \|W_u K_b S_e \tilde{W}_d\|_{\infty} &< \gamma, & \|W_u K S_e W_d\|_{\infty} &< \gamma, \\ \|S_e \tilde{W}_d\|_{\infty} &< \gamma, & \|T_e W_d\|_{\infty} &< \gamma. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Unter der Voraussetzung einer hinreichend kleinen Gewichtung der Stellgröße wird der Einfluss der ersten beiden der vier voranstehenden Ungleichungen auf die ∞ -Norm von $\mathcal{F}_1(P, K)$ häufig vernachlässigt. Aus den beiden verbleibenden Ungleichungen folgt für die frequenzabhängigen Singulärwerte der charakteristischen Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises

$$\bar{\sigma}(S_e(i\omega)) < \gamma \bar{\sigma}(\tilde{W}_d(i\omega)^{-1}), \quad \bar{\sigma}(T_e(i\omega)) < \gamma \bar{\sigma}(W_d(i\omega)^{-1}) \quad (4.82)$$

Übertragungsfunktion	Ordnung	Pole	Nullstellen	Nebenbedingungen	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \infty$
$W_{\tilde{d}}(i\omega)$	n_S	$-\omega_{B,S} K_{0,S}^{-\frac{1}{n_S}}$	$-\omega_{B,S} K_{\infty,S}^{-\frac{1}{n_S}}$	$K_{0,S}^{-1} \leq 1 \leq K_{\infty,S}$	$K_{0,S}^{-1}$	$K_{\infty,S}^{-1}$
$W_d(i\omega)$	n_T	$-\omega_{B,T} K_{0,T}^{-\frac{1}{n_T}}$	$-\omega_{B,T} K_{\infty,T}^{-\frac{1}{n_T}}$	$K_{\infty,T}^{-1} \leq K_{0,T}$	$K_{0,T}^{-1}$	$K_{\infty,T}^{-1}$

Tabelle 4.3: Charakteristische Größen der Gewichtungsfunktionen aus (4.80) unter der Annahme $K_S = 1, K_T = 1, K_{KS} = 1$.

für alle $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da gemäß (4.82) $\tilde{W}_d^{-1} = (QW_d)^{-1}$ eine obere Schranke der Sensitivität des geschlossenen Regelkreises darstellt, gilt unter den getroffenen Annahmen (4.74). Die Sensitivität beschreibt (4.69) folgend sowohl den Einfluss der Führungsgröße auf die Regeldifferenz als auch den Einfluss des Messrauschens auf den Streckenausgang. Im Idealfall wäre die Sensitivität eines Regelkreises über alle Frequenzen identisch Null. Für streng realisierbare („strictly proper“) Strecken in Kombination mit zumindest realisierbaren („proper“) Reglern lässt sich die Annahme

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) K(s) = 0 \quad (4.83)$$

treffen. Aus (4.83) folgt dann für $s \rightarrow \infty$ die asymptotische Annäherung von S_e gegen Eins. Mit der Sensitivität als Maß für die Wirksamkeit eines Regelkreises folgt somit in der Realität für hohe Frequenzen stets der Verlust der Wirksamkeit einer Regelung.

Die komplementäre Sensitivitätsfunktion $T_e = 1 - S_e$ wird durch W_d beschränkt. Entsprechend (4.69) beschreibt T_e das Übertragungsverhalten der Störung d_2 auf den Streckenausgang. Hinsichtlich dieses Störungsübertragungsverhaltens wäre für T_e ein Wert identisch Null wünschenswert. Anders als in einem Regelkreis mit nur einem Freiheitsgrad wird das Führungsübertragungsverhalten der Modellfolgeregelung nicht ausschließlich von T_e bestimmt. Aufgrund der algebraischen Zwangsbedingung entsprechend (E.68) dient die Parametrierung der Gewichtungsfunktionen W_d und $W_{\tilde{d}}$ in erster Linie einer Charakterisierung der Frequenzbereiche, in denen S_e nahe Null und T_e nahe Eins beziehungsweise S_e nahe Eins und T_e nahe Null gilt. Bei der Parametrierung der Gewichtungsfunktionen sollten neben den eigentlichen Entwurfszielen auch die bekannten Beschränkungen hinsichtlich der mittels einer Regelung grundsätzlich erzielbaren Resultate berücksichtigt werden ([Rai94]). Für den vorgeschlagenen Ansatz gilt es insbesondere, die Limitierung hinsichtlich des Übergangs zwischen den beiden genannten Bereichen der Regelung zu beachten ([Rai94]). Trotz verschiedener hilfreicher Grundregeln bezüglich der qualitativen Festlegung der Gewichtungsfunktionen beruht im Falle eines spezifischen Entwurfsproblems die konkrete Parametrierung der Gewichtungsfunktionen stets bis zu einem gewissen Grad auf empirischen Erkenntnissen.

Aus der Annahme $\|N\|_{\infty} < \gamma$ folgen neben den Ungleichungen (4.81) auch die Beziehungen

$$\left\| W_u S_u \left(K_f + \tilde{K}_b G_r \right) W_r \right\|_{\infty} < \gamma, \quad \|W_u S_u K_f W_{\tilde{r}}\|_{\infty} < \gamma, \quad (4.84)$$

$$\|S_e (G_r - G K_f) Q W_r\|_{\infty} < \gamma, \quad \|T_{\text{fyr}} Q W_{\tilde{r}}\|_{\infty} < \gamma. \quad (4.85)$$

Unter der Annahme hinreichend kleiner W_u werden lediglich die Ungleichungen (4.85) im Hinblick auf ihre Bedeutung für den Vorwärtzweig der Modellfolgeregelung betrachtet. Aus (4.85) folgen

mit $\tilde{W}_r = QW_r$ und $\tilde{W}_{\bar{r}} = QW_{\bar{r}}$ die für alle $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gültigen Ungleichungen

$$\bar{\sigma}(S_e(G_r - GK_f)) \leq \gamma \bar{\sigma}(\tilde{W}_r^{-1}) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}(GS_u K_f) \leq \gamma \bar{\sigma}(\tilde{W}_{\bar{r}}^{-1}). \quad (4.86)$$

Die Frequenzabhängigkeit wird aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht explizit aufgeführt. Mittels der Gewichtungsfunktion \tilde{W}_r lässt sich folglich im geschlossenen Regelkreis eine obere Schranke der mit S_e gewichteten Abweichung zwischen der vorgesteuerten Strecke GK_f und dem Referenzmodell G_r vorgeben. \tilde{W}_r dient damit der Gewichtung der Differenz $G_r - GK_f$. Die Gewichtungsfunktion $\tilde{W}_{\bar{r}}$ erlaubt eine Vorgabe der oberen Schranke von T_{fyr} und damit die Beschränkung der Bandbreite der Vorsteuerung. In Frequenzbereichen, in denen S_e nahezu Eins ist und damit T_e nahezu Null gilt, bestimmt T_{fyr} wegen $y = S_e G \left(K_f + \tilde{K}_b G_r \right) r = (T_{\text{fyr}} + T_e G_r) r$ die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.

Um eine Parametrierung von W_r und $W_{\bar{r}}$ zu ermöglichen, erfolgt eine strukturelle Festlegung von W_r entsprechend $W_{\bar{d}}$ aus (4.80), gleichzeitig wird $W_{\bar{r}}$ mit einer Struktur entsprechend W_d aus (4.80) angenommen. In Tabelle 4.3 finden sich ausgewählte Charakteristika der beiden strukturell unterschiedlichen Gewichtungsfunktionen aus (4.80), ausgedrückt in Abhängigkeit von den jeweils auftretenden Parametern. Die Charakteristika der übrigen Übertragungsfunktionen ergeben sich analog dazu. Neben der Wahl der Parameter der strukturell festgelegten Gewichtungsfunktionen $W_{\bar{d}}, W_d, W_r, W_{\bar{r}}$ und W_u beinhaltet die Bestimmung des Referenzmodells G_r die wesentlichen verbleibenden Freiheitsgrade des Reglerentwurfs im Falle des verwendeten Verfahrens. Die Struktur des enthaltenen Referenzmodells wird unter dem Aspekt der einfachen Parametrierbarkeit zu

$$G_r = K_{G_r} \left(\frac{1}{s + T_{G_r}} \right)^{n_{G_r}} \quad (4.87)$$

festgelegt.

Bemerkung zur robusten Stabilität

Die Anwendung von Satz 6.1 aus [Rai94] (S. 192) erlaubt eine Aussage zur robusten Stabilität eines geschlossenen Regelkreises gegenüber einer durch allgemeine unstrukturierte Modellunsicherheiten definierten Modellschar. Für den Spezialfall einer auf einer multiplikativen Modellunsicherheit basierenden Modellschar gilt Satz 6.3 aus [Rai94] (S. 195).

Es sei \mathcal{G}_M strukturell definiert durch (4.50). Falls mit einem Regler K der nominelle Standard-Regelkreis $\mathcal{H}(G_{\text{Nom}}, K)$ asymptotisch stabil ist, dann ist $\mathcal{H}(G, K)$ genau dann asymptotisch stabil für alle $G \in \mathcal{G}_M$ mit $\|\Delta_M\|_{\infty} < \gamma^{-1}$, falls

$$\bar{\sigma}(T_e(i\omega)) \leq \frac{\gamma}{|W_M(i\omega)|}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (4.88)$$

Die robuste Stabilität des geschlossenen Regelkreises gegenüber der angenommenen unstrukturierten Modellunsicherheit ist damit unter den genannten Annahmen äquivalent zur Einhaltung einer frequenzabhängigen Ungleichung. Aus [Rai94] ist die anschauliche Deutung von (4.88) bekannt.

Im angenommenen Fall muss zu jeder Frequenz ω der größte Singulärwert der Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises T_e kleiner sein, als die Inverse des Betrags der Fehlerschranke zu der entsprechenden Frequenz. Die Abhängigkeit der Ungleichung (4.88) von dem eingesetzten Regler K wird durch das Ausschreiben der Führungsübertragungsfunktion ersichtlich.

Unter der Annahme eines nominell stabilen geschlossenen Regelkreises in dem (4.82) gilt, lässt sich ohne weitere Betrachtungen damit die robuste Stabilität gegenüber einer Modellschar garantieren die strukturell durch Gleichung (4.56) auf Seite 150 mit $\|\Delta_M\|_\infty < \gamma^{-1}$ definiert ist. Falls $\gamma^{-1} \geq 1 > \gamma_\Delta^{-1}$ und $|W_M(i\omega)| < |W_d(i\omega)| \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, folgt $\mathcal{G}_M \subset \mathcal{G}_{M_d}$. Ein gegenüber \mathcal{G}_{M_d} robust stabiler Regelkreis ist dann auch gegenüber \mathcal{G}_M robust stabil.

Entwurf einer Modellfolgeregelung mittels der \mathcal{H}_∞ -Methodik

Die exemplarische Synthese einer \mathcal{H}_∞ -suboptimalen Modellfolgeregelung für das Beispielsystem beruht auf der erweiterten Strecke \tilde{P} ohne explizite Unsicherheitsformulierung. Die Parametrierung des Referenzmodells orientiert sich am gewünschten Führungsübertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises im Zeitbereich. Die Wahl

$$T_{G_r} = 1100, \quad n_{G_r} = 2 \quad \text{und} \quad K_{G_r} = T_{G_r}^{n_{G_r}} \quad (4.89)$$

führt für das Referenzmodell auf eine von Überschwingen freie Sprungantwort mit einer stationären Verstärkung von Eins, einer Anstiegszeit von etwa 3,1 ms sowie einer Einschwingzeit von ungefähr 5,3 ms. Eine vergleichende Gegenüberstellung der Sprungantworten und der Singulärwertverläufe der Strecke G und des Referenzmodells G_r erfolgt in Abb. 4.11. Während G_r im Entwurf Verwendung findet, wird in Anlehnung an (2.164) und damit hinsichtlich der Anwendung der Modellfolgeregelung auf das reale Beispielsystem zusätzlich eine totzeitbehaftete Referenzstrecke

$$\hat{G}_r(i\omega) = e^{-0,0005 \cdot i\omega} G_r(i\omega) \quad (4.90)$$

eingeführt. Die Parametrierung aller in der erweiterten Strecke auftretenden Übertragungsfunktionen lässt sich Tabelle 4.4 entnehmen. Die gewählte Parametrierung führt auf eine erweiterte Strecke

Übertragungsfunktion					
$W_{\tilde{d}}(i\omega)$	$n_S = 2$	$\omega_{B,S} = 300$	$K_{0,S} = 0,8$	$K_{\infty,S} = 1$	$K_S = 0,35$
$W_d(i\omega)$	$n_T = 4$	$\omega_{B,T} = 300$	$K_{0,T} = 3$	$K_{\infty,T} = 10^{-2}$	$K_T = 0,35$
$W_u(i\omega)$	$n_{KS} = 2$	$\omega_{B,KS} = 15000$	$K_{0,KS} = 10^2$	$K_{\infty,KS} = 10^{-7}$	$K_{KS} = 0,5$
$Q(i\omega)$	$n_Q = 1$	$\omega_{B,Q} = 300$	—	—	$K_Q = 1$
$W_r(i\omega)$	$n_r = 0$	—	—	—	$K_r = 5,5$
$W_{\tilde{r}}(i\omega)$	$n_{\tilde{r}} = 1$	$\omega_{B,\tilde{r}} = 1000$	$K_{0,\tilde{r}} = 4$	$K_{\infty,\tilde{r}} = 10^{-6}$	$K_{T_{\text{byr}}} = 0,56$

Tabelle 4.4: Reglerentwurfs A: Parametrierung der Gewichtungsfunktionen und der integralen Erweiterung.

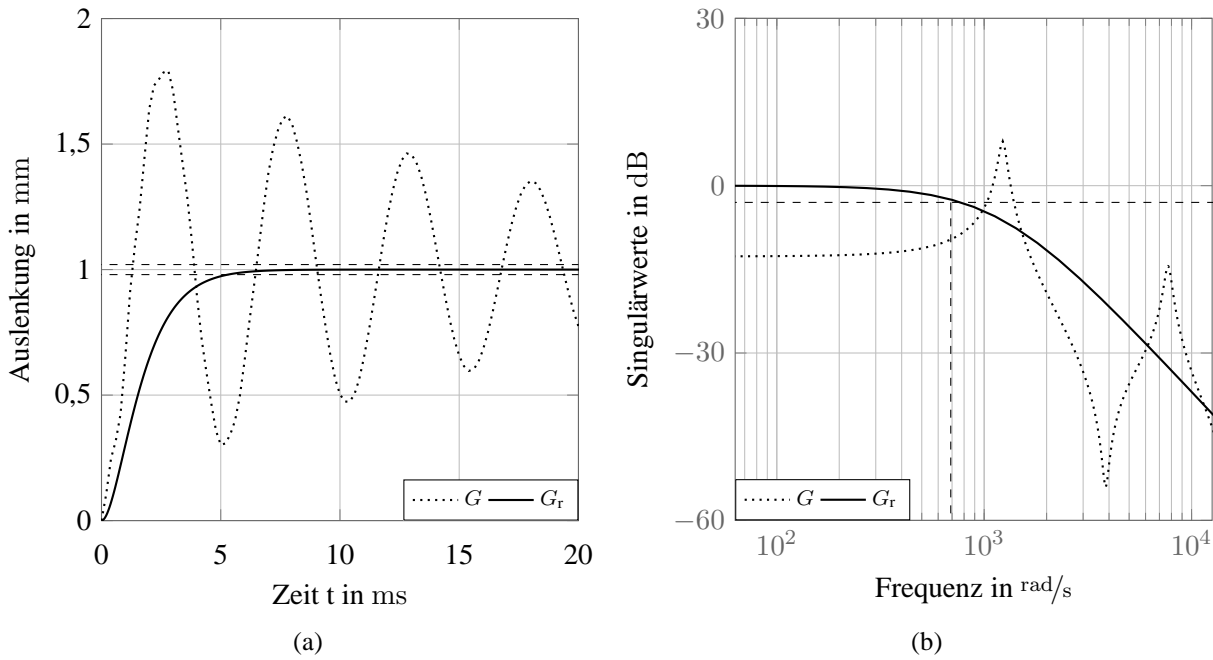


Abbildung 4.11: Reglerentwurf A: Sprungantwort und Singularwertverlauf der Strecke G und des Referenzmodells G_r .

der Ordnung

$$n_{\tilde{P}} = 18 = n_{G_{\text{Nom}}} + n_{W_{\tilde{d}}} + n_{W_d} + n_{W_u} + n_Q + n_{W_r} + n_{W_{\tilde{r}}} + n_{G_r}. \quad (4.91)$$

Eine Darstellung der Singularwertverläufe der Referenzstrecke G_r sowie der parametrierten Gewichtungsfunktionen W_r und $W_{\tilde{r}}$ findet sich in Abb. 4.12a, während Abb. 4.12b die Singularwertverläufe von $W_{\tilde{d}}, W_d, W_u$ und Q zeigt. Die Lösung des \mathcal{H}_∞ -Entwurfsproblems mit dem Kostenfunktional $\tilde{N} = \mathcal{F}_1\left(\tilde{P}, \begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix}\right)$ führt auf die Bestandteile $\begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix}$ der Modellfolgeregelung, die jeweils als ein System mit einer Ordnung entsprechend (4.91) realisiert werden. Das resultierende Regelgesetz $\tilde{K} = \begin{pmatrix} K_f + \tilde{K}_b G_r & -\tilde{K}_b \end{pmatrix}$ der Modellfolgeregelung beinhaltet neben K_f und K_b auch Q sowie G_r . Abb. 4.15a enthält den Singularwertverlauf der Modellfolgeregelung sowie eine separate Darstellung der Singularwertverläufe der beiden Übertragungspfade der Modellfolgeregelung. Ferner zeigt Abb. 4.15a eine vergleichende Gegenüberstellung der Singularwertverläufe der aus Reglerentwurf A resultierenden Vorsteuerung K_f sowie einer im Sinne der Modellfolgeregelung idealen Vorsteuerung $G^{-1}G_r$.

Die separate Darstellung der Singularwerte beider Übertragungspfade des Reglers zeigt die von K_f und damit auch die von $K_f + \tilde{K}_b G_r$ gegenüber K_b erhöhte Bandbreite. Sowohl K_b als auch K_f und $K_f + \tilde{K}_b G_r$ weisen in einem engen Frequenzbereich um die erste Eigenfrequenz der Strecke einen Abfall der Singularwerte und damit der Verstärkung auf. Der Singularwertverlauf der Vorsteuerung K_f zeigt damit, dass durch K_f nahezu keine Anregung der ersten Eigenmode der Strecke zu erwarten ist. Für die Rückführung K_b deutet dieses Charakteristikum auf eine Invertierung des

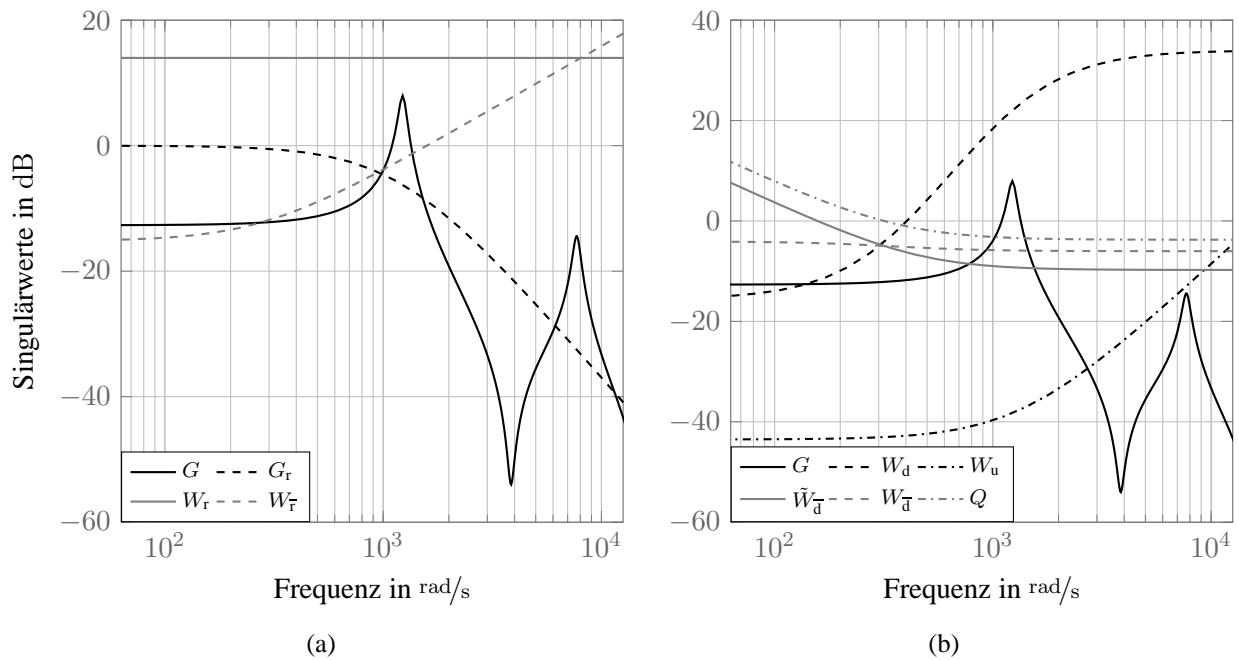
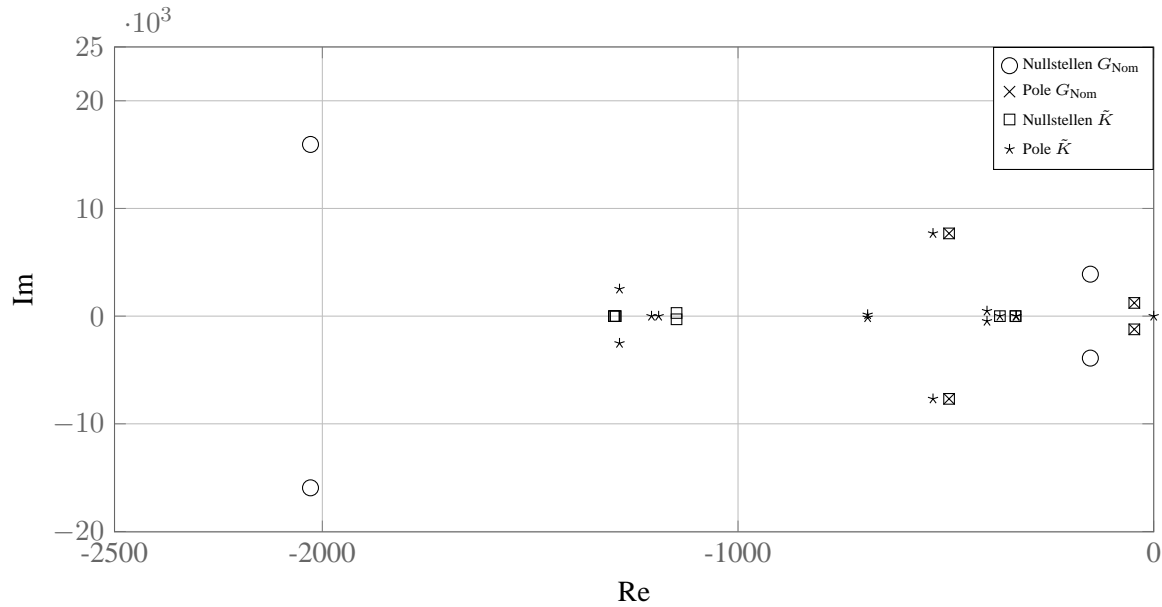


Abbildung 4.12: Reglerentwurf A: Singulärwertverläufe der einzelnen in der erweiterten Strecke auftretenden Übertragungsfunktionen.

Singulärwertverlaufs der Strecke hin. Wie geschildert entspricht die der Rückführung innerhalb des Gewichtungsschemas der Modellfolgeregelung zuzuordnende Gewichtung einem $S_e/KS_e/T_e$ -Gewichtungsschema. Bekanntermaßen führt die Synthese \mathcal{H}_∞ -suboptimaler Regler unter Verwendung von $S_e/KS_e/T_e$ -Gewichtungsschemata auf Regler, die den Singulärwertverlauf der Strecke in gewisser Weise kompensieren beziehungsweise invertieren. Diese Tatsache spiegelt sich sowohl in den Singulärwertverläufen von K_b und \tilde{K}_b als auch im Pol-/Nullstellendiagramm von G und \tilde{K}_b entsprechend Abb. 4.13 wider. Insbesondere letzteres zeigt die nahezu exakte Kompensation der ersten vier Eigenwerte der Strecke durch Nullstellen von \tilde{K}_b . Die Anordnung der Extremalstellen des Reglers führt nahezu zu einer Auslöschung der Steuerbarkeit der ersten Eigenmoden der Strecke innerhalb der offenen Wirkungskette $\tilde{K}_b G$.

Entwurf einer Modellfolgeregelung mittels der μ -Methodik

Die μ -Synthese einer Modellfolgeregelung für das Beispielsystem beruht auf der erweiterten Strecke P gemäß (4.76). Der Reglerentwurf A_μ erfolgt somit unter Berücksichtigung einer multiplikativen Modellunsicherheit und einer damit einhergehenden Modellschar \mathcal{G}_M . Innerhalb der erweiterten Strecke wird die nominelle Strecke G_{Nom} entsprechend (4.35) mit einer Ordnung von $n_{G_{\text{Nom}}} = 6$ verwendet. Die zur Berücksichtigung der Modellschar \mathcal{G}_M eingeführte Gewichtungsfunktion W_M wird gemäß der Ausführungen aus Abschnitt 4.3.4 durch die in Tabelle 4.1 dargestellten Werte parametrisiert. Explizit als Modellschar innerhalb des Reglerentwurfs A_μ wird damit lediglich \mathcal{G}_M anstelle der größeren Modellschar $\hat{\mathcal{G}}_M$ berücksichtigt. Diese Wahl hat insbesondere Auswirkungen

Abbildung 4.13: Reglerentwurf A: Ausschnitt aus dem Pol-/Nullstellen-Diagramm von G und \tilde{K} .

Übertragungsfunktion					
$W_{\tilde{d}}(i\omega)$	$n_S = 2$	$\omega_{B,S} = 300$	$K_{0,S} = 0,8$	$K_{\infty,S} = 1$	$K_S = 0,17$
$W_d(i\omega)$	$n_{W_d} = 4$	$\omega_{B,T} = 300$	$K_{0,T} = 3$	$K_{\infty,T} = 10^{-2}$	$K_T = 0,35$
$W_u(i\omega)$	$n_{KS} = 2$	$\omega_{B,KS} = 15000$	$K_{0,KS} = 10^2$	$K_{\infty,KS} = 10^{-7}$	$K_{KS} = 0,25$
$Q(i\omega)$	$n_Q = 1$	$\omega_{B,Q} = 300$	—	—	$K_Q = 1$
$W_r(i\omega)$	$n_r = 0$	—	—	—	$K_r = 5,5$
$W_{\tilde{r}}(i\omega)$	$n_{\tilde{r}} = 1$	$\omega_{B,\tilde{r}} = 1000$	$K_{0,\tilde{r}} = 4$	$K_{\infty,\tilde{r}} = 10^{-6}$	$K_{T_{\text{Iyr}}} = 0,28$

Tabelle 4.5: Reglerentwurf A_μ : Parametrierung der Gewichtungsfunktionen und der integralen Erweiterung.

auf die a priori zu garantierende robuste Performance eines resultierenden geschlossenen Regelkreises. Die Struktur des eingesetzten Referenzmodells entspricht (4.87), für die Parameter von G_r wird die Wahl $T_{G_r} = 1200$, $n_{G_r} = 2$ und $K_{G_r} = T_{G_r}^{n_{G_r}}$ getroffen. Die weiteren zur Festlegung der erweiterten Strecke P erforderlichen Parameter finden sich in Tabelle 4.5. Eine Darstellung der Singulärwertverläufe der einzelnen in P auftretenden Übertragungsfunktionen lässt sich Abb. 4.14 entnehmen. Die resultierende erweiterte Strecke P weist eine Ordnung von

$$n_P = 24 = n_{G_{\text{Nom}}} + n_{W_{\tilde{d}}} + n_{W_d} + n_{W_u} + n_Q + n_{W_r} + n_{W_{\tilde{r}}} + n_{W_M} + n_{G_r} \quad (4.92)$$

auf. Für die innerhalb der D-K-Iteration zur Skalierung verwendeten rationalen, stabilen und minimalphasigen Übertragungsfunktionen $D_L(i\omega) = D_R(i\omega)$ wird eine maximale Ordnung von $n_{D_L} = n_{D_R} = 3$ festgelegt.

Im Fall des Reglerentwurfs A_μ führt die μ -Synthese anhand einer D-K-Iteration auf ein stabiles System $\begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix}$ mit einer Ordnung von 30.

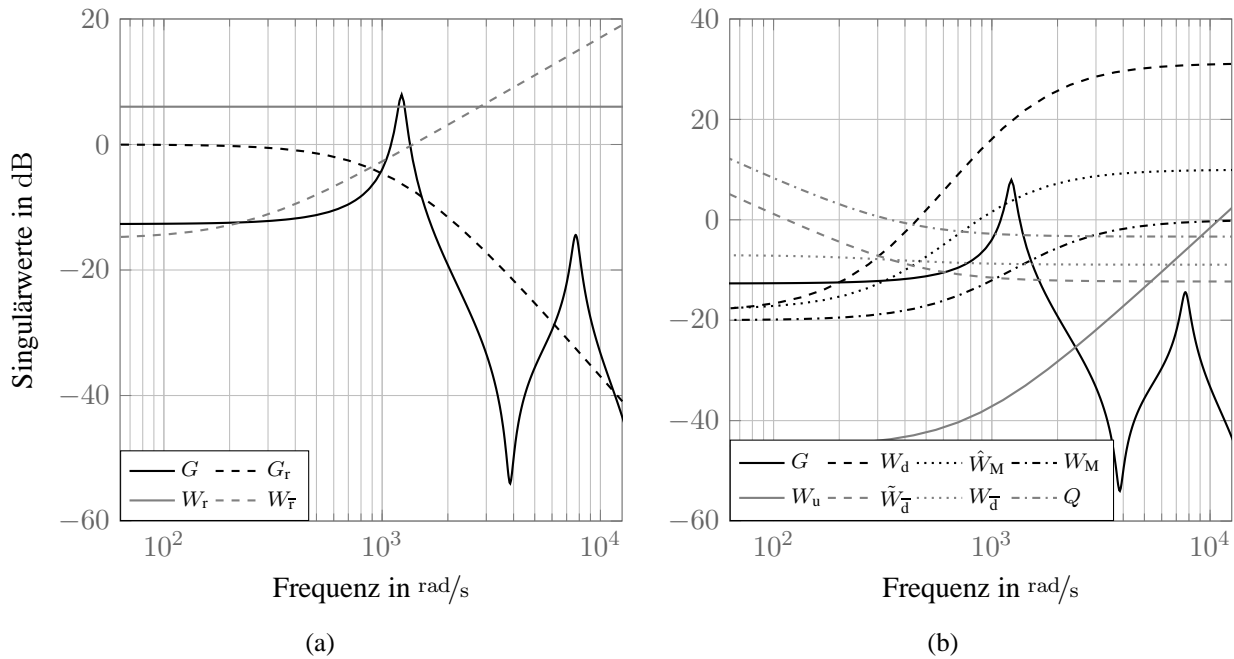


Abbildung 4.14: Reglerentwurf A_μ : Singulärwertverläufe der einzelnen in P auftretenden Übertragungsfunktionen.

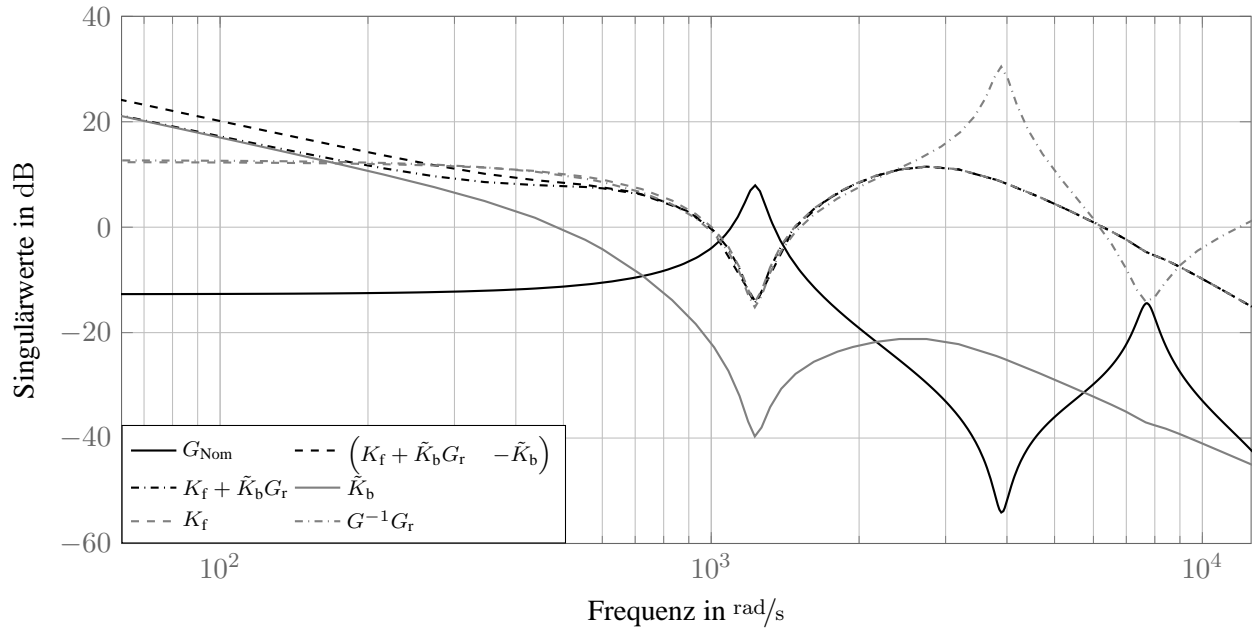
Das resultierende Regelgesetz $\tilde{K} = \begin{pmatrix} K_f + \tilde{K}_b G_r & -\tilde{K}_b \end{pmatrix}$ der Modellfolgeregelung beinhaltet neben K_f und K_b aufgrund von $\tilde{K}_b = K_b Q$ auch Q sowie G_r . Die Singulärwertverläufe von $\begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix}$ sowie die des Regelgesetzes sind in Abb. 4.15b aufgeführt. Die aus Reglerentwurf A_μ resultierende Modellfolgeregelung weist einen Singulärwertverlauf auf, der qualitativ mit dem Singulärwertverlauf der Modellfolgeregelung aus Reglerentwurf A vergleichbar ist und daher hier nicht weiter diskutiert wird.

4.5.4 Entwurf einer flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelung

Dieser Abschnitt behandelt die mit Reglerentwurf B bezeichnete Synthese einer Trajektorienfolgeregelung für das Beispielsystem und thematisiert damit einen zu der in Abschnitt 4.5.3 gezeigten Modellfolgeregelung alternativen Regelungsansatz mit zwei Freiheitsgraden.

Der Reglerentwurf B geht von einer Struktur des Regelkreises gemäß Abbildung 4.16 aus. Das Regelgesetz lautet in diesem Fall

$$u_{\text{ges}} = u_f + \tilde{K}_b (y_r - y). \quad (4.93)$$



(a) Reglerentwurf A

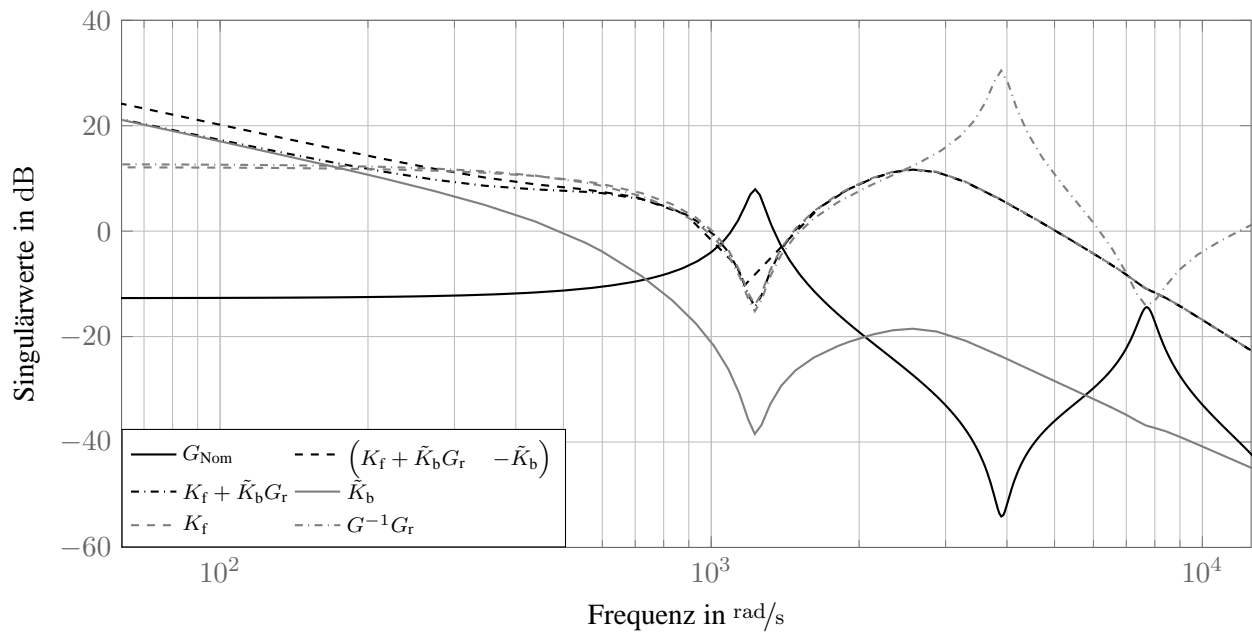
(b) Reglerentwurf A_μ

Abbildung 4.15: Reglerentwürfe A und A_μ : Verschiedene Singulärwertverläufe der resultierenden Rückführung und der einzelnen Komponenten der Rückführung.

Während der Syntheseschritt im Fall der Modellfolgeregelung in den Reglerentwürfen A und A_μ die simultane Berechnung der Vorsteuerung und der Rückführung beinhaltet, besteht die Reglersynthese des Reglerentwurfs B aus einer separaten Berechnung von Vorsteuerung und Rückführung. Für die Auslegung jedes der beiden Bestandteile der Trajektorienfolgeregelung kann dabei grundsätzlich aus einer Vielzahl an Methoden gewählt werden. In diesem Fall wird die Gene-

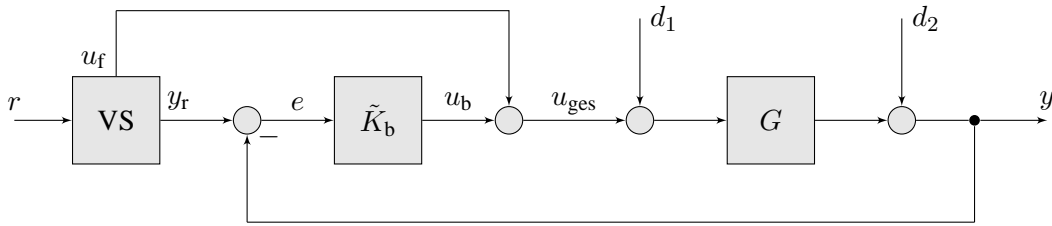


Abbildung 4.16: Blockschaltbild des Regelkreises B.

rierung des Stellsignals u_f und der Soll-Trajektorie y_r mittels eines flachheitsbasierten Ansatzes durchgeführt. Die Bestimmung der Rückführung erfolgt auf Basis eines eingangsseitigen $S_e/KS_e/T_e$ -Gewichtungsschemas mit integraler Streckenerweiterung. Ein derartiges Gewichtungsschema resultiert aus der erweiterten Strecke der Modellfolgeregelung gemäß (4.76) durch die in Abschnitt 4.5.3 beschriebenen Vereinfachungen.

Entwurf einer flachen Vorsteuerung

Der vorliegende Abschnitt thematisiert den Entwurf einer flachen Vorsteuerung für das Beispielsystem. Die zu diesem Zweck benötigten mathematischen Grundlagen zur differentiellen Flachheit finden sich beispielsweise in [FLR95] oder in [RRZ97]. Ausführungen zur Flachheit mit besonderem Bezug zu unendlich-dimensionalen Systemen lassen sich beispielsweise [MK09] entnehmen.

Ausgangspunkt für den Entwurf einer flachen Vorsteuerung für das Beispielsystem ist eine gemäß den Ausführungen aus Abschnitt 4.2.4 erzeugte endlich-dimensionale Approximation Σ_N , $N < \infty$ des Beispielsystems. Im Folgenden wird eine Approximationsordnung von $N = 4$ angenommen, im Rahmen des verwendeten Approximationsverfahrens werden damit die ersten beiden Eigenmoden des Beispielsystem für den Entwurf einer flachen Vorsteuerung berücksichtigt. Das resultierende System wird mit $\Sigma_f = \Sigma_N$, $N = 4$ bezeichnet, es weist eine Systemordnung von $n_f = 4$ auf und wird in Zustandsraumdarstellung durch die Matrizen A_f, B_f, C_f, D_f beschrieben. Eine zur Repräsentation der ersten zwei Eigenmoden des Beispielsystems resultierende numerische Realisierung von Σ_f lässt sich Anhang E.4 entnehmen. Die Σ_f zugeordnete Übertragungsfunktion ist mit G_f benannt.

Die Bestimmung des Rangs der zugeordneten Steuerbarkeitsmatrix führt auf

$$\text{rang } M_C = \text{rang} \begin{pmatrix} A_f^0 B_f & A_f^1 B_f & A_f^2 B_f & A_f^3 B_f \end{pmatrix} = 4. \quad (4.94)$$

Demnach folgt für Σ_f die vollständige Zustandssteuerbarkeit. Da für lineare Systeme eine Äquivalenz zwischen differentieller Flachheit und Steuerbarkeit besteht ([HZ04]), leitet sich aus diesem Resultat die differentielle Flachheit von Σ_f ab. Aus dem vollen Rang der Steuerbarkeitsmatrix M_C folgt ferner die Existenz von M_C^{-1} .

Die Anwendung einer äquivalenten Zustandstransformation der Form $x_{f,C} = T_C x_f$ mit

$$T_C^{-1} = \begin{pmatrix} v_C M_C^{-1} A_f^0 \\ v_C M_C^{-1} A_f^1 \\ v_C M_C^{-1} A_f^2 \\ v_C M_C^{-1} A_f^3 \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

und $v_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf Σ_f überführt das approximierte Beispielsystem in Steuerbarkeitsnormalform

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}_{N,C}(t)}{dt} &= A_{f,C} x_{f,C}(t) + B_{f,C} u(t), \quad x_{f,C}(0) = T_C x_N(0) \\ y(t) &= C_{f,C} x_{f,C}(t) + D_{f,C} u(t). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Wobei

$$A_{f,C} = T_C^{-1} A_f T_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad B_{f,C} = T_C^{-1} B_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

sowie

$$C_{f,C} = C_f T_C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D_{f,C} = D_f = 0 \quad (4.98)$$

gilt. Aus der Struktur der resultierenden Systemmatrix $A_{f,C}$ lässt sich erkennen, dass der erste Eintrag des Zustandsvektors $x_{f,C,1}(t)$ den Anforderungen an einen flachen Ausgang $y_f(t)$ des Systems Σ_f genügt. Aus der Wahl $y_f(t) = x_{f,C,1}(t)$ folgt im einzelnen

$$x_{f,C,2}(t) = \frac{\partial y_f(t)}{\partial t}, \quad x_{f,C,3}(t) = \frac{\partial^2 y_f(t)}{\partial t^2}, \quad x_{f,C,4}(t) = \frac{\partial^3 y_f(t)}{\partial t^3} \quad (4.99)$$

sowie

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 y_f(t) + a_1 \frac{\partial y_f(t)}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2 y_f(t)}{\partial t^2} + a_3 \frac{\partial^3 y_f(t)}{\partial t^3} + \frac{\partial^4 y_f(t)}{\partial t^4} \\ y(t) &= c_0 y_f(t) + c_1 \frac{\partial y_f(t)}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 y_f(t)}{\partial t^2} + c_3 \frac{\partial^3 y_f(t)}{\partial t^3}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Die Gleichungen (4.99) und (4.100) zeigen, dass eine Festlegung des Verlaufs des flachen Ausgangs $y_f(t)$ über einem Zeitintervall unmittelbar die Systemgrößen $x_{f,C}(t), u(t), y(t)$ über dem entsprechenden Zeitintervall determiniert. Im Fall des Beispielsystems wird $y_f(t)$ zur Festlegung des Verlaufs des Ausgangs $y(t)$ in Folge eines sprungförmigen Wechsels der Führungsgröße

$$r(t) = \begin{cases} y_0, & t < 0 \\ y_T, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.101)$$

eingesetzt. Der Verlauf von $y(t)$ wird dazu auf einem kompakten Intervall $\theta = [0, T]$ durch die Parametrierung des flachen Ausgangs $y_f(t)$, mittels eines Polynoms

$$P_f(t) = \sum_{i=0}^{n_{P_f}} p_{f,i} \left(\frac{t}{T} \right)^i, \quad t \in \theta, \quad (4.102)$$

festgelegt. Ein vergleichbarer Ansatz findet sich beispielsweise in [Zei10]. Die Parametrierung einer Solltrajektorie $y_r(t)$ für $y(t) \in [0, T]$ als Folge eines Wechsels der Führungsgröße entsprechend (4.101) kann im Allgemeinen auch durch andere Funktionen erfolgen. Die Wahl eines polynomialen Ansatzes erlaubt eine besonders einfache Parametrierung von $y_f(t) \in [0, T]$.

Der Grad n_{P_f} des Polynoms $P_f(t)$ wird durch Forderungen an die zeitlichen Ableitungen des Ausgangs $y(t)$ auf dem Rand des Zeitintervalls θ bestimmt. Da $y(t)$ der approximierten Auslenkung des Beispielsystems an der Messstelle entspricht, werden die Forderungen

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T, \quad \frac{\partial y(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial y(t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=T} = 0 \quad (4.103)$$

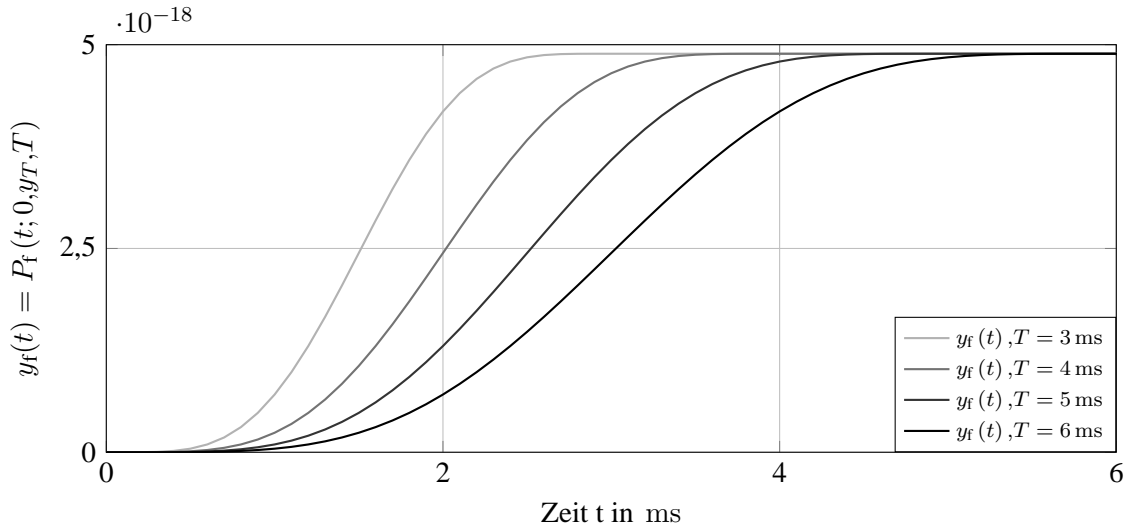
eingeführt. T legt den Zeitraum fest, den $y(t)$ für den Übergang von y_0 zu y_T benötigt und wird daher als Übergangszeit bezeichnet. Um darüber hinaus einen hinreichend glatten Verlauf von $y(t)$ und $u(0) = u(T) = 0$ zu erreichen, wird zusätzlich

$$\frac{\partial^3 y_f(t)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^4 y_f(t)}{\partial t^4} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^3 y_f(t)}{\partial t^3} \Big|_{t=T} = \frac{\partial^4 y_f(t)}{\partial t^4} \Big|_{t=T} = 0 \quad (4.104)$$

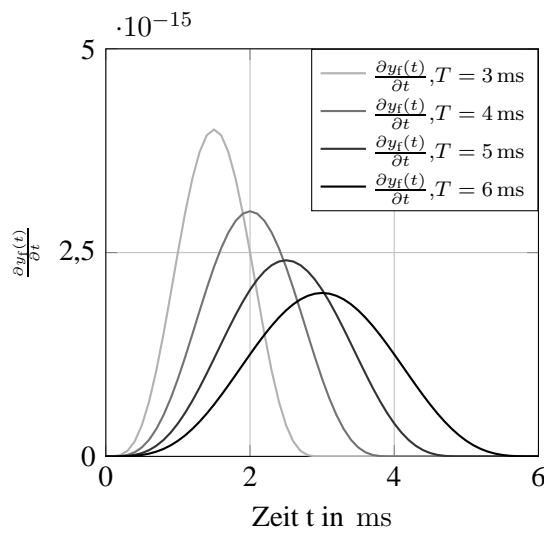
gefordert. Zur Erfüllung von (4.103) und (4.104) wird für $P_f(t)$ die Ordnung zu $n_{P_f} = 9$ gewählt. Mit (4.103) und (4.104) stehen zehn Gleichungen zur Verfügung, um die zehn Koeffizienten $p_{f,i}, i = 0, 1, \dots, 9$ von $P_f(t)$, $n_{P_f} = 9$ zu bestimmen. Aus dieser Aufgabe resultiert ein hinsichtlich der $p_{f,i}$ lineares Gleichungssystem, dass sich beispielsweise unter Verwendung eines Computeralgebrasystems wie Mathematica lösen lässt. Als Lösung resultiert eine Beschreibung jedes der Koeffizienten $p_{f,i}, i = 0, 1, \dots, 9$ in Abhängigkeit von den systemspezifischen Größen c_0, c_1, c_2, c_3 , den Werten y_0, y_T des Polynoms am Rand von θ sowie der Übergangszeit T . Da c_0, c_1, c_2 und c_3 durch das System festgelegt sind, führt die Berücksichtigung dieser Lösung innerhalb von $P_f(t)$ auf ein durch y_0, y_T und T parametrisiertes Polynom $P_f(t; y_0, y_T, T)$, d.h. für eine Wahl von y_0, y_T, T ist $P_f(t; y_0, y_T, T)$ auf θ vollständig determiniert.

In einem derartigen Fall folgt unter Verwendung von (4.99) und (4.100) sowie einer Wahl des flachen Ausgangs $y_f(t) = P_f(t; y_0, y_T, T)$ die Festlegung der verbleibenden Systemgrößen für $t \in \theta$. Im Fall des Beispielsystems sind die Systemgrößen vollständig durch $P_f(t; y_0, y_T, T)$ und die zugehörigen zeitlichen Ableitungen bis zur vierten Ordnung charakterisiert. Eine Erweiterung der Definition von y_f hinsichtlich $t \geq T$ lässt sich durch eine abschnittsweise Definition des flachen Ausgangs

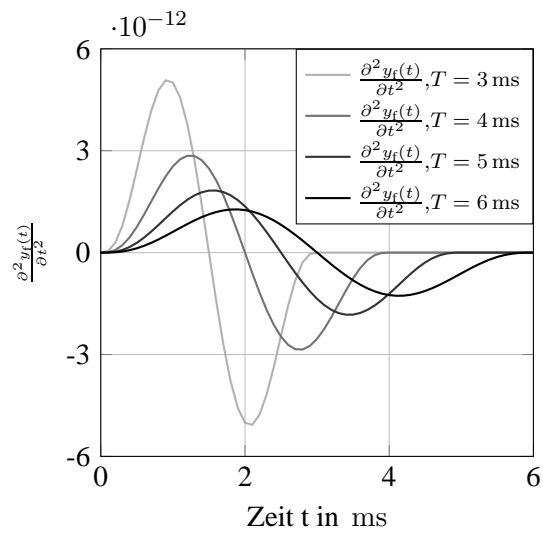
$$y_f(t) = \begin{cases} P_f(t; y_0, y_T, T) & t \in \theta \\ P_f(T; y_0, y_T, T) & t > T \end{cases} \quad (4.105)$$



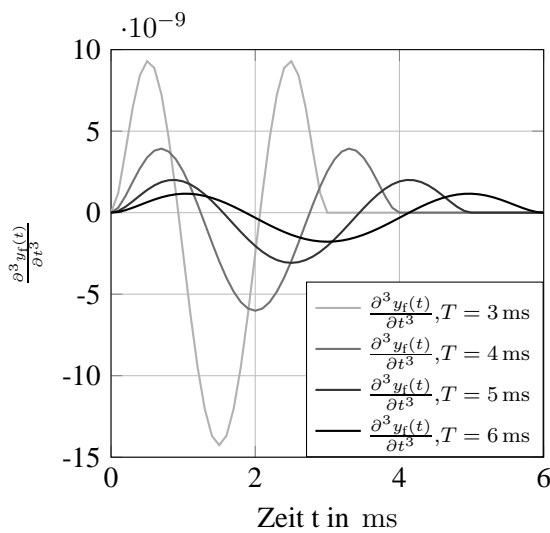
(a)



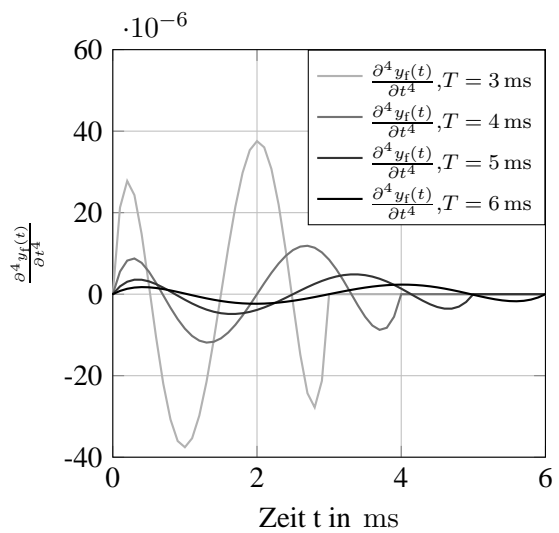
(b)



(c)



(d)



(e)

Abbildung 4.17: Verläufe von $y_f(t)$, $t \geq 0$ und zugehöriger zeitlicher Ableitungen bis zur vierten Ordnung für $y_0 = 0, y_T = 0,1$ mm und $T \in \{3 \text{ ms}, 4 \text{ ms}, 5 \text{ ms}, 6 \text{ ms}\}$.

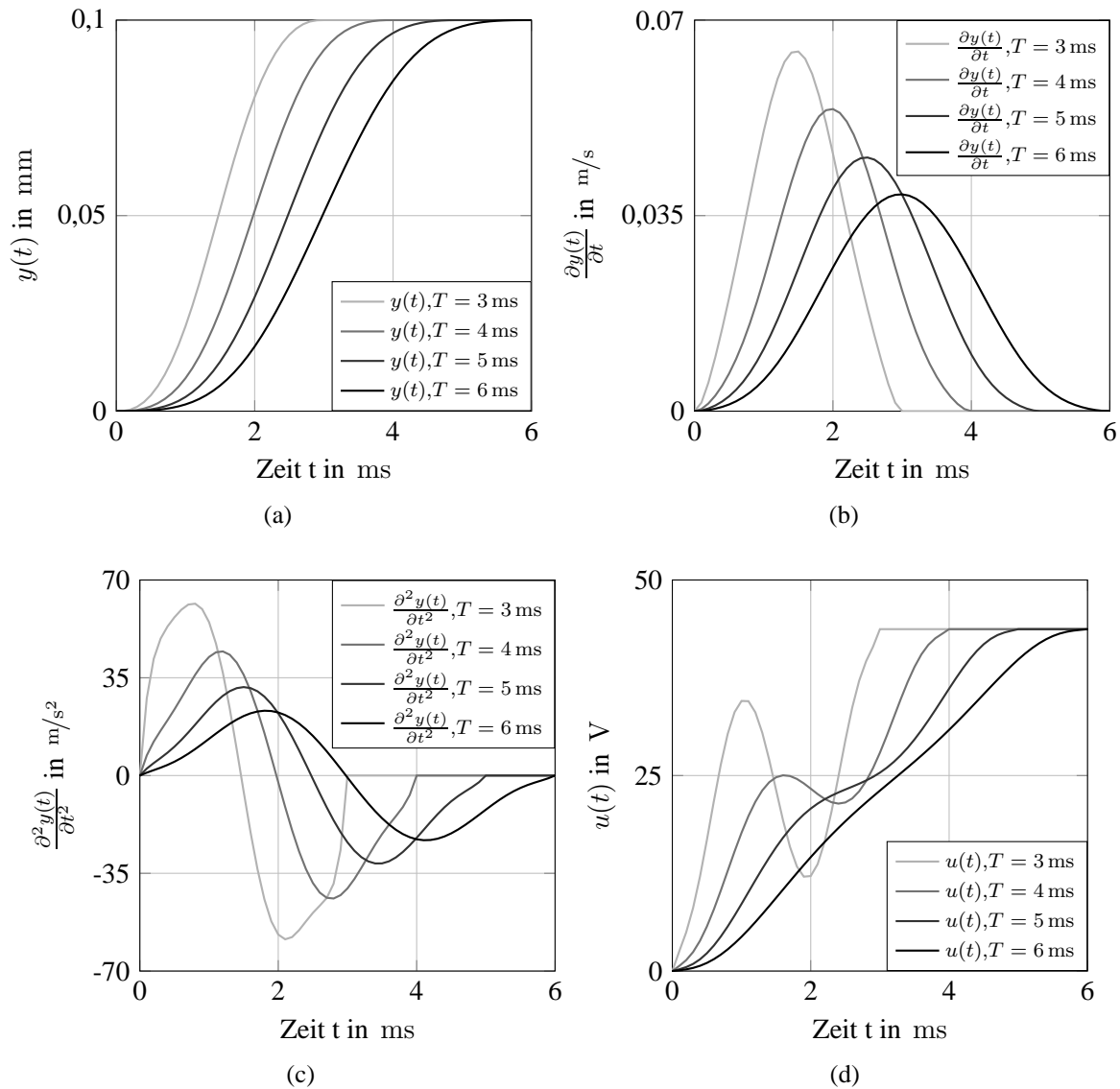


Abbildung 4.18: Verläufe von $y(t)$, $\frac{dy(t)}{dt}$, $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ und $u(t)$ mit $y_0 = 0, y_T = 0,1$ mm und unterschiedlichen T .

erreichen. Bei einer entsprechend abschnittswise Definition der zugehörigen Ableitungen garantiert (4.104) einen stetigen Übergang zwischen den beiden Abschnitten für $\frac{\partial^3 y_f(t)}{\partial t^3}$ und $\frac{\partial^4 y_f(t)}{\partial t^4}$.

Abb. 4.17 zeigt für $y_f(t) = P_f(t; y_0, y_T, T)$ die aus der Wahl $y_0 = 0, y_T = 0,1$ mm und $T \in \{3 \text{ ms}, 4 \text{ ms}, 5 \text{ ms}, 6 \text{ ms}\}$ resultierenden Verläufe des flachen Ausgangs $y_f(t; y_0, y_T, T)$, $t \geq 0$ und der zugehörigen zeitlichen Ableitung bis zur vierten Ordnung. In Abb. 4.18 finden sich die aus der geschilderten Wahl für $y_f(t)$, $t \geq 0$ resultierenden Verläufe von $y(t)$, $\frac{dy(t)}{dt}$, $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$, $u(t)$.

Entwurf einer Rückführung mittels μ -Methodik

Die Rückführung innerhalb des Regelkreises B gemäß Abb. 4.16 wird unter Verwendung eines eingangsseitigen $S_e/KS_e/T_e$ -Gewichtungsschemas mit integraler Streckenerweiterung in Kombination mit der μ -Methodik bestimmt. Als Ausgangspunkt dazu dient P aus (4.76) auf Seite 163, vereinfachend werden für den Regler mit nur einem Freiheitsgrad die dritte und vierte Spalte sowie die vierte Zeile in P vernachlässigt.

Die zu berücksichtigende Modellschar wird entsprechend den Ausführungen aus Abschnitt 4.5.3 angenommen. Die Parametrierung der verbleibenden Gewichtungsfunktionen lässt sich Tabelle 4.6 entnehmen. Abb. 4.19 zeigt die Singulärwertverläufe aller in P auftretenden Übertragungsfunktionen.

Übertragungsfunktion					
$W_{\bar{d}}(i\omega)$	$n_S = 2$	$\omega_{B,S} = 310^\circ$	$K_{0,S} = 0,8$	$K_{\infty,S} = 1$	$K_S = 0,43$
$W_d(i\omega)$	$n_T = 4$	$\omega_{B,T} = 520^\circ$	$K_{0,T} = 3$	$K_{\infty,T} = 2 \cdot 10^{-3}$	$K_T = 0,46$
$W_u(i\omega)$	$n_{KS} = 2$	$\omega_{B,KS} = 16500^\circ$	$K_{0,KS} = 10^3$	$K_{\infty,KS} = 10^{-7}$	$K_{KS} = 1$
$Q(i\omega)$	—	$\omega_{B,Q} = 310^\circ$	—	—	$K_Q = 1$

Tabelle 4.6: Reglerentwurf B: Parametrierung der Gewichtungsfunktionen und der integralen Erweiterung.

nen.

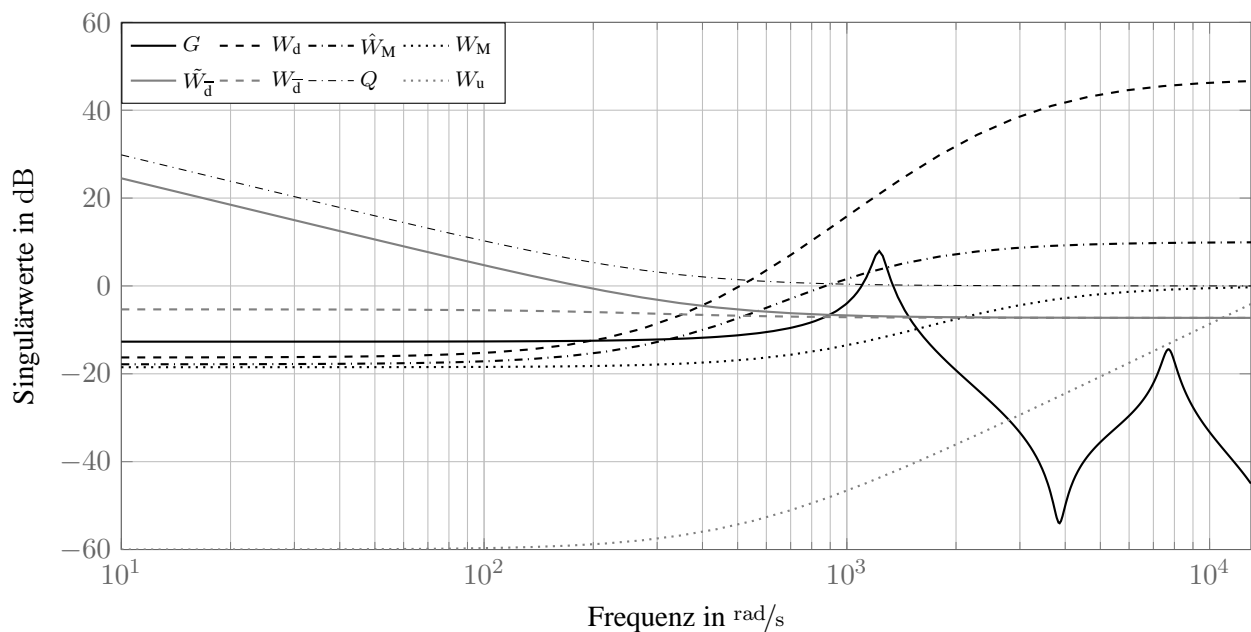


Abbildung 4.19: Reglerentwurf B: Singulärwertverläufe der einzelnen in der erweiterten Strecke auftretenden Übertragungsfunktionen.

Die resultierende erweiterte Strecke P weist eine Ordnung von

$$n_P = 21 = n_{G_{\text{Nom}}} + n_{W_{\tilde{d}}} + n_{W_d} + n_{W_u} + n_Q + n_{W_M} \quad (4.106)$$

auf. Für die innerhalb der D-K-Iteration zur Skalierung verwendeten rationalen, stabilen und minimalphasigen Übertragungsfunktionen $D_L(i\omega) = D_R(i\omega)$ wird eine maximale Ordnung von $n_{D_L} = n_{D_R} = 3$ festgelegt. Die Reglersynthese führt damit auf einen Regler mit einer Ordnung von $n_K = 27$, die Eigenwerte von K weisen alle einen negativen Realteil auf. Für $\tilde{K}_b = KQ$ resultiert eine Ordnung von $n_{\tilde{K}_b} = 28$.

In Abb. 4.20 finden sich die Singularwertverläufe von \tilde{K}_b, K, Q und G_{Nom} . Die Singularwertverläufe der an dieser Stelle resultierenden Rückführung \tilde{K}_b weisen einen qualitativ ähnlichen Verlauf wie die beiden Rückführungen der Reglerentwürfe A und A_μ auf. Aufgrund der vergleichbaren Struktur der in allen gezeigten Fällen der Reglersynthese zugrunde liegenden erweiterten Strecke, einer vergleichbaren Parametrierung der Gewichtungsfunktionen und analoger Synthesemethoden, entspricht dieses Ergebnis den Erwartungen.

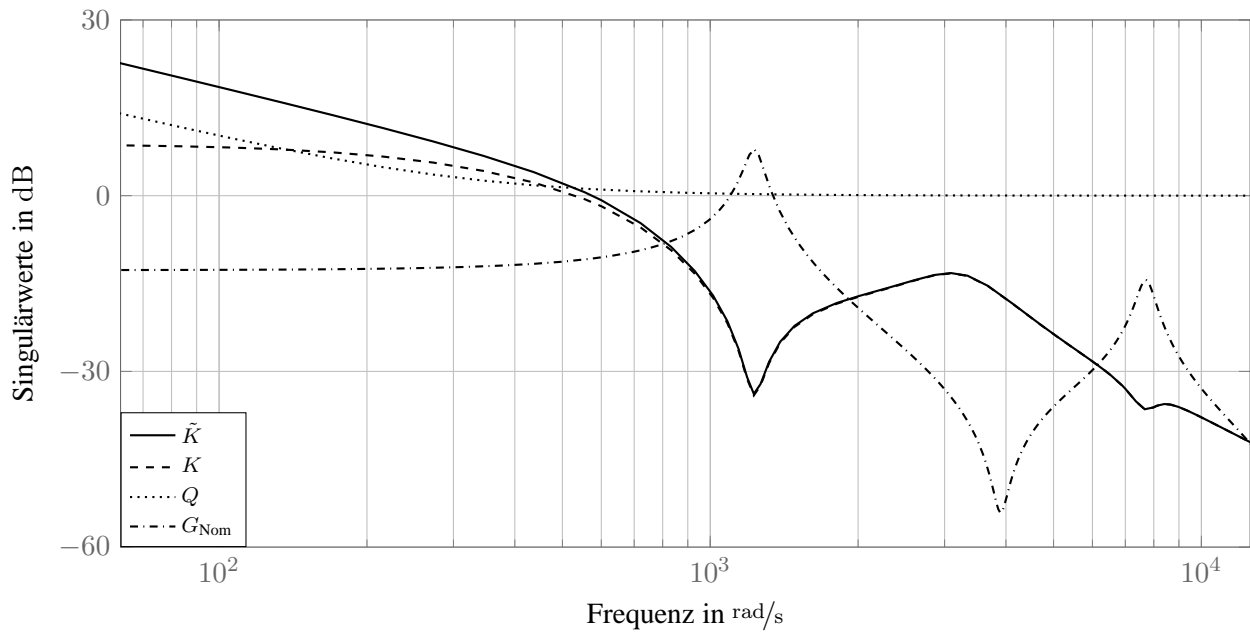


Abbildung 4.20: Reglerentwurf B: Singularwertverläufe von $\tilde{K}_b = KQ, K, Q$ und G_{Nom} .

4.6 Analyse des geregelten Beispielsystems

Der vorliegende Abschnitt beinhaltet die Anwendung der in Abschnitt E.3 eingeführten Verfahren zur Analyse geschlossener Regelkreise auf die verschiedenen, aus der Anwendung der in Abschnitt 4.5 entworfenen Regler auf das Beispielsystem resultierenden Regelkreise. Soweit die betrachteten Regelkreise eine LFT-basierte Formulierung erlauben und sich geschlossen im Rahmen der μ -Analyse behandeln lassen, erfolgt jeweils eine Analyse hinsichtlich jeder der in Definition

108 genannten Eigenschaften. Innerhalb dieser Analysen wird die Strecke stets durch G_{Nom} repräsentiert, während die Annahme der Modellscharen $\mathcal{G}_M, \hat{\mathcal{G}}_M$ oder \mathcal{G}_{M_d} die Berücksichtigung von $\hat{G}_{\text{Nom}}, G_{\text{Sim}}, \hat{G}_{\text{Sim}}, G$ oder \hat{G} erlaubt.

Die modellbasierten Analysen der Regelkreise sind als systematische Beurteilung der Eignung eines Reglers zur Regelung des realen Systems zu sehen. Die abschließende Überprüfung der Funktionstüchtigkeit eines Reglers muss allerdings durch die Anwendung auf das reale Beispielsystem erfolgen. Dazu wird das Zeitverhalten des realen Beispielsystems und verschiedener zugehöriger Modelle im geschlossenen Regelkreis betrachtet. Stellvertretend für das Zeitverhalten wird dabei die Sprungantwort jedes Regelkreises ermittelt und im Hinblick auf die Einhaltung der Regelungsziele analysiert. Innerhalb der Simulationen für die Zeitbereichsbetrachtungen der Regelkreise wird in jedem Fall \hat{G}_{Sim} als Strecke angenommen. Diese Wahl des Modells des Beispielsystems garantiert eine bessere Übereinstimmung zwischen Simulationen und Messungen. Als Zugeständnis an die in der Strecke enthaltene Totzeit erfolgt die Generierung der Sollgröße in den drei letztgenannten Regelkreisen stets unter Berücksichtigung einer identischen Totzeit. Dieses Vorgehen äußert sich in der Verwendung von \hat{G}_r anstelle von G_r in den Regelkreisen A und A_μ beziehungsweise in der einfachen zeitlichen Verschiebung der Sollgrößen im Regelkreis B.

4.6.1 Analyse des geschlossenen Regelkreises A

Dieser Abschnitt beinhaltet die Analyse des geschlossenen Regelkreises A, bestehend aus dem Beispielsystem und einem \mathcal{H}_∞ -suboptimalen Regler, der aus dem Reglerentwurf A resultiert. Einleitend erfolgt die Überprüfung des Regelkreises A hinsichtlich der in Definition 108 genannten Eigenschaften. Anschließend verdeutlichen Messungen am realen Beispielsystem das Verhalten des geregelten Beispielsystems im Zeitbereich.

Relevante Eigenschaften des Regelkreises A im Frequenzbereich

Der Reglerentwurf A führt auf ein $\begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix}$, sodass für den nominellen geschlossenen Regelkreis

$$\left\| \tilde{N} \right\|_\infty < \gamma \quad (4.107)$$

mit $\gamma = 0,98$ gilt. Die weiteren Betrachtungen gehen von einem erweiterten Regelkreis $N = \mathcal{F}_1 \left(P, \begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix} \right)$ gemäß (4.78) aus. Die Implikationen, die aus der Betrachtung der Eigenschaften von N hinsichtlich der Eigenschaften des Regelkreises A folgen, werden in Abschnitt E.2.5 thematisiert. Die Eigenwerte der Systemmatrix von N weisen alle einen negativen Realteil auf. Dazu äquivalent ist die exponentielle Stabilität des erweiterten Regelkreises sowie in diesem Fall auch dessen Ein-/Ausgangsstabilität. Darüber hinaus folgt die nominelle Stabilität des erweiterten Regelkreises.

Die nominelle Performance des Regelkreises A wird durch das verwendete Syntheseverfahren und das dabei erzielte $\gamma = 0,98$ gewährleistet. In Abb. 4.21 findet sich eine Darstellung der Singularwertverläufe der in $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ auftretenden charakteristischen Übertragungsfunktionen des

geschlossenen Regelkreises sowie der durch die Definition der erweiterten Strecke zugeordneten oberen Schranken. Für Regelkreis A folgt unter Berücksichtigung der nominellen Stabilität und $\gamma = 0,98$ a priori die robuste Stabilität gegenüber einer multiplikativen Modellschar definiert durch Gleichung (4.56) auf Seite 150. Aufgrund der Parametrierung von W_d gemäß Tabelle 4.4 gilt

$$|W_M(i\omega)| < |\hat{W}_M(i\omega)| < |W_d(i\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (4.108)$$

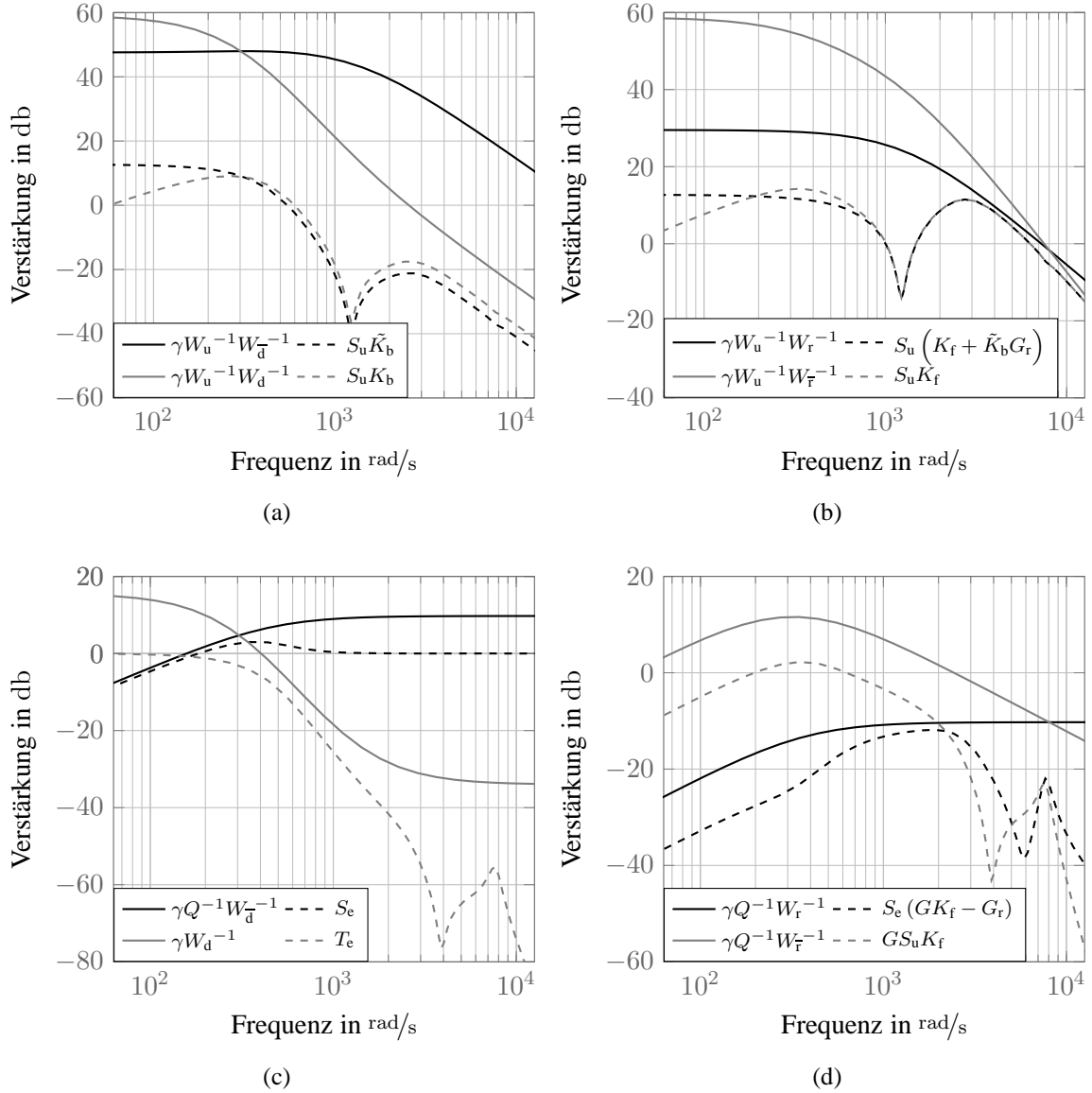


Abbildung 4.21: Regelkreis A: Singulärwertverläufe der in $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ auftretenden charakteristischen Übertragungsfunktionen und zugehöriger oberer Schranken.

Aus (4.108) folgt unmittelbar $\mathcal{G}_M \subset \hat{\mathcal{G}}_M \subset \mathcal{G}_{M_d}$, wobei sowohl für \mathcal{G}_M als auch für $\hat{\mathcal{G}}_M$ jeweils $\gamma_\Delta < 1$ angenommen wird. Entsprechend gilt die robuste Stabilität von Regelkreis A auch hin-

sichtlich der Modellscharen \mathcal{G}_M und $\hat{\mathcal{G}}_M$. Trotz dieser Erkenntnis wird im Folgenden eine zusätzliche numerische Überprüfung der robusten Stabilität von Regelkreis A gegenüber $\mathcal{G}_M, \hat{\mathcal{G}}_M$ und \mathcal{G}_{M_d} durchgeführt. Der nominelle Regelkreis wird durch den eingesetzten Regler stabilisiert. Damit lässt sich die robuste Stabilität gleichsam durch das in Abschnitt E.3.4 oder das in Abschnitt E.3.5 beschriebene Vorgehen überprüfen. Da im Fall unstrukturierter Unsicherheiten (E.109) gilt, ist die Berechnung des strukturierten Singulärwertes unter Verwendung des größten Singulärwertes unmittelbar möglich. Damit ist eine Einschachtelung von $\mu_{\Delta_M}(N_{\Delta,\Delta})$ mittels unterer Schranke $\mu_{\Delta_M,u}(N_{\Delta,\Delta})$ und oberer Schranke $\mu_{\Delta_M,o}(N_{\Delta,\Delta})$ nicht zwingend erforderlich. In Abbildung 4.22a finden sich die übereinstimmenden Verläufe von $\mu_{\Delta_M,u}(N_{\Delta,\Delta}), \mu_{\Delta_M,o}(N_{\Delta,\Delta})$ und $\bar{\sigma}(N_{\Delta,\Delta})$ im Fall der Modellschar \mathcal{G}_M . Darüber hinaus zeigt Abb. 4.22a die Singulärwertverläufe $\bar{\sigma}(N_{\Delta,\Delta})$ im Fall von $\hat{\mathcal{G}}_M$ und \mathcal{G}_{M_d} . Unter Berücksichtigung von Satz 77 bestätigen die Verläufe in Abb. 4.22a, dass der verwendete Regler die robuste Stabilität des Regelkreises gegenüber allen drei Modellscharen gewährleistet. Die der Vorsteuerung zugeordneten Elemente dieses Reglerentwurfs mit zwei Freiheitsgraden beeinflussen die Stabilität des Regelkreises A nicht. Demnach führt die Verwendung einer reinen Rückführung $\begin{pmatrix} 0 & K_b \end{pmatrix}$ innerhalb von N auf ein identisches Ergebnis hinsichtlich der robusten Stabilität. Falls das reale Beispielsystem zumindest ein Element der Modellschar \mathcal{G}_{M_d} ist, weist der Regelkreis A ausreichend robuste Stabilität zur Regelung des Beispielsystems auf.

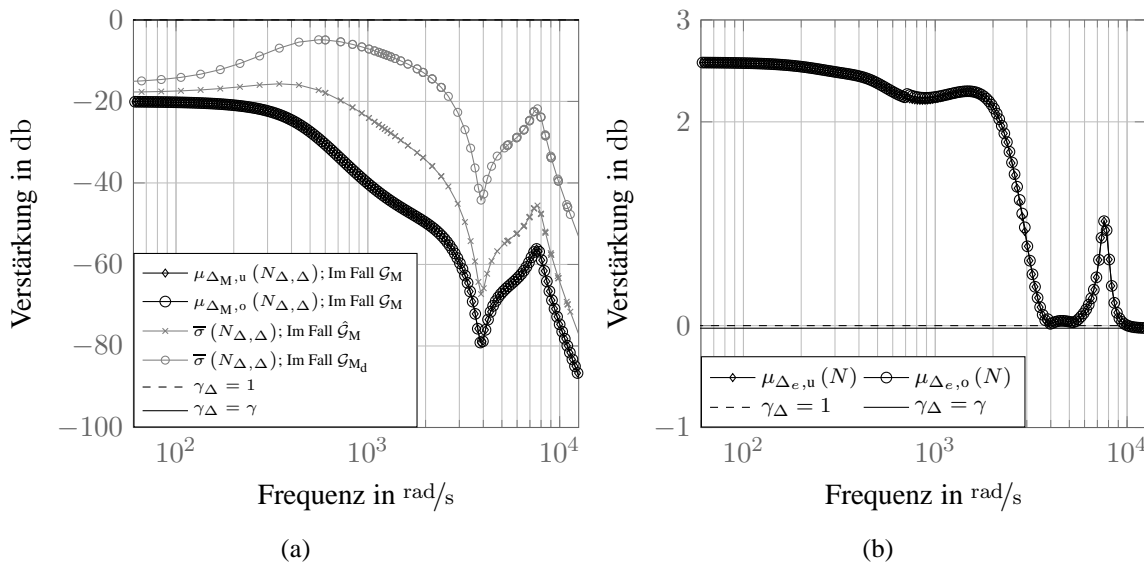


Abbildung 4.22: Regelkreis A: Grafische Analyse der robusten Stabilität unter Berücksichtigung der Modellscharen $\mathcal{G}_M \subset \hat{\mathcal{G}}_M \subset \mathcal{G}_{M_d}$ sowie der robusten Performance hinsichtlich \mathcal{G}_M .

Die Überprüfung der robusten Performance von Regelkreis A anhand von **RP2)** aus Satz 78 erfordert die fallspezifische Definition der strukturierten unsicheren Übertragungsfunktionen aus (E.115) und damit von $\Delta_e(s)$ aus (E.116). Die robuste Performance des Regelkreises A wird unter Berücksichtigung der Modellschar \mathcal{G}_M überprüft. Durch diese Festlegung ist der erste der beiden innerhalb von $\Delta_e(s)$ auftretenden Diagonalblöcke bestimmt. Die im allgemeinen Fall durch (E.115) und

(E.116) definierte erweiterte unsichere Übertragungsfunktion Δ_e ergibt sich im vorliegenden Fall aus der in der Modellschar auftretenden vollbesetzten Unsicherheit und $\Delta_{zw}(i\omega) \in \mathbb{C}^{p_w \times q_z}, \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $q_z = 2$ und $p_w = 4$. Die frequenzabhängigen Verläufe der unteren und der oberen Schranke des strukturierten Singulärwertes $\mu_{\Delta_e}(N)$ in Abb. 4.22b zeigen die fehlende robuste Performance des Regelkreises A gegenüber der Modellschar \mathcal{G}_M . Eine Überprüfung der robusten Performance gegenüber den größeren Modellscharen $\hat{\mathcal{G}}_M$ und \mathcal{G}_{M_d} ist damit obsolet.

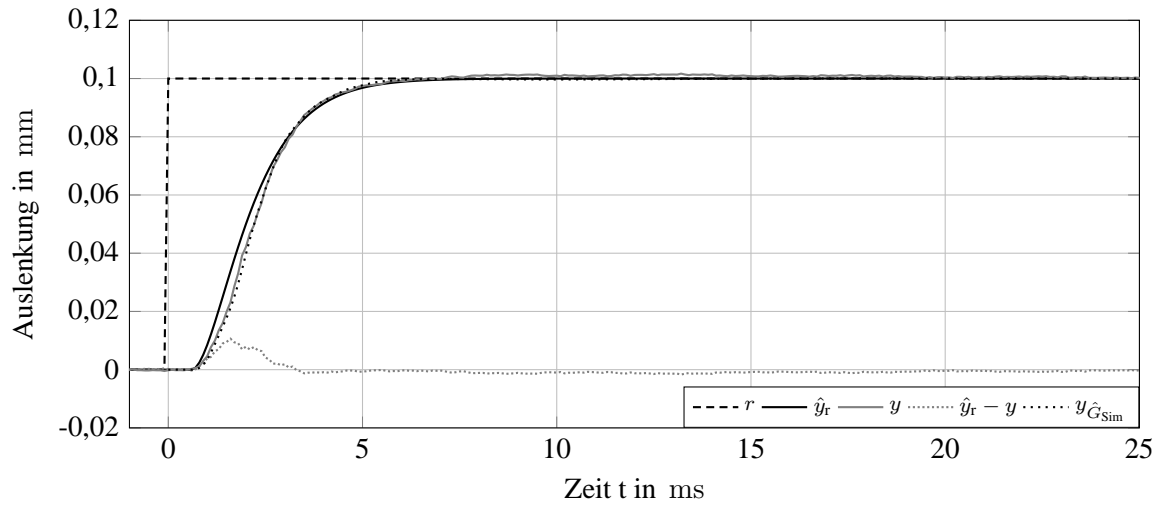
Führungsübertragungsverhalten des Regelkreises A im Zeitbereich

Gemäß der Definition der Regelungsziele soll die Regelung des Beispielsystems in erster Linie schnelle und präzise Wechsel der Regelgröße ermöglichen. Zur Untersuchung des Führungsübertragungsverhaltens im Zeitbereich wird ein Sollgrößenverlauf der Form

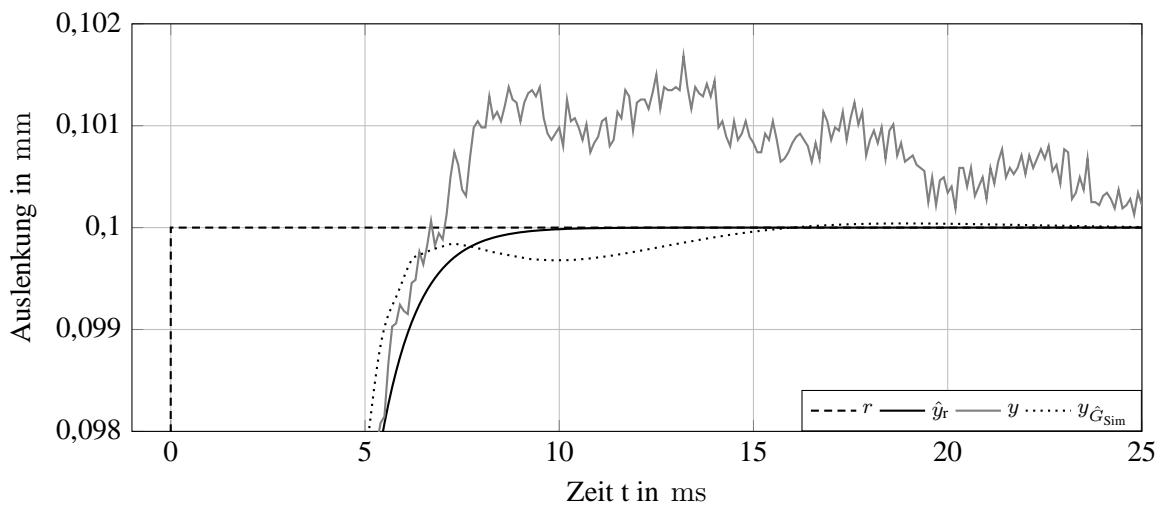
$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,1\text{mm}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.109)$$

für den geschlossenen Regelkreis entsprechend Abbildung 4.8 vorgegeben. Der stationäre Endwert von $r(t)$ wird mit $r_\infty = 0,1\text{mm}$ bezeichnet. Die Reaktion des Streckenausgangs auf $r(t)$ wird im Folgenden als Sprungantwort bezeichnet. Während im Rahmen der Reglersynthese die Referenzstrecke G_r eingesetzt wird, kommt bei der Regelung der erweiterten nominellen Strecke und des realen Systems die erweiterte Referenzstrecke \hat{G}_r zum Einsatz. Durch diese Substitution wird der Totzeit in den beiden Strecken Rechnung getragen. Als Reaktion auf $r(t)$ zeigt Abb. 4.23 den zeitlichen Verlauf des Ausgangs \hat{y}_r des erweiterten Referenzmodells \hat{G}_r , des realen Systems $y(t)$ sowie des aus der Differenz beider Werte resultierenden Modell-Matching-Fehlers $e(t) = \hat{y}_r(t) - y(t)$. Abb. 4.23b zeigt zusätzlich die Auslenkung in einem eingeschränkten Wertebereich und bietet damit eine Detailansicht der Sprungantwort. Insbesondere die Detailansicht lässt eine in der Sprungantwort auftretende Schwingung mit einer Frequenz nahe der ersten Eigenfrequenz der Strecke erkennen. Diese schwach gedämpfte Schwingung lässt sich als Ausdruck eines bekannten Nachteils des verwendeten Gewichtungsschemas bei der Regelung schwach gedämpfter Systeme auffassen. Die charakteristischen Größen der in Abb. 4.23a gezeigten Sprungantwort sind tabellarisch in Tabelle 4.7 aufgelistet. Hinsichtlich des definierten Sollgrößenverlaufs $r(t)$ weist die Modellfolgeregelung am realen System ein sehr gutes Führungsübertragungsverhalten auf. Das Führungsübertragungsverhalten zeichnet sich insbesondere durch eine schnelle Anstiegszeit von etwa 2,5 ms sowie eine schnelle Einschwingzeit von ungefähr 5,4 ms aus. Darüber hinaus ist das mit etwa 1,7 % äußerst geringe Überschwingen der gemessenen Sprungantwort hervorzuheben. Der Modell-Matching-Fehler erreicht bei ca. 1,6 ms mit 0,01064 mm sein Maximum und verbleibt ab ungefähr 2,8 s unter $0,02 \cdot r_\infty$.

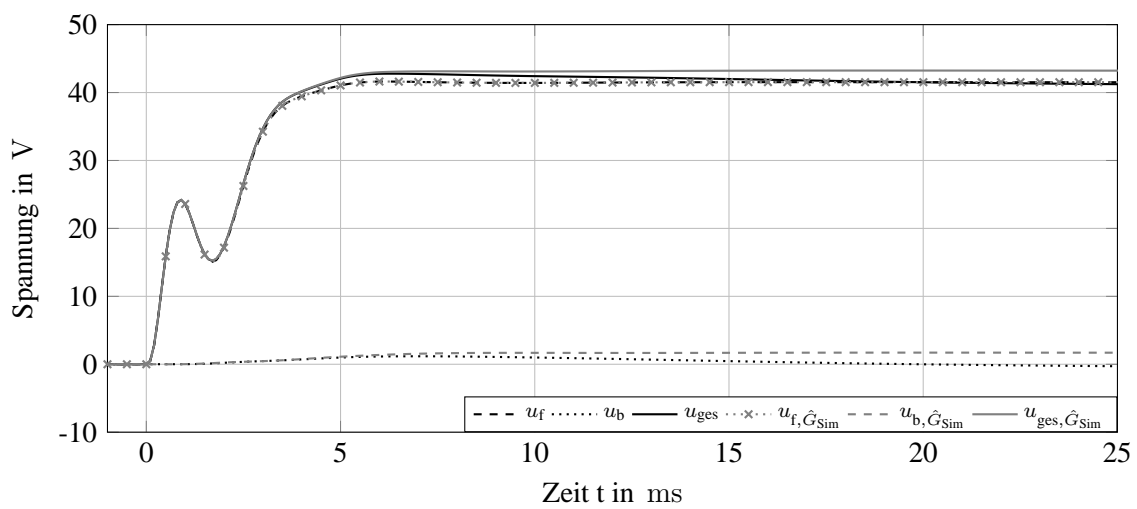
Abb. 4.23c enthält die durch den Vorwärtzweig des Reglers kommandierte Spannung $u_f(t)$, die durch die Rückführung erzeugte Stellgröße $u_b(t)$ sowie die Summe beider Verläufe $u_{\text{ges}}(t)$. Aus



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.23: Regelkreis A: Sprungantwort \hat{y}_r der erweiterten Referenzstrecke \hat{G}_r , des realen Systems y , des aus der Differenz beider Werte resultierenden Modell-Matching-Fehlers $e = \hat{y}_r - y$ sowie des über \hat{G}_{Sim} geschlossenen Regelkreises.

den verschiedenen Spannungsverläufen wird der wesentliche Anteil der Vorsteuerung am Führungsübertragungsverhalten ersichtlich. Um die Auswirkung der Vorsteuerung auf das reale System weiter zu verdeutlichen, wird im Regelgesetz der Modellfolgeregelung entsprechend (4.68) die Rückführung \tilde{K}_b zu Null gesetzt. Daraus resultiert ein gesteuertes System mit $y_K = K_f r$. Die erneute Berücksichtigung des Sollgrößenverlaufs $r(t)$ gemäß (4.109) führt am realen System zu dem in Abb. 4.24a gezeigten Verlauf der Auslenkung.

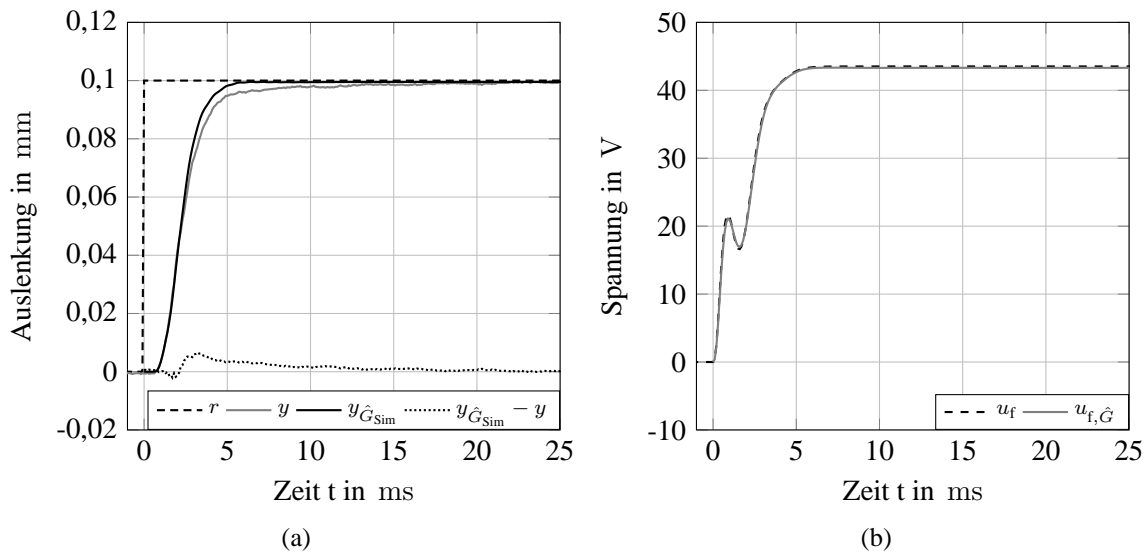


Abbildung 4.24: Regelkreis A: Sprungantwort der Referenzstrecke, der erweiterten Referenzstrecke und des realen Systems im Fall einer Steuerung $y_K = K_f r$.

4.6.2 Analyse des geschlossenen Regelkreises A_μ

Dieser Abschnitt beinhaltet die Analyse des geschlossenen Regelkreises A_μ , bestehend aus dem Beispielsystem und der aus Reglerentwurf A_μ stammenden Modellfolgeregelung.

Relevante Eigenschaften des Regelkreises A_μ im Frequenzbereich

Der Reglerentwurf A_μ führt auf ein $\begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix}$, sodass für $N = \mathcal{F}_1 \left(P, \begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix} \right)$ die Ungleichung

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\Delta_e}(N) < \gamma \quad (4.110)$$

mit $\gamma = 0,992$ gilt. Die Eigenwerte der Systemmatrix von N weisen alle einen negativen Realteil auf, entsprechend folgt die nominelle Stabilität von Regelkreis A_μ . Daraus folgt äquivalent die exponentielle Stabilität des nominellen erweiterten Regelkreises sowie dessen Ein-/Ausgangsstabilität. Zudem sind mit der nominellen Stabilität des Regelkreises A_μ alle Annahmen aus Satz 78 erfüllt. Aufgrund der nominellen Stabilität des Regelkreises A_μ und der Einhaltung von (4.110) mit

$\gamma = 0,992$ folgt auch unmittelbar die nominelle Performance von Regelkreis A_μ . Mit der speziellen Wahl eines $\Delta(s)$ identisch Null gilt für $\tilde{P} = \mathcal{F}_u(P, 0)$

$$\left\| \mathcal{F}_l \left(\tilde{P}, \begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix} \right) \right\|_\infty = 0,989. \quad (4.111)$$

Die Darstellung der Singulärwertverläufe der verschiedenen in $N_{z,w} = \mathcal{F}_l \left(\tilde{P}, \begin{pmatrix} K_f & K_b \end{pmatrix} \right)$ auftretenden charakteristischen Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises sowie der durch die Definition der erweiterten Strecke zugeordneten oberen Schranken findet sich in Abb. 4.25.

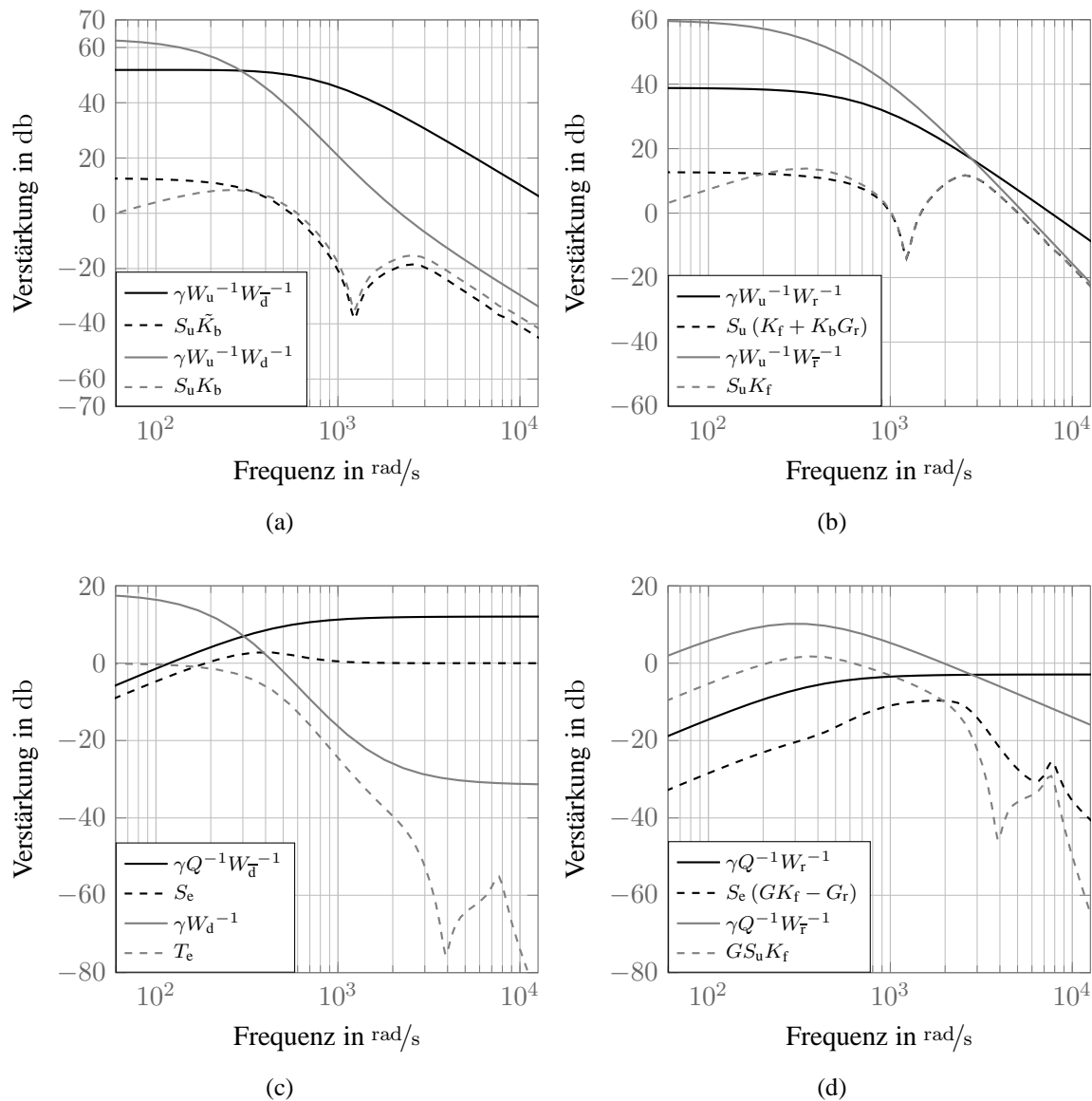


Abbildung 4.25: Regelkreis A_μ : Singulärwertverläufe der in $N_{z,w}$ auftretenden charakteristischen Übertragungsfunktionen und zugehöriger oberer Schranken.

Wie aufgrund der Parametrierung der Gewichtungsfunktionen W_d und W_r sowie Q zu erwarten, sind die resultierenden Verläufe von S_e und T_e qualitativ mit den entsprechenden Verläufen des be-

reits analysierten Regelkreises A vergleichbar. Für die verbleibenden Singulärwertverläufe gelten ebenfalls qualitativ die hinsichtlich Regelkreis A getätigten Aussagen.

Die Kombination aus Problemformulierung, Wahl des Syntheseverfahrens sowie dem Resultat der Reglersynthese einschließlich der nominellen Stabilität von Regelkreis A_μ erlauben den Schluss auf die robuste Stabilität von Regelkreis A_μ gegenüber $\mathcal{G}_M, \hat{\mathcal{G}}_M$ sowie \mathcal{G}_{M_d} . Eine grafische Überprüfung dieser Aussage wird in Abb. 4.26a angestellt. Die robuste Stabilität des vorliegenden Regelkreises bedingt die Eignung des eingesetzten Reglers zur Regelung des realen Beispielsystems. Aus der nominellen Stabilität des betrachteten Regelkreises und der durch die μ -Synthese garantierten Einhaltung von (4.110) mit $\gamma = 0,992$ folgt die robuste Performance des Regelkreises unter Berücksichtigung der Modellschar \mathcal{G}_M .

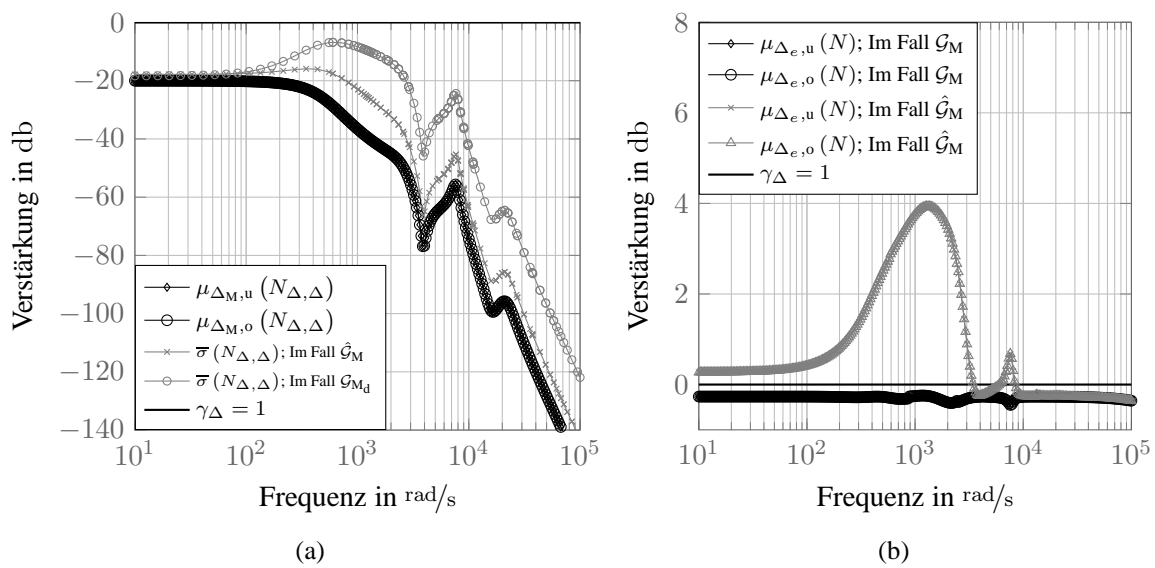
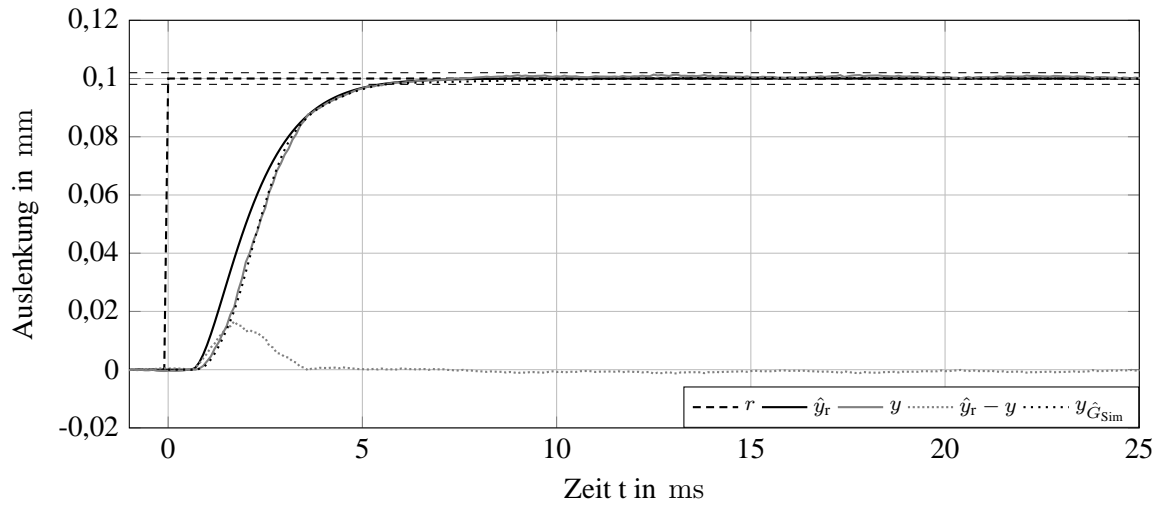


Abbildung 4.26: Regelkreis A_μ : Grafische Analyse der robusten Stabilität unter Berücksichtigung der Modellscharen $\mathcal{G}_M \subset \hat{\mathcal{G}}_M \subset \mathcal{G}_{M_d}$ sowie der robusten Performance hinsichtlich $\mathcal{G}_M \subset \hat{\mathcal{G}}_M$.

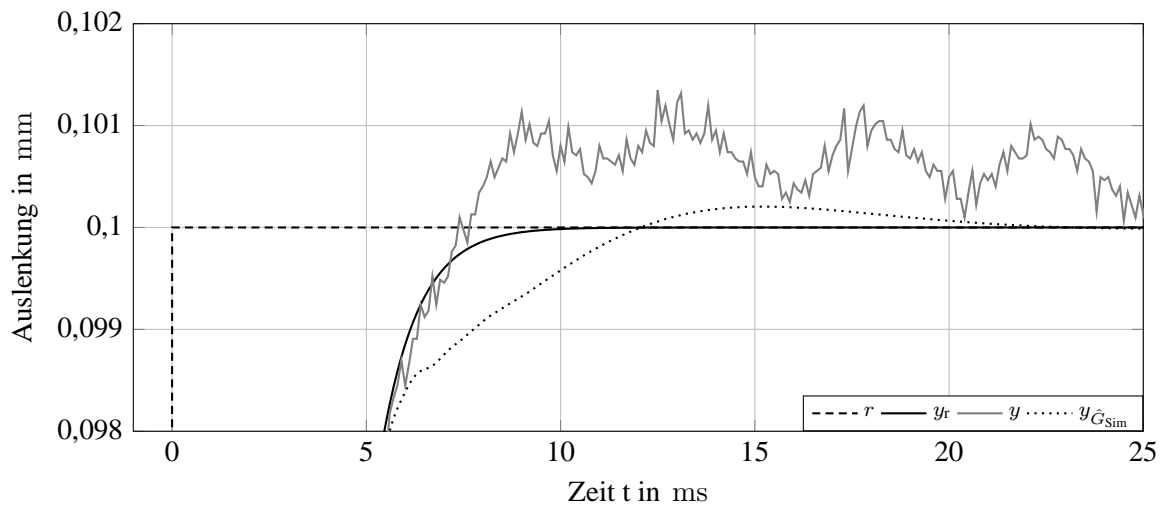
Die frequenzabhängigen Verläufe der unteren und der oberen Schranke des strukturierten Singulärwertes $\mu_{\Delta_e}(N)$ in Abb. 4.26b bestätigen diese Aussage. Gleichzeitig lässt sich Abb. 4.26b die fehlende robuste Performance gegenüber $\hat{\mathcal{G}}_M$ entnehmen. Auf eine Analyse der robusten Performance des Regelkreises gegenüber der größeren Modellschar \mathcal{G}_{M_d} wird daher verzichtet.

Führungsübertragungsverhalten des Regelkreises A_μ im Zeitbereich

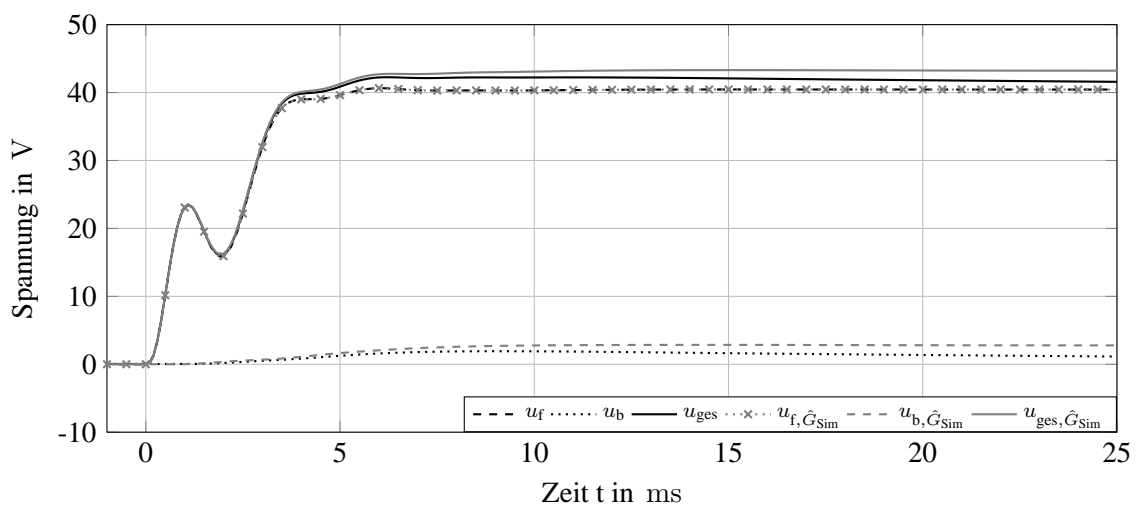
Das Führungsübertragungsverhalten des Regelkreises A_μ wird anhand eines Sollgrößenverlaufs $r(t)$ gemäß (4.109) überprüft. Als Reaktion auf $r(t)$ zeigt Abb. 4.27 den zeitlichen Verlauf des Ausgangs des erweiterten Referenzmodells \hat{G}_r , des realen Systems, des aus der Differenz beider Werte resultierenden Modell-Matching-Fehlers sowie des über \hat{G}_{Sim} geschlossenen Regelkreises.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.27: Regelkreis A_μ : Sprungantwort \hat{y}_r der erweiterten Referenzstrecke \hat{G}_r , des realen Systems y , des aus der Differenz beider Werte resultierenden Modell-Matching-Fehlers $e = \hat{y}_r - y$ sowie des über \hat{G}_{Sim} geschlossenen Regelkreises.

Die charakteristischen Größen der in Abb. 4.27a gezeigten Sprungantwort sind tabellarisch in Tabelle 4.7 aufgelistet. Das Führungsübertragungsverhalten von Regelkreis A_μ ähnelt qualitativ dem von Regelkreis A, wobei die Anstiegszeit und die Einschwingzeit im Fall von Regelkreis A_μ mit 2,6 ms beziehungsweise 5,5 ms geringfügig langsamer ausfallen. Das maximale Überspringen ist mit 1,3 % gegenüber Regelkreis A weiter verringert. Der Modell-Matching-Fehler erreicht bei ca. 1,7 ms mit 0,016 mm sein Maximum und verbleibt ab ungefähr 3,3 ms unter $0,02 \cdot r_\infty$. Hinsichtlich der Bewertung der Stellgrößenverläufe sei auf die Aussagen bezüglich Regelkreis A verwiesen.

4.6.3 Analyse des geschlossenen Regelkreises B

Innerhalb dieses Abschnitts erfolgt die Analyse des in Abb. 4.16 dargestellten geschlossenen Regelkreises B. Da sich die in Regelkreis B verwendete flachheitsbasierte Vorsteuerung nicht unmittelbar im Rahmen einer μ -Analyse berücksichtigen lässt, beschränken sich die Betrachtungen auf die Stabilitätseigenschaften und das Zeitverhalten des besagten Regelkreises.

Analyse der Stabilität

Im Folgenden wird angenommen, dass die flachheitsbasierte Vorsteuerung stets zumindest lokal quadratisch-integrierbare Stellgrößen und Sollgrößen generiert und damit die Analyse der nominellen Stabilität des Regelkreises B auf eine Betrachtung der Rückführung des betreffenden Regelkreises zu beschränken ist. Die damit hinsichtlich der Stabilitätsbetrachtungen zulässige Vernachlässigung der flachheitsbasierten Vorsteuerung überführt Regelkreis B entsprechend den Aussagen aus Abschnitt 4.5.4 in einen Regelkreis mit nur einem Freiheitsgrad. Die folgenden Betrachtungen gehen daher von einem erweiterten Regelkreis $N = \mathcal{F}_1(P, K)$ aus. Der auf Basis einer D-K-Iteration durchgeführte Reglerentwurf B führt auf

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\Delta_e}(N) < \gamma \quad (4.112)$$

mit $\gamma \approx 0,983$. Aus der Überprüfung der Eigenwerte der Systemmatrix von $N_{z,w} = \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ ergibt sich die exponentiellen Stabilität von $N_{z,w}$. Daraus folgen in diesem Fall die nominelle Stabilität sowie die Ein-/Ausgangsstabilität von N .

Hinsichtlich der robusten Stabilität lässt sich aus dem verwendeten Gewichtungsschema, der nachgewiesenen nominellen Stabilität und dem erzielten γ die robuste Stabilität von Regelkreis B gegenüber der Modellschar \mathcal{G}_{M_d} schlussfolgern, wobei an dieser Stelle die Wahl von W_d erneut $|W_\Delta(i\omega)| < |W_{\Delta,e}(i\omega)| < |W_d(i\omega)|, \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sowie $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_M \subset \hat{\mathcal{G}}_M \subset \mathcal{G}_{M_d}$ gewährleistet.

Führungsübertragungsverhalten des Regelkreises B im Zeitbereich

Zur Darstellung des Führungsübertragungsverhaltens des Regelkreises B wird ein Sollgrößenverlauf $r(t)$ gemäß (4.109) vorausgesetzt. Um zu dem vorgegebenen $r(t)$ eine geeignete systemkonforme Solltrajektorie $y_r(t)$ sowie das zugehörige $u_r(t)$ zu erzeugen, erfolgt eine Parametrierung des

flachen Ausgangs $y_f(t)$ gemäß Abschnitt 4.5.4 durch

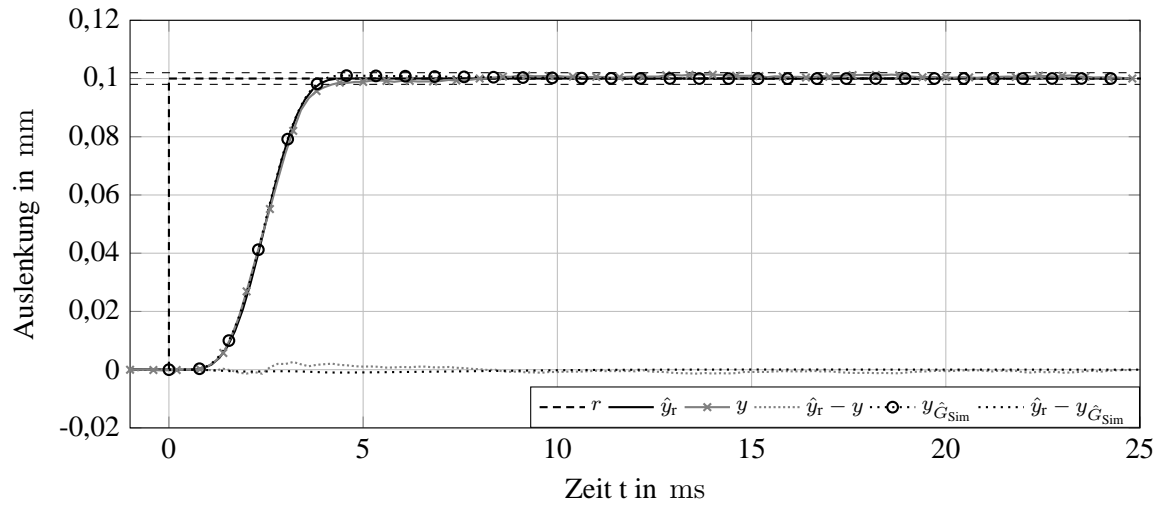
$$y_0 = 0, \quad y_T = 0,1 \text{ mm}, \quad T = 4 \text{ ms.} \quad (4.113)$$

Die aus dieser Parametrierung von $y_f(t)$ resultierenden Verläufe für $y_f(t)$, $\frac{\partial y_f(t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y_f(t)}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3 y_f(t)}{\partial t^3}$ und $\frac{\partial^4 y_f(t)}{\partial t^4}$ lassen sich Abb. 4.17 entnehmen, während die Verläufe von $y_r(t)$, $\frac{\partial y_r(t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y_r(t)}{\partial t^2}$ sowie $u_f(t)$ in Abb. 4.18 zu finden sind. Bei der Definition von $y_f(t)$, $t > T$ findet (4.105) Anwendung. Um der im realen System auftretenden Totzeit Rechnung zu tragen, berücksichtigt die Generierung der Solltrajektorie ebenfalls eine Totzeit, es gilt $\hat{y}_r(t) = y_r(t - 0,0005)$. Die zeitliche Verschiebung wird nicht auf $u_f(t)$ angewandt.

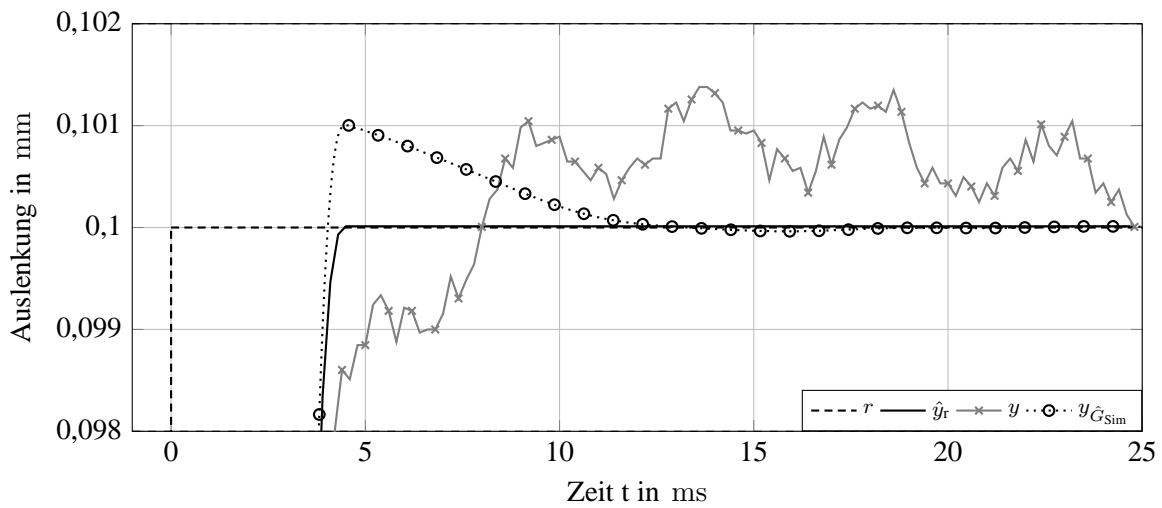
Als Reaktion auf $r(t)$ zeigen Abb. 4.28a beziehungsweise Abb. 4.28b den zeitlichen Verlauf von $\hat{y}_r(t)$, den gemessenen Ausgang des realen Systems $y(t)$, den simulierten Ausgang von $y_{\hat{G}_{\text{Sim}}}(t)$ sowie die reale und die simulierte Regeldifferenz. Tabelle 4.7 enthält die charakteristischen Größen der in Abb. 4.28 gezeigten Sprungantwort. Die gemessene Anstiegszeit von Regelkreis B liegt mit etwa 1,8 ms unterhalb von 2 ms. Die gemessene Einschwingzeit dieses Regelkreises überschreitet mit 4,2 ms die vorgegebene Übergangszeit T um etwa 5 %. Damit ist der Einschwingvorgang im Regelkreis B um mehr als etwa 1,5 ms schneller als im Fall der strukturell vergleichbaren Regelkreise A und A_μ . Gleichzeitig liegt die Regelabweichung $e(t) = \hat{y}_r(t) - y(t)$ stets unterhalb von $0,027 \cdot r_\infty$ und für $t \geq 4,2 \text{ ms}$ gilt $e(t) < 0,02 \cdot r_\infty$. Das maximale Überspringen ist mit 1,4 % etwa in der Größenordnung von Regelkreis A_μ . Da die flachheitsbasierte Vorsteuerung unter Berücksichtigung von $\Sigma_f = \Sigma_N$, $N = 4$ entworfen wird, während die Strecke im simulierten geschlossenen Regelkreis auf $\Sigma_{\text{Sim}} = \Sigma_N$, $N = 30$ beruht, tritt auch in der Simulation eine Regeldifferenz auf. Abb. 4.23b zeigt in Analogie zu den übrigen betrachteten Regelkreisen eine in der Sprungantwort auftretende, unerwünschte und dazu schwach gedämpfte Schwingung mit einer Frequenz nahe der ersten Eigenfrequenz der unregelten Strecke.

Die zeitlichen Verläufe der Stellgrößen $u_{\text{ges}}(t) = u_f(t) + u_b(t)$ beziehungsweise $u_{\text{ges}, \hat{G}_{\text{Sim}}}(t) = u_{f, \hat{G}_{\text{Sim}}}(t) + u_{b, \hat{G}_{\text{Sim}}}(t)$ in Abb. 4.28c verdeutlichen den erheblichen Anteil der Vorsteuerung an der gesamten Stellgröße. Dabei wird eine identische Vorsteuerung für das reale System und die Simulation verwendet, es gilt also $u_f(t) = u_{f, \hat{G}_{\text{Sim}}}(t)$.

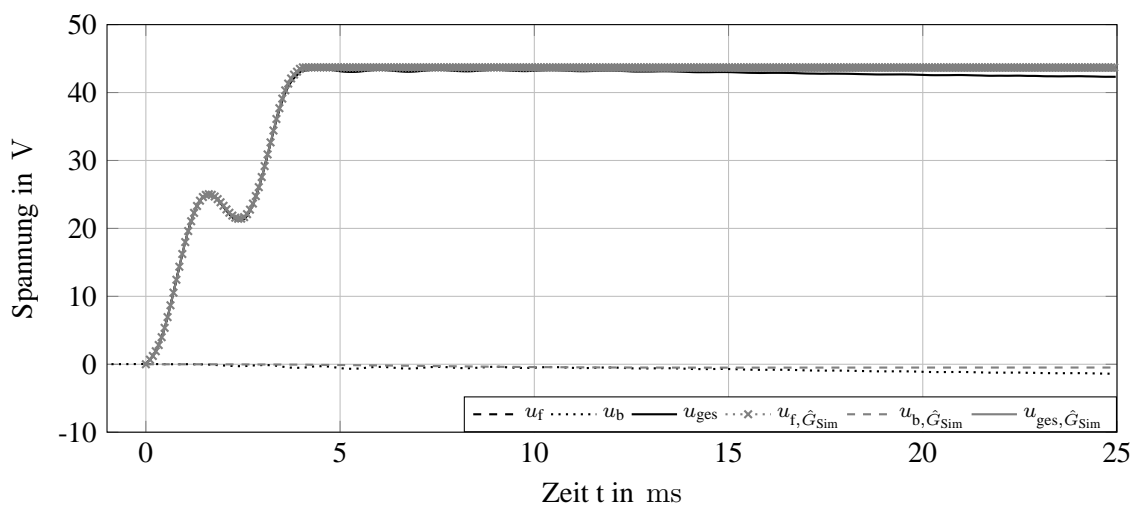
Um die Wirkung der Vorsteuerung zu unterstreichen, zeigt Abb. 4.29 die am realen System gemessene Auslenkung in Folge einer flachheitsbasierten Vorsteuerung ohne jegliche Rückführung. Die Generierung der flachen Vorsteuerung folgt dabei unter Einbeziehung der Fälle $T \in \{3, 4, 5, 6\} \text{ ms}$ dem für Regelkreis B geschilderten Vorgehen. In Abb. 4.29b lässt sich wiederum die unerwünschte Schwingung innerhalb der Sprungantwort erkennen. Ein Auftreten dieser Schwingung bei Betrachtung der offenen Wirkungskette deutet auf eine Anregung der ersten Eigenfrequenz der unregelten Strecke durch $u_f(t)$ hin. Als Ursache dafür kommt eine Abweichung zwischen Σ_f und dem realen System in Frage. Ein weiterer praxisnaher Nachweis für die Eignung der flachen Vorsteuerung zur Ansteuerung der betrachteten Biege wandler lässt sich zudem [Bra07b] entnehmen.



(a)

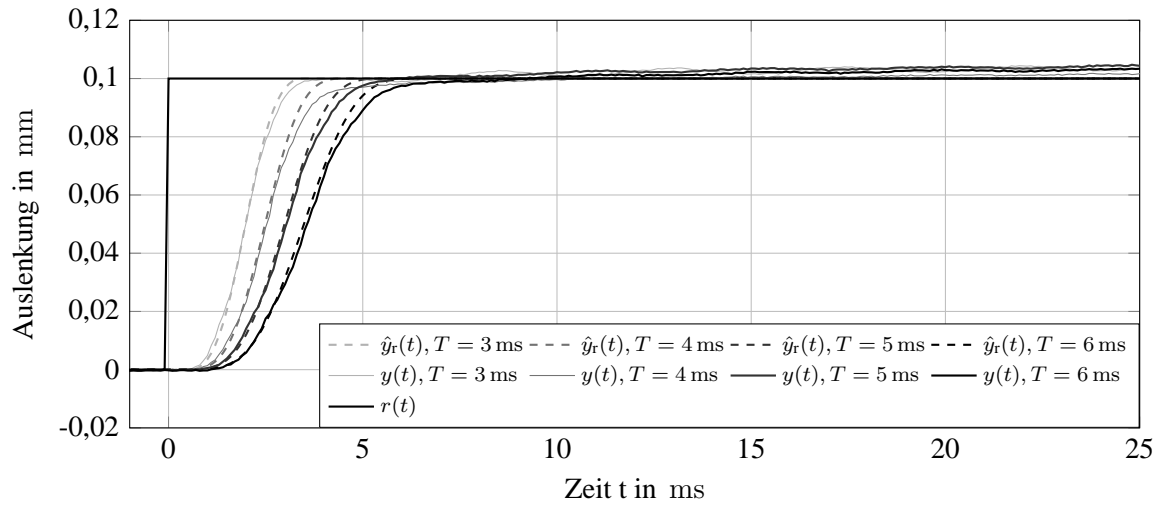


(b)

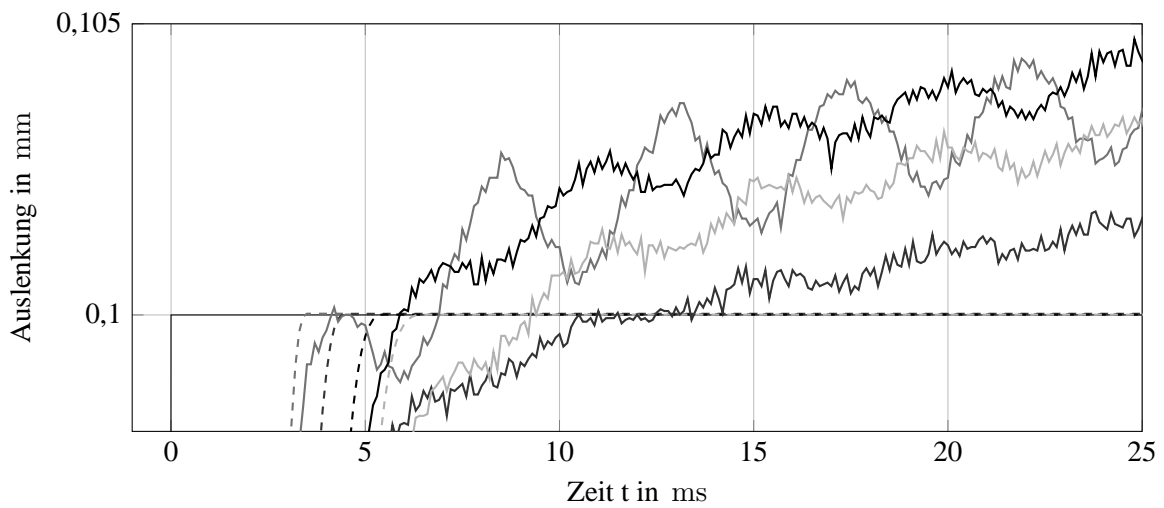


(c)

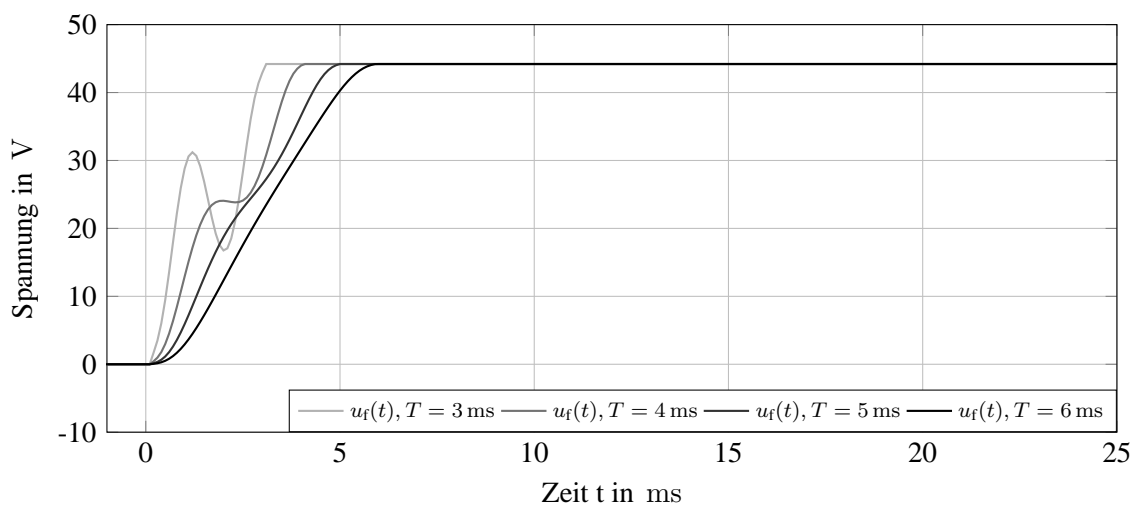
Abbildung 4.28: Regelkreis B : Zeitliche Verläufe von \hat{y}_r , des realen Systems y , der simulierten Strecke $y_{\hat{G}_{Sim}}$ sowie der Regeldifferenz $\hat{y}_r - y$ und zugehöriger Stellgrößen in Folge der sprungförmigen Anregung r im geschlossenen Regelkreis.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.29: Offene Wirkungskette: Zeitliche Verläufe von $\hat{y}_r(t)$ und des realen Systems $y(t)$ in Folge der sprungförmigen Anregung $r(t)$.

4.6.4 Abschließende Bewertung der Reglersyntheseverfahren

Der vorliegende Abschnitt beinhaltet eine abschließende Bewertung der verwendeten Reglersyntheseverfahren hinsichtlich ihrer Eignung zum Entwurf von Reglern für das Beispielsystem.

Regelkreis	Anstiegszeit			Einschwingzeit		Maximales Überspringen		
	$t_{AZ,0,1}$ in ms	$t_{AZ,0,9}$ in ms	t_{AZ} in ms	t_{EZ} in ms	$y(t_{EZ})$ in mm	t_U in ms	$y(t)$ in mm	in %
Regelungsziele	-	-	3	6	-	-	-	2
A (Messung)	1,2	3,7	2,5	5,4	0,098	13,2	0,1017	1,7
A_μ (Messung)	1,3	3,9	2,6	5,5	0,098	13,2	0,1013	1,3
B (Messung)	1,6	3,4	1,8	3,9	0,098	13,6	0,1014	1,4

Tabelle 4.7: Reglerentwürfe: Charakteristische Größen der Sprungantworten.

Bezüglich des Aufwandes bei der Formulierung des Entwurfsproblems sind die Reglerentwürfe A und A_μ nahezu identisch. Die Anwendung der μ -Methodik erfordert zusätzlich lediglich die explizite Berücksichtigung einer Modellschar im Entwurfsproblem. Ein wesentlicher Vorteil der Reglersynthese mittels der μ -Methodik ist die a priori Gewährleistung der robusten Performance gegenüber der im Entwurf berücksichtigten Modellschar. Diese Garantie erlaubt die Einsparung zeitaufwendiger Simulationen des geschlossenen Regelkreises beziehungsweise die Durchführung einer nachträglichen μ -Analyse des geschlossenen Regelkreises. Die Berücksichtigung der im Zeitbereich an das Führungsübertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises gestellten Anforderungen (Tabelle 4.7) innerhalb der Entwurfsprobleme A und A_μ reduziert sich durch die Verwendung einer Modellfolgeregelung im Wesentlichen auf die Festlegung einer geeigneten Referenzstrecke G_r . Die Berechnung der Vorsteuerung und der Rückführung der Modellfolgeregelungen A und A_μ wird jeweils in einem einzelnen Entwurfsschritt konsistent innerhalb des jeweiligen Syntheseverfahrens durchgeführt.

Im Reglerentwurf B wird eine mittels der μ -Methodik entworfene Rückführung mit einer flachheitsbasierten Vorsteuerung kombiniert. Der Entwurf der Rückführung mittels der μ -Synthese basiert auf der nominellen Strecke und bedingt für den Regelkreis B die bereits genannten Vorteile dieses Verfahrens. Die Auslegung der flachheitsbasierten Vorsteuerung erfolgt anhand von Σ_f und erfordert den Nachweis der Flachheit von Σ_f sowie die Kenntnis eines flachen Ausgangs dieses Systems. In Anbetracht der linearen Systemdynamik von Σ_f ist der Nachweis der Flachheit dieses Systems äquivalent zum Nachweis seiner Steuerbarkeit. Der Nachweis der Steuerbarkeit und das Auffinden eines flachen Ausgangs von Σ_f sind durch die Transformation in die Steuerbarkeitsnormalform zu bewältigen. Der Einsatz einer flachen Vorsteuerung erlaubt darüber hinaus ebenfalls eine einfache Berücksichtigung der Regelungsziele im Zeitbereich. Für die Trajektorienfolgeregelung ergibt sich insgesamt durch die separate Bestimmung der Vorsteuerung und der Rückführung mittels unterschiedlicher Methoden ein gegenüber den Modellfolgeregelungen leicht erhöhter Aufwand während des Reglerentwurfs.

Ein Vergleich der in den unterschiedlichen Regelkreisen erzielten Resultate mit den Regelungszielen zeigt, dass jedes der eingesetzten Reglersyntheseverfahren die Synthese hoch performanter

Regler erlaubt, die jeweils die Einhaltung der Regelungsziele im geschlossenen Regelkreis gewährleisten. Der Regelkreis A weist gegenüber dem Regelkreis A_μ geringfügig kürzere Anstiegs- und Einschwingzeiten auf. Die Anstiegszeiten liegen in beiden Fällen mehr als 10 % unterhalb der geforderten Anstiegszeit, die Einschwingzeiten liegen jeweils etwa 10 % unter der definierten Grenze. Beide Modellfolgeregelungen gewährleisten ferner die Einhaltung der Beschränkung hinsichtlich des maximalen Überschwingens. Dabei liegt das maximale Überschwingen in Regelkreis A_μ mit 0,0013 mm deutlich unterhalb des in Regelkreis A gemessenen Wertes von 0,0017 mm, der maximale Modell-Matching-Fehler dagegen ist im Fall des Regelkreises A geringer.

Die Ergänzung der Rückführung durch den Einsatz einer auf Basis von Σ_f entworfenen flachen Vorsteuerung erlaubt das Erzielen von Anstiegs- beziehungsweise Einschwingzeiten von 1,8 ms beziehungsweise 3,9 ms. Damit ist der Regelkreis B hinsichtlich der Sprungantwort signifikant schneller als die beiden Modellfolgeregelungen. Das Überschwingen im Regelkreis B weist einen sehr geringen Wert auf und ist quantitativ mit dem Überschwingen in Regelkreis A_μ vergleichbar. Abbildung 4.28a zeigt zudem die für alle gezeigten Zeiten ausgesprochen geringfügige Differenz $\hat{y}_r(t) - y(t)$. In diesem Zusammenhang ist die Konsistenz der Trajektorien $\hat{y}_r(t)$ mit der Systemdynamik von Σ_f hervorzuheben.

Die Stellgrößenverläufe in den Abbildungen 4.23c, 4.27c und 4.28c verdeutlichen, dass die Umsetzung eines Wechsels der Führungsgröße in allen drei Regelkreisen im Wesentlichen durch die aus der Vorsteuerung resultierende Stellgröße realisiert wird. Im Fall des Beispielsystems, aber auch im Allgemeinen, ist der zielgerichtete Einsatz einer Vorsteuerung eng an die Kenntnis eines hinreichend genauen Streckenmodells geknüpft. Beide gezeigten Ansätze zur Auslegung einer Vorsteuerung basieren in gewisser Hinsicht auf einer Inversion der Strecke. Im Fall der Modellfolgeregelung wird diese Aussage durch die jeweiligen Singulärwertverläufe von K_f und $G^{-1}G_r$ in den Abbildungen 4.15a und 4.15b gestützt. Für den flachheitsbasierten Ansatz ist die Aussage beispielsweise in [HZ04] belegt. An dieser Stelle beruht allerdings keiner der beiden Ansätze zur Auslegung der Vorsteuerung auf einer vollständigen Inversion des unendlich-dimensionalen Beispielsystems.

Die Gegenüberstellung des Aufwandes während der Formulierung des Entwurfsproblems und der Reglersynthese einerseits sowie den Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises und den bei der Regelung des realen Biegewandlers erzielten Resultaten andererseits erlaubt den Schluss, dass sich insbesondere die Regler A_μ sowie B zur Regelung des Beispielsystems eignen. Der Regler A_μ zeichnet sich dabei insbesondere durch die Reglersynthese unter Verwendung eines einzelnen Syntheseverfahrens und eines einzelnen Entwurfsschritts aus. Ein wesentlicher Vorteil des Reglers B liegt in der Freiheit zur Festlegung von Σ_f , wodurch auf besonders einfache Weise die im flachheitsbasierten Entwurf berücksichtigte und damit zu invertierende Streckendynamik auszuwählen ist. Zudem überzeugt der Regler B durch die im geschlossenen Regelkreis erzielten Resultate.

5 Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung

Aus der stetigen Weiterentwicklung der zahlreichen bestehenden Anwendungsfelder der Regelungstechnik sowie der durch das Voranschreiten verschiedener Forschungsgebiete begründeten Erschließung neuartiger Anwendungsbereiche resultieren zunehmend komplexere regelungstechnische und systemanalytische Aufgabenstellungen. Die erfolgreiche Bearbeitung verschiedener aktueller und zukünftiger Problemstellungen basiert nicht zuletzt auf einem ausreichend tiefgreifenden Systemverständnis und erfordert daher in einem zunehmenden Maße die Verwendung problemorientierter mathematischer Systembeschreibungen in gegebenenfalls komplexen Systemklassen sowie die Anwendung angemessener mathematischer Werkzeuge. Als ein Beweggrund für diese Arbeit sei in diesem Kontext die zunehmende Bedeutung sogenannter intelligenter Werkstoffe und die damit vielfach einhergehende Notwendigkeit unendlich-dimensionaler Systembeschreibungen genannt.

Die vorliegende Arbeit thematisiert ein methodisches Vorgehen zur modellbasierten Synthese hochperformanter robuster endlich-dimensionaler Ausgangsrückführungen für eine Klasse unendlich-dimensionaler Systeme mit unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren sowie die exemplarische Umsetzung des propagierten Vorgehens anhand der Regelung eines trimorphen Biegewandlers. Kennzeichnend für die dargestellte Vorgehensweise ist die theoretisch fundierte Verknüpfung der mathematisch rigorosen Theorie unendlich-dimensionaler Systeme einerseits mit den ausgereiften, praxiserprobten sowie leicht handhabbaren Syntheseverfahren robuster endlich-dimensionaler Regler nach der \mathcal{H}_∞ - beziehungsweise der μ -Methodik andererseits.

Das aufgezeigte Verfahren beruht auf einer problemorientierten Auswahl der mathematischen Repräsentation der Strecke im Rahmen einer umfangreichen Klasse unendlich-dimensionaler Systeme und der daran anschließenden Systemanalyse sowie der weiterführenden Klassifizierung des Systemverhaltens unter Anwendung der geeigneten systemtheoretischen Methoden und Werkzeuge unendlich-dimensionaler Systeme. Die Verwendung adäquater mathematischer Methoden zur Repräsentation und zur Analyse einer unendlich-dimensionalen Strecke dient der Erlangung eines ausreichend tiefgreifenden Systemsverständnisses, um darauf aufbauend eine theoretisch untermauerte und konsistente Auswahl von Approximationsverfahren, Unsicherheitsbeschreibungen und Reglersyntheseverfahren zu erlauben und damit letztendlich die Synthese leistungsstarker endlich-dimensionaler Regler zu ermöglichen.

Die Ausführungen innerhalb dieser Arbeit beziehen sich stets auf deterministische lineare zeitinvariante und dabei entweder auf endlich- oder unendlich-dimensionale Systeme. In Ermangelung einer geschlossenen Theorie zur Behandlung allgemeiner unendlich-dimensionaler Systeme erfolgt deren Betrachtung klassenbasiert. Eine vergleichende Gegenüberstellung relevanter Aspekte der Theorie ausgewählter Klassen unendlich-dimensionaler Systeme mit beschränkten Ein-

/Ausgangsoperatoren und der wohlbekannten Theorie unendlich-dimensionaler Systeme bietet dabei einleitend einen bequemen Zugang zum Unendlich-dimensionalen.

Um die Korrektgestelltheit der betrachteten unendlich-dimensionalen Systeme zu gewährleisten, begründen die Betrachtungen zu ungezwungenen Systemen im Zeitbereich die Fokussierung auf Systeme, deren Systemoperator infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem zugeordneten Zustandsraum ist. Zur Überprüfung, ob ein Systemoperator den Anforderungen an den infinitesimalen Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe genügt, werden das Hille-Yosida-Theorem und das Lumer-Phillips-Theorem eingeführt. Im Hinblick auf das Beispielsystem werden für diagonalisierbare Systemoperatoren aus den Erzeuger-Theoremen einfach handhabbare notwendige und hinreichende Bedingungen abgeleitet, unter denen derartige Operatoren jeweils der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf dem Zustandsraum sind. Die Erkenntnisse aus der Betrachtung ungezwungener unendlich-dimensionaler Systeme erlauben eine korrekt gestellte Formulierung des ungezwungenen Beispielsystems im Zustandsraum.

Im Fall des Beispielsystems erweist sich der Eingangoperator als unbeschränkt im Hinblick auf den Zustandsraum des ungezwungenen Systems. Dieser Tatsache wird durch die Einführung der Pritchard-Salamon-Klasse Rechnung getragen, die eine Berücksichtigung im gewissen Rahmen unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren erlaubt. Damit wird eine Systemklasse zugelassen, die nicht nur die Formulierung des Beispielsystems, sondern auch zahlreicher weiterer praktisch relevanter unendlich-dimensionaler Systeme erlaubt. Gleichzeitig existiert zu Pritchard-Salamon-Systemen eine sowohl umfangreiche als auch ausgereifte Theorie, die wesentliche systemtheoretischer Aspekte abdeckt und dabei vielfach klare Analogien zum endlich-dimensionalen Fall aufweist.

Durch das Zulassen unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren eröffnet sich die Möglichkeit, eine große Anzahl unendlich-dimensionaler Systeme zu berücksichtigen. Allerdings erfordert die Berücksichtigung allgemeinerer Systemklassen eine Reihe mathematischer Generalisierungen. Vor allem liegt der Darstellung von Pritchard-Salamon-Systemen anstelle eines einzelnen Zustandsraums eine Raumskala zugrunde, wobei die Systemeigenschaften im Allgemeinen nicht auf allen Räumen der Raumskala übereinstimmen. Lediglich für reguläre Pritchard-Salamon-Systeme kann die Übereinstimmung relevanter Eigenschaften auf allen Räumen der zugrunde liegenden Raumskala stets garantiert werden.

Mit der Formulierung des Beispielsystems als reguläres Pritchard-Salamon-System wird der Nachweis essentieller Systemeigenschaften, wie beispielsweise der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu einer bedeutsamen Klasse von Eingangssignalen und der Existenz verschiedener äquivalenter mathematischer Realisierungsformen, durch einen Zugehörigkeitsnachweis erbracht. Da in den zur Verfügung stehenden Quellen keine Formulierung eines zum Beispielsystem identischen Euler-Bernoulli-Balkens in der Pritchard-Salamon-Klasse nachgewiesen werden konnte, wird angenommen, dass innerhalb dieser Arbeit erstmals die explizite Formulierung exakt dieser Systemdynamik innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse vorgenommen wird. Diese Formulierung als reguläres Pritchard-Salamon-System stützt sich auf die eigens für den Spezialfall diagonalisierbarer Systemoperatoren eingeführten Kriterien, auf Basis derer zudem die Nuklearität des Hankel-

Operators des Beispielsystems gezeigt wird. Die mathematische Realisierung des Beispielsystems wird durch die Parametrierung zugeordneter Übertragungsfunktionen auf Basis von Messungen des Frequenzganges des realen trimorphen Biegewandlers komplettiert.

Anschließend schaffen die Ausführungen zur Systemanalyse unendlich-dimensionaler Systeme eine Grundlage für den Nachweis weiterer bedeutsamer Systemeigenschaften des Beispielsystems und bilden damit die Basis zur Erlangung eines hinreichenden Systemverständnisses. Die theoretischen Grundlagen werden dabei in einem Umfang eingeführt, der insbesondere die Analyse des Beispielsystems erlaubt. Eingeleitet wird die Systemanalyse durch die Spektralanalyse des Beispielsystems, die im Wesentlichen eine Lösung des Eigenwertproblems des Systemoperators und des adjungierten Systemoperators umfasst und somit auch eine Bestimmung der zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren beinhaltet. Wichtigste Erkenntnis aus der Spektralanalyse ist die Zugehörigkeit des betrachteten Systemoperators zur Klasse der diagonalisierbaren Operatoren und dementsprechend die Existenz einer Basis des Zustandsraums des ungezwungenen Beispielsystems aus den Eigenvektoren des Systemoperators. Die Diagonalisierbarkeit des Systemoperators führt auf zahlreiche Vereinfachungen die nahezu jegliche systemtheoretischen Aspekte betreffen. Insbesondere lassen sich für Systeme mit diagonalisierbarem Systemoperator Generalisierungen der aus dem Endlich-dimensionalen bekannten modalen Konzepte anwenden. Die im Unendlich-dimensionalen anwendbaren modalen Konzepte betreffen beispielsweise die Systemdarstellung, den Nachweis der Korrektgestelltheit, die Stabilitätsanalyse sowie die Untersuchung der Steuer- und Beobachtbarkeit beziehungsweise der Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit von Systemen.

Auf Basis der Erkenntnisse aus der Spektralanalyse des Beispielsystems reduziert sich der Nachweis, dass der zugehörige diagonalisierbare Systemoperator eine stark stetige Halbgruppe auf dem Zustandsraum erzeugt, auf eine Betrachtung der Realteile der zugehörigen Eigenwerte. Da das Beispielsystem ein reguläres Pritchard-Salamon-System ist, stimmt das Spektrum des Systemoperators mit dem seiner Erweiterung überein. Im Fall des Beispielsystems führt die festgelegte Parametrierung für alle Eigenwerte des Systemoperators auf einen jeweils echt negativen Realteil. Dementsprechend erzeugt der Systemoperator eine stark stetige und zudem kontraktive Halbgruppe auf dem Zustandsraum. Aufgrund der Diagonalisierbarkeit des betrachteten Systemoperators ist die zugeordnete Halbgruppe explizit mittels einer Reihendarstellung darstellbar.

In Analogie zum Endlich-dimensionalen beschäftigt sich die Stabilitätsanalyse unendlich-dimensionaler Halbgruppen-Regelsysteme mit dem asymptotischen Verhalten der jeweils zugeordneten stark stetigen Halbgruppe für große Zeiten. Eine weiterführende Charakterisierung der stark stetigen Halbgruppe des Beispielsystems erlaubt an dieser Stelle den Schluss, dass die Wachstumsgrenze der stark stetigen Halbgruppe des Beispielsystems mit der einheitlichen Spektralschranke des Systemoperators korrespondiert. Als Konsequenz dieser für allgemeine unendlich-dimensionale Systeme nicht zutreffenden Übereinstimmung lässt sich für das Beispielsystem die exponentielle Stabilität allein aus der Lage der Eigenwerte des Systemoperators folgern. Da es sich bei dem betrachteten System um ein reguläres Pritchard-Salamon-System handelt, gilt die exponentielle Stabilität auf allen Räumen der verwendeten Raumskala. Als direkte Konsequenz der exponentiellen Stabilität des Beispielsystems ist dessen zulässige Stabilisierbarkeit und zulässige Detektierbarkeit

mittels einer jeweils trivialen Rückführung festzustellen. Eine Erkenntnis, die insbesondere Auswirkung auf die im Zusammenhang mit den hier verwendeten Reglersyntheseverfahren wichtigen Aussagen zur Existenz stabilisierender endlich-dimensionaler Regler und der Äquivalenz zwischen der Ein-/Ausgangsstabilität und exponentiellen Stabilität des Beispielsystems hat.

Die Abhandlungen zur Steuer- und Beobachtbarkeit des Beispielsystems beschränken sich in erster Linie auf den Aspekt der Steuerbarkeit, während die Aussagen zur Beobachtbarkeit auf der Dualität beruhen. Eine Überprüfung notwendiger Bedingungen zeigt für das Beispielsystem den praktisch eher unbedeutenden Mangel an exakter Steuerbarkeit. Gleichzeitig wird die für alle praktischen Belange an dieser Stelle ausreichende approximative Steuerbarkeit des Beispielsystems nachgewiesen.

Vor der eigentlichen Reglersynthese wird die Verwendung der \mathcal{H}_∞ - beziehungsweise der μ -Methodik zum Zwecke des Reglerentwurfs begründet. Gestützt auf einen Überblick über die Literatur zum Thema direkter \mathcal{H}_∞ -Ansätze und zur Existenz stabilisierender endlich-dimensionaler Regler schließt sich die Begründung für die Verwendung indirekter Ansätze an. Die Entscheidung zugunsten der indirekten Ansätze auf Basis der beiden robusten Reglersyntheseverfahren begründet sich in der einfachen Handhabbarkeit sowie der praktisch nachgewiesenen Funktionalität der mit diesen Syntheseverfahren entworfenen Regler. Die erfolgreiche Synthese hoch performanter Regler setzt neben der Wahl eines geeigneten Reglersyntheseverfahrens auch die problemorientierte und konsistente Wahl eines Approximationsverfahrens sowie die Formulierung einer zweckmäßigen Modellschar voraus.

Die Eignung eines Approximationsverfahrens zur Erzeugung einer Folge endlich-dimensionaler Approximationen der unendlich-dimensionalen Strecke als Grundlage für die Reglersynthese wird dabei primär an der Konvergenz besagter Folge gegen die unendlich-dimensionale Strecke im Sinne der Gap-Metrik festgemacht. Als in diesem Sinne geeignetes Approximationsverfahren wird für die Unterklasse der exponentiell stabilen Pritchard-Salamon-Systeme mit diagonalisierbarem Systemoperator und endlich-dimensionalen Ein-/Ausgangsräumen als Spezialfall eines Petrov-Galerkin-Verfahrens ein modales Approximationsverfahren eingeführt. Auf Basis der Nuklearität des dem Beispielsystems zugeordneten Hankel-Operators lassen sich zu einer endlich-dimensionalen Approximation a priori Fehlerschranken unter anderem im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm angeben. Die Anwendung der modalen Approximation auf das Beispielsystem dient der Erzeugung einer endlich-dimensionalen nominellen Strecke, die zusammen mit einer Modellschar Ausgangspunkt der Reglersynthese ist. Mit dem Wissen, dass der Abstand zwischen dem unendlich-dimensionalen System und einer zugehörigen endlich-dimensionalen Approximation im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm beschränkt ist, wird die Ordnung der nominellen Strecke auf Basis eines Maßes gewählt, das Aussagekraft im Hinblick auf die zur Formulierung der Modellschar eingesetzten Unsicherheitsformulierung aufweist.

Durch dieses Vorgehen wird innerhalb des Entwurfsproblems endlich-dimensionaler Regler dem unendlich-dimensionalen Charakter der Strecke nur noch implizit durch die Berücksichtigung einer Modellschar Rechnung getragen. Die innerhalb dieser Arbeit zur Reglersynthese und zur späteren

Analyse der geschlossenen Regelkreise eingesetzten Modellscharen basieren strukturell jeweils auf einer multiplikativen Modellunsicherheit. Diese Struktur der Unsicherheitsformulierung erlaubt es, die resultierenden Modellscharen auf einfache Weise in die Entwurfsprobleme der ausgewählten Reglersyntheseverfahren zu integrieren, ohne dabei übermäßige Konservativität zu induzieren.

Im Vorfeld des Reglerentwurfs wird eine an den Regelungszielen orientierte Festlegung auf eine Regelkreisstruktur mit zwei Freiheitsgraden getroffen. Im Einklang mit dieser Struktur erfolgt die Synthese einer Modellfolgeregelung in einem einzelnen Entwurfsschritt sowohl nach der \mathcal{H}_∞ -Methodik als auch mittels der μ -Synthese. Daran schließt sich die Synthese einer Trajektorienfolgeregelung unter Verwendung einer flachheitsbasierten Vorsteuerung sowie einer mittels der μ -Synthese entworfenen Rückführung an. Die ausgewählten Syntheseverfahren gewährleisten jeweils in Kombination mit einem geeignet formulierten Entwurfsproblem a priori die robuste Stabilität des geschlossenen Regelkreises gegenüber spezifischen Modellscharen. Im Fall der μ -Synthese sind hinsichtlich berücksichtigter Modellscharen zusätzlich a priori Aussagen bezüglich der robusten Performance des geschlossenen Regelkreises möglich.

Der Entwurfsprozess wird durch eine abschließende Analyse aller aus der Verwendung der synthetisierten Regler resultierenden Regelkreise hinsichtlich maßgeblicher nomineller und robuster Regelkreiseigenschaften sowie ihres Verhaltens im Zeitbereich vervollständigt. Der maßgebliche Nachweis für die Eignung des vorgeschlagenen, weitestgehend theoretisch geschlossenen Vorgehens sowie für die Leistungsfähigkeit der resultierenden Regler erfolgt durch die Anwendung der jeweiligen Regler auf die reale Strecke. Dabei belegen die bei der Regelung des realen Beispielsystems erzielten Resultate exemplarisch die durch das hier propagierte theoretisch fundierte und problemorientierte Vorgehen im geschlossenen Regelkreis schlussendlich zu erzielende Leistungsfähigkeit. Die abschließende Gegenüberstellung der verschiedenen verwendeten Regler und der jeweils im geschlossenen Regelkreis erzielten Resultate zeigt die besondere Eignung der mittels der μ -Synthese entworfenen Modellfolgeregelung sowie der flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelung zur Regelung des Beispielsystems.

5.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit bietet verschiedenste Anknüpfungspunkte, die zukünftig eine Fortführung der diskutierten Thematik in unterschiedliche Richtungen erlauben. Hierbei sind sowohl theoretisch als auch ausgesprochen praktisch motivierte Weiterführungen denkbar.

Aus dem theoretischen Blickwinkel stellt sich beispielsweise die Frage, inwieweit für die betrachtete Systemklasse und für die zum Zweck der Reglersynthese formulierten Entwurfsprobleme eine Generalisierung der Resultate aus [Mor01] nachzuweisen ist, also ob und unter welchen Bedingungen die auf Basis endlich-dimensionaler Approximationen entworfenen endlich-dimensionalen \mathcal{H}_∞ -suboptimalen Regler im geschlossenen Regelkreis die Performance eines entsprechenden unendlich-dimensionalen Reglers beliebig annähern.

Abgesehen von einem rigorosen Beweis für die Leistungsfähigkeit der eingesetzten Regler sind weitere exemplarische Nachweise für die Eignung des vorgeschlagenen Vorgehens zur Reglersynthese erstrebenswert. Für eine nachhaltige Unterstreichung der praktischen Relevanz des vorgeschlagenen Vorgehens ist dieses auf verschiedene unendlich-dimensionale Systeme mit unterschiedlichen Eigenschaften, aus diversen Domänen und mit variierender Komplexität in der Simulation und vor allem auch der Realität anzuwenden. Im Fall komplexerer unendlich-dimensionaler Systeme ist in der Regel allerdings bereits der Nachweis der Zugehörigkeit zu einer bestimmten Systemklasse als nicht trivial zu erwarten.

Im Allgemeinen ist der Systemoperator unendlich-dimensionaler Systeme nicht diagonalisierbar und selbst im Fall diagonalisierbarer Systemoperatoren ist die Bestimmbarkeit der Eigenwerte und Eigenvektoren des Systemoperators nicht selbstverständlich. Eine wesentliche Generalisierung des gezeigten Vorgehens ist daher durch den Verzicht auf die im Laufe dieser Arbeit verschiedentlich angenommene Diagonalisierbarkeit des Systemoperators beziehungsweise auf die Voraussetzung der expliziten Kenntnis der Eigenwerte und Eigenvektoren des Systemoperators zu erzielen. In diesem Zusammenhang ist die Berücksichtigung von Approximationsverfahren denkbar, die keine explizite Kenntnis der Eigenvektoren des unendlich-dimensionalen Systems erfordern, aber dennoch die geforderten Konvergenzeigenschaften aufweisen. Dazu sei im Allgemeinen auf die Betrachtung unterschiedlicher Approximationsverfahren in [Cur03; CM09] verwiesen. Mit besonderem Bezug zu Galerkin-Verfahren seien beispielsweise [Ito90] oder [XB99a] genannt und im Hinblick auf die Verwendung der „Proper Orthogonal Decomposition“ (POD) seien [Atw00; AK04] hervorgehoben.

Die Erzeugung einer endlich-dimensionalen Approximation mit einer für den Reglerentwurf ausreichenden Güte kann, in Abhängigkeit von der spezifischen unendlich-dimensionalen Strecke, dem verwendeten Approximationsverfahren und nicht zuletzt auch von den Regelungszielen, gegebenenfalls auf eine Approximation hoher Ordnung führen. In diesem Zusammenhang ist ein bekannter und vielfach diskutierter Nachteil der innerhalb dieser Arbeit zur Reglersynthese eingesetzten Verfahren der unmittelbare Zusammenhang der Ordnung resultierender Regler zur Ordnung der im Entwurfsproblem berücksichtigten erweiterten Strecke. Die Ansätze zur Bestimmung \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler fester Ordnung oder vorgegebener Struktur ([Bur+06; AN06]) sowie die entsprechenden Generalisierungen der μ -Synthese ([Apk11]) heben diesen Nachteil hinsichtlich der hohen Reglerordnung nahezu vollständig auf. Die letztgenannten Verfahren weisen zudem nicht die Nachteile auf, die sich in Zusammenhang mit einer nachträglichen Reduktion der Ordnung eines Reglers ergeben. Algorithmen zur Optimierung vorgegebener Regelkreisstrukturen hinsichtlich der \mathcal{H}_∞ -Norm finden sich beispielsweise in dem freien Programmpaket HIFOO [Bur+06; GMO08; Gum+09] oder im kommerziellen Rahmen innerhalb von Matlab [GA11b; GA11a].

In der Literatur sind bereits verschiedentlich Anwendungen derartiger Synthese-Algorithmen zum Reglerentwurf für unendlich-dimensionale Systeme bekannt [Rob+10; HH11; Guy+13]. Eine Kombination des hier angewandten Vorgehens mit den Algorithmen zur Berechnung strukturell beschränkter \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler beziehungsweise einer entsprechenden Variante der μ -Synthese scheint ohne Weiteres möglich. Neben der praktischen Umsetzung des Entwurfs strukturell beschränkter robuster Regler stellt sich in diesem Kontext aus dem theoretischen Blickwinkel die

Frage nach der minimalen Ordnung robust stabilisierender beziehungsweise robust performanter Regler. Eine Untersuchung dieser Fragestellung ist gegebenenfalls auf Basis der Kombination der Methoden zum Entwurf strukturell beschränkter robuster Regler mit den Methoden der Mixed-Integer-Optimierung denkbar.

Eine interessante Erweiterung des hier geschilderten Vorgehens wäre ferner durch die gleichzeitige Berücksichtigung unterschiedlicher Optimalitätskriterien im Zielfunktional des Entwurfsproblems zu erzielen. Zu diesem Zweck bieten sich in Kombination mit der Optimalität im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm auch Kriterien bezüglich der H_2 -Norm oder der L_1 -Optimalität an. Wobei insbesondere letzteres eine weitere Möglichkeit zur Berücksichtigung von Regelungszielen im Zeitbereich eröffnet. Im Hinblick auf den Entwurf robuster Regler ist zudem die Frage nach einer zielführenden Unsicherheitsbeschreibung nicht unerheblich. Neben der verwendeten unstrukturierten Unsicherheitsbeschreibung ist die Verwendung einer Kombination aus strukturierten und unstrukturierten Unsicherheiten zur Steigerung der Leistungsfähigkeit resultierender Regler denkbar.

Die Regelung des Beispielsystem beruht auf der Messung der Auslenkung des trimorphen Biegewandlers mittels eines Laser-Triangulators. Da der trimorphe Biegewandler über zwei unabhängige Piezokeramiken verfügt, ist gegebenenfalls eine dieser Piezokeramiken unter Ausnutzung des direkten piezoelektrischen Effekts als Sensor zu verwenden, während die verbleibende Keramik weiterhin als Aktor dient. Mit einer derartigen Konfiguration des Beispielsystem ist gegebenenfalls die gezielte Vorgabe einer Führungsgröße ohne eine zusätzliche externe Messeinrichtung zu realisieren. Die Unabhängigkeit von einer zusätzlichen Messeinrichtung würde insgesamt die Einsatzmöglichkeiten des Beispielsystems in Kombination mit einer entsprechenden Regelung erheblich vergrößern.

A Mathematische Modellierung des trimorphen Biegewandlers

A.1 Bewegungsgleichungen des trimorphen Biegewandlers

In diesem Abschnitt wird basierend auf [BIW95; BSY96] die transversale Dynamik eines sogenannten trimorphen Biegewandlers unter der Annahme geringer elastischer Verformungen auf Basis der Euler-Bernoulli-Balkentheorie mathematisch beschrieben. Neben der Dynamik des ungezwungenen Biegewandlers finden dabei zusätzlich externe elektrische Spannungen und die in Folge dessen durch den inversen piezoelektrischen Effekt verursachten Kräfte und Momente Berücksichtigung. Eine Prinzipskizze des trimorphen Biegewandlers findet sich in Abbildung A.1 und Abbildung 1.1c, ferner zeigen Abbildung 1.1a und 1.1b Aufnahmen des verwendeten trimorphen Biegewandlers.

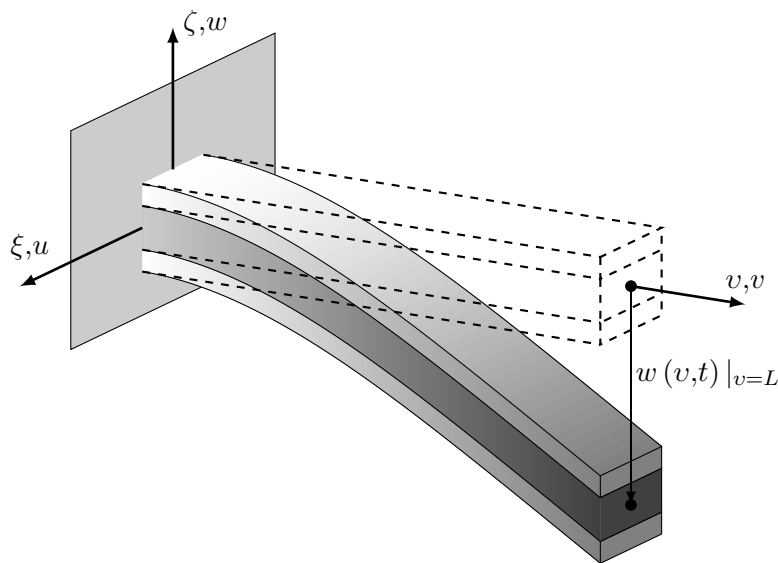


Abbildung A.1: Prinzipskizze des trimorphen Biegewandlers.

Eine Betrachtung der allgemeineren dreidimensionalen Schalentheorie, findet sich beispielsweise in [Lei73; Soe93] beziehungsweise unter Berücksichtigung der aktiven Effekte piezoaktiver Materialien in [BSY96; Rog94]. Ein Ansatz zur Behandlung mehrschichtiger Biegewandler, also sogenannter Multilayer-Aktoren, ist in [Bal06] zu finden.

A.1.1 Kinetik

Für die Ermittlung der kinetischen Zusammenhänge wird ein kartesisches Koordinatensystem mit den unabhängigen Koordinaten ξ, v, ζ entsprechend der Darstellung in Abb. A.2 angenommen. Die Betrachtungen schränken sich auf ein ebenes Problem in der v - ζ -Ebene ein, die Auslenkung $u(v, t)$ bezüglich der ξ -Achse wird dabei vernachlässigt.

Die kinetischen Zusammenhänge bezüglich der translatorischen Bewegung der verbleibenden Koordinaten ergeben sich aus den Kräftebilanzen am infinitesimalen Balkenelement gemäß Abb. A.2

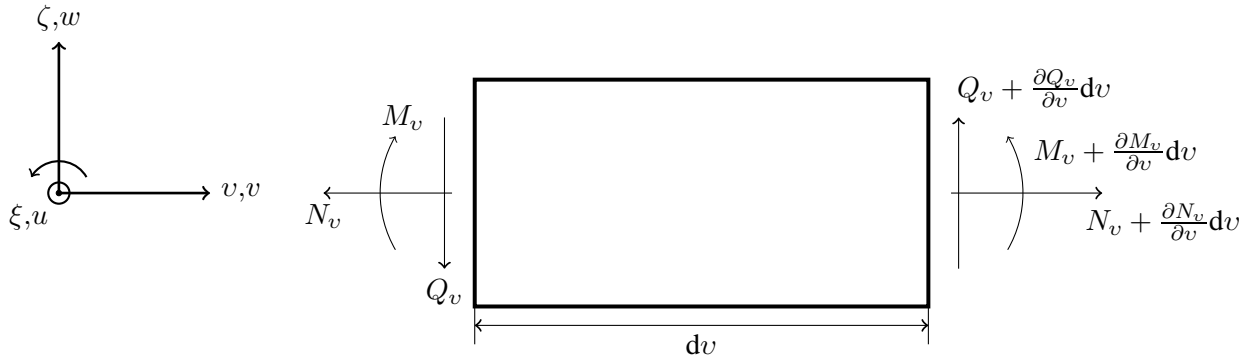


Abbildung A.2: Kartesisches Koordinatensystem der Modellbildung und Kräfte und Momente am infinitesimalen Balkenelement.

zu

$$\rho b h \frac{\partial^2 v(v, t)}{\partial t^2} = b \frac{\partial N_v}{\partial v} + b q_v, \quad (\text{A.1})$$

$$\rho b h \frac{\partial^2 w(v, t)}{\partial t^2} = b \frac{\partial Q_v}{\partial v} + b q_\zeta. \quad (\text{A.2})$$

Ursächlich für eine translatorische Beschleunigung sind neben den örtlichen Änderungen der Normal- und Querkraft $\frac{\partial N_v}{\partial v}, \frac{\partial Q_v}{\partial v}$, die längenbezogen in N/m^2 angegeben werden, der Anteil der äußeren flächenbezogenen Kräfte q_i in die entsprechenden Richtungen ($i \in \{v, \zeta\}$).

Die Vernachlässigung der rotatorischen Trägheitsterme gemäß der Euler-Bernoulli-Balkentheorie führt auf die Bilanz der Momentenintensität bezüglich einer Drehung um die ξ -Achse unter Einfluß der äußeren flächenbezogenen Momente m_ξ gilt

$$0 = -M_v + \left(M_v + \frac{\partial M_v}{\partial v} dv \right) + \left(Q_v + \frac{\partial Q_v}{\partial v} dv \right) dv + m_\xi dv. \quad (\text{A.3})$$

Der unter Vernachlässigung der Differentiale zweiter Ordnung bestimmte Ausdruck für die Querkraft

$$-Q_v = \frac{\partial M_v}{\partial v} + m_\xi \quad (\text{A.4})$$

wird in der translatorischen Gleichungen (A.2) verwendet und führt mit der konstanten Dichteverteilung $\mu = \rho b h$ auf

$$\mu \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial t^2} = b \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial M_v}{\partial v} - m_\xi \right) + b q_\zeta. \quad (\text{A.5})$$

Die translatorischen Beschleunigungen in Abhängigkeit von den ursächlichen Kräften sind somit durch die Zusammenhänge (A.1) und (A.5) beschrieben. Auf weitere Verallgemeinerungen, wie beispielsweise die Einführung ortsabhängiger Koeffizienten, wird an dieser Stelle verzichtet.

A.1.2 Kinematik

Neben den kinetischen Betrachtung ist es notwendig, ein Modell der Kinematik festzulegen. Der folgende Ansatz für den Balken resultiert aus der Hypothese nach Bernoulli. Demnach verbleiben senkrecht zur neutralen Faser des Balkens verlaufende Balkenquerschnitte unter Einfluss geringer elastischer Verformung weiterhin senkrecht zur neutralen Faser. Durch die Annahme geringer Ver-

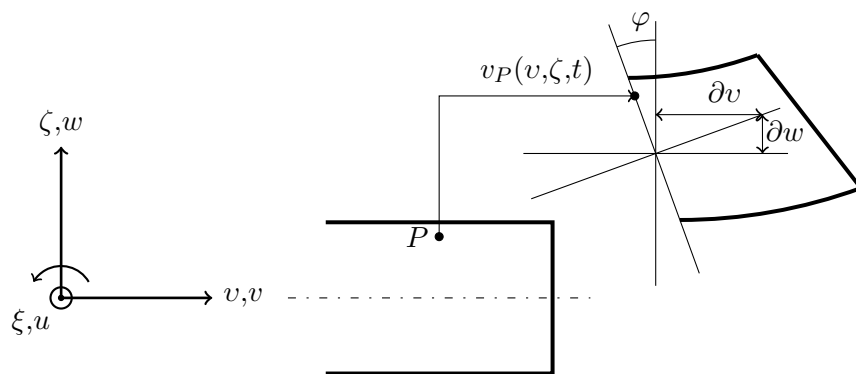


Abbildung A.3: Verschiebung $v_P(v, \zeta, t)$ eines Punktes P .

drehwinkel und die Verwendung der bekannten Approximationen der Winkelfunktionen bezüglich kleiner Winkel, gilt für die Verschiebung $v_P(v, \zeta, t)$ eines beliebigen Punktes P gemäß Abb. A.3 auf dem Balken in v -Richtung

$$v_P(v, \zeta, t) = v(v, t) - \zeta \frac{\partial w(v, t)}{\partial v}. \quad (\text{A.6})$$

Demnach führt ein positiver Winkel $\frac{\partial w(v, t)}{\partial v}$ dazu, dass ein Punkt mit positiver ζ -Koordinate in negative v -Richtung verschoben wird.

In Folge der Verformung ändert sich die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten auf dem Balken. Die Dehnung ε_v bezeichnet das Verhältnis von Längenänderung zu ursprünglicher Länge. Für

kleine Deformationen folgt für die dimensionslose Dehnung um einen Punkt P

$$\begin{aligned}\varepsilon_v &= \frac{\partial v_P(v, \zeta, t)}{\partial v} \\ &= \frac{\partial v(v, t)}{\partial v} - \zeta \frac{\partial^2 w(v, t)}{\partial v^2}.\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Für den dreischichtigen Biegewandler wird eine stetige Dehnung über die Grenzen der Schichten, also über die gesamte Höhe des Piezoaktors angenommen ([BSY96] (S. 74)).

Die in (A.1) sowie (A.5) auftretenden inneren Kräfte resultieren aus den mechanischen Spannungen im Biegewandler. Die Verknüpfung der Spannungen mit den Dehnungen wird mittels der Elastizitätsgesetze beschrieben. Zusätzlich wird eine interne Dämpfung in Form der sogenannten Kelvin-Voigt-Dämpfung eingeführt. Demnach ist die Spannung nicht allein proportional zur Dehnung, sondern zusätzlich auch zur zeitlichen Änderung der Dehnung. Diese Überlegung ordnet jeder Faser des Piezoaktors neben der Federeigenschaft zusätzlich eine Dämpfungseigenschaft zu.

Aufgrund der unterschiedlichen Materialkonstanten der verschiedenen Schichten des trimorphen Biegewandlers sind die zu erwartenden mechanischen Spannungen im Gegensatz zur Dehnung nicht zwangsläufig stetig. Die Normalspannung des einachsigen Spannungszustandes wird abschnittsweise durch

$$\sigma_v = E_i \varepsilon_v + d_i^{kv} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

definiert. Für die zeitliche Änderung der Dehnung um einen Punkt folgt aus (A.7)

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(v, t)}{\partial t \partial v} - \zeta \frac{\partial^3 w(v, t)}{\partial v^2 \partial t}. \quad (\text{A.9})$$

Weitere auf Basis operatortheoretischer Ansätze formulierte Dämpfungsmodelle finden sich beispielsweise in [Ban+88; BWF89; Ban90; BIW95; LGM99] oder in [JM05], [JMT07].

A.1.3 Innere Kräfte und Momente

Aus der Integration der Normalspannung in ζ -Richtung über die Höhe des gesamten Piezoaktors ergibt sich die Normalkraft N_v . Um die resultierenden Momente zu berechnen, wird die Normalspannung bei der Integration mit der Entfernung ζ von der neutralen Faser gewichtet

$$\begin{pmatrix} N_v \\ M_v \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_{Gfk}}{2} - h_{Pk,u}}^{\frac{h_{Gfk}}{2} + h_{Pk,o}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta \end{pmatrix} \sigma_v d\zeta. \quad (\text{A.10})$$

Es ist zu erkennen, dass eine positive mechanische Spannung in Richtung der v -Achse einen positiven Beitrag zur längenbezogenen Normalkraft in v -Richtung liefert. Darüber hinaus bedingt eine

positive Spannung oberhalb der Mittelfaser ($\zeta > 0$) einen negativen Beitrag zur Momentenintensität um die ξ -Achse. Unter Berücksichtigung der Verschiebungen (A.7) sowie der Spannungen (A.8) folgt aus (A.10)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_v \\ M_v \end{pmatrix} = & \int_{-\frac{h_{\text{Gfk}}}{2}}^{\frac{h_{\text{Gfk}}}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta \end{pmatrix} E_{\text{Gfk}} \left(\frac{\partial v(v,t)}{\partial v} - \zeta \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right) + d_{\text{Gfk}}^{\text{kv}} \left(\frac{\partial^2 v(v,t)}{\partial t \partial v} - \zeta \frac{\partial^3 w(v,t)}{\partial v^2 \partial t} \right) d\zeta \\ & + \int_{\frac{h_{\text{Gfk}}}{2}}^{\frac{h_{\text{Gfk}}}{2} + h_{\text{Pk,o}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta \end{pmatrix} E_{\text{Pk,o}} \left(\frac{\partial v(v,t)}{\partial v} - \zeta \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right) + d_{\text{Pk,o}}^{\text{kv}} \left(\frac{\partial^2 v(v,t)}{\partial t \partial v} - \zeta \frac{\partial^3 w(v,t)}{\partial v^2 \partial t} \right) d\zeta \\ & + \int_{-\frac{h_{\text{Gfk}}}{2}}^{-\frac{h_{\text{Gfk}}}{2} - h_{\text{Pk,u}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta \end{pmatrix} E_{\text{Pk,u}} \left(\frac{\partial v(v,t)}{\partial v} - \zeta \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right) + d_{\text{Pk,u}}^{\text{kv}} \left(\frac{\partial^2 v(v,t)}{\partial t \partial v} - \zeta \frac{\partial^3 w(v,t)}{\partial v^2 \partial t} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Für die beiden piezoaktiven Schichten werden im Folgenden vereinfachend verschiedene Materialkonstanten als identisch vorausgesetzt, es gilt

$$h_{\text{Pk,o}} = h_{\text{Pk,u}} = h_{\text{Pk}}, \quad E_{\text{Pk,o}} = E_{\text{Pk,u}} = E_{\text{Pk}}, \quad d_{\text{Pk,o}}^{\text{kv}} = d_{\text{Pk,u}}^{\text{kv}} = d_{\text{Pk}}^{\text{kv}}. \quad (\text{A.11})$$

Im Hinblick auf eine kompaktere Notation werden die Abkürzungen $a_{\text{Pk}} = (h/2 + h_{\text{Pk,o}})^2 - (h/2)^2$ sowie $\tilde{a}_{\text{Pk}} = (h/2 + h_{\text{Pk,o}})^3 - (h/2)^3$ eingeführt. Vereinfachend werden die Breite der piezoaktiven Schichten sowie die Breite der glasfaserverstärkten Kunststoffschicht des trimorphen Biegewandlers als identisch angenommen und mit b bezeichnet. Die Lage der piezoaktiven Schichten wird mittels einer Ortsfunktion (Belegungsfunktion) mathematisch beschrieben, dabei wird für beide piezoaktiven Schichten eine einheitliche Belegungsfunktion

$$\chi(v) = \begin{cases} 1, & v^l \leq v \leq v^r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

vorausgesetzt. Die Belegungsfunktion nimmt auf dem eindimensionalen örtlichen Gebiet den Wert Eins überall dort an, wo die piezoaktiven Schichten angebracht sind, andernorts ist die Belegungsfunktion identisch Null. Eindeutig festgelegt wird die Belegungsfunktion durch den linken und rechten Rand v^l und v^r der piezoaktiven Schichten.

Nach der Integration liefern die linear eingehende Anteile der glasfaserverstärkten Kunststoffschicht aufgrund ihrer symmetrischen Anordnung zur Mittelfaser keinen Beitrag zur Normalkraft in v -Richtung. Durch die Symmetrie der Geometrie konstanten zur Mittelfaser sowie die identischen Materialkonstanten der piezoaktiven Schichten entfallen die Kopplungsterme zwischen der Auslenkung in v und ζ -Richtung in den Ausdrücken der inneren Kräfte und Momente. Eine kompaktere Notation sowie eine Verallgemeinerung ergibt sich durch die Verwendung allgemeiner ortsabhän-

giger Koeffizienten. Es gilt

$$bN_v = \tilde{E}_{\text{ges}}(v) \frac{\partial v(v,t)}{\partial v} + \tilde{d}_{\text{ges}}^{\text{kv}} \frac{\partial^2 v(v,t)}{\partial t \partial v}, \quad (\text{A.13})$$

$$bM_v = \tilde{EI}_{\text{ges}}(v) \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} + \tilde{dI}_{\text{ges}}^{\text{kv}} \frac{\partial^3 w(v,t)}{\partial v^2 \partial t}, \quad (\text{A.14})$$

mit $\tilde{E}_{\text{ges}}(v) = (E_{\text{Gfk}} h_{\text{Gfk}} + 2E_{\text{Pk}} h_{\text{Pk}}) b \chi(v)$, $\tilde{d}_{\text{ges}}^{\text{kv}}(v) = (d_{\text{Gfk}}^{\text{kv}} h_{\text{Gfk}} + 2d_{\text{Pk}}^{\text{kv}} h_{\text{Pk}}) b \chi(v)$ und den, in Anlehnung an das Flächenträgheitsmoment in [BSY96] (S. 94) eingeführten, Koeffizienten

$$\tilde{EI}_{\text{ges}}(v) = \frac{E_{\text{Gfk}} h_{\text{Gfk}}^3}{12} + \frac{2}{3} E_{\text{Pk},o} \tilde{a}_{\text{Pk}} \chi(v) b \quad \text{und} \quad \tilde{dI}_{\text{ges}}^{\text{kv}}(v) = \frac{d_{\text{Gfk}}^{\text{kv}} h_{\text{Gfk}}^3}{12} + \frac{2}{3} d_{\text{Pk},o}^{\text{kv}} \tilde{a}_{\text{Pk}} \chi(v) b.$$

An dieser Stelle wird in Bezug auf den trimorphen Biegewandler angenommen, dass die piezoaktiven Schichten den gesamten Balken bedecken und damit $v^l = 0$ sowie $v^r = L$ gilt. Aus dieser Annahme folgt $\chi(v) = 1$ für $v \in \bar{\Omega}$. Aufgrund dieser Annahme lassen sich im Folgenden die voranstehend eingeführten Koeffizienten als ortsunabhängig annehmen. Es gilt $\tilde{E}_{\text{ges}}(v) = \tilde{E}_{\text{ges}}$, $\tilde{d}_{\text{ges}}^{\text{kv}}(v) = \tilde{d}_{\text{ges}}^{\text{kv}}$, $\tilde{EI}_{\text{ges}}(v) = \tilde{EI}_{\text{ges}}$ und $\tilde{dI}_{\text{ges}}^{\text{kv}}(v) = \tilde{dI}_{\text{ges}}^{\text{kv}}$.

A.1.4 Äußere Kräfte und Momente

Neben den passiven Einflüssen der piezoaktiven Materialien aufgrund ihrer Materialeigenschaften werden im Fall anliegender elektrischer Spannungen zusätzliche äußere Kräfte und Momente durch den inversen piezoelektrischen Effekt induziert. Zudem wird im Modell des trimorphen Biegewandlers eine äußere viskose Dämpfung berücksichtigt.

Inverser piezoelektrischer Effekt

Eine Herleitung der genannten Effekte wird beispielsweise in [BSY96] gezeigt, detailliertere Darstellungen findet sich zudem in [Hor04]. Eine elektrische Spannung $V_{\text{Pk},i}(t)$ führt an der i -ten piezoaktiven Schicht ($i \in \{o, u\}$) zu einer in alle Richtungen gleichmäßigen freien Dehnung

$$\varepsilon_{\text{Pk},i} = (\varepsilon_v)_{\text{Pk},i} = \frac{d_{\text{Pk},i}^{31}}{h_{\text{Pk},i}} V_{\text{Pk},i}(t). \quad (\text{A.15})$$

Die freie Dehnung wirkt proportional zur elektrischen Feldstärke, die hier für das homogene Feld eines Plattenkondensators angenommen wird. Neben (A.11) wird im Folgenden vereinfachend $d_{\text{Pk},o}^{31} = d_{\text{Pk},u}^{31} = d_{\text{Pk}}^{31}$ vorausgesetzt. Eine positive elektrische Spannung führt zu einer positiven Dehnung. Es wird angenommen, dass sich die i -te piezoaktive Schicht symmetrisch zu ihrer in v -Richtung liegenden Mitte $v_{\text{Pk},i}^m = \frac{v_{\text{Pk},i}^l + v_{\text{Pk},i}^r}{2}$ ausdehnt. In der piezoaktiven Schicht werden die externen mechanischen Spannungen

$$(\sigma_v)_{\text{Pk},i} = -(\varepsilon_v)_{\text{Pk},i} E_{\text{Pk},i} \quad (\text{A.16})$$

induziert ([BSY96]). Analog zu den inneren Kräften und Momenten ergeben sich die äußeren linienebezogenen Kräfte und Momente durch die Integration der externen mechanischen Spannungen.

Das Auswerten der Integrale führt unter Berücksichtigung von (A.15) sowie (A.16) auf die äußeren Kräfte und Momente in Abhängigkeit von der elektrischen Spannung

$$(bN_v)_{\text{Pk,o}} = -k_{\text{Pk}}^{\text{N}} V_{\text{Pk,o}}(t), \quad (bN_v)_{\text{Pk,u}} = -k_{\text{Pk}}^{\text{N}} V_{\text{Pk,u}}(t), \quad (\text{A.17})$$

$$(bM_v)_{\text{Pk,o}} = k_{\text{Pk}}^{\text{M}} V_{\text{Pk,o}}(t), \quad (bM_v)_{\text{Pk,u}} = -k_{\text{Pk}}^{\text{M}} V_{\text{Pk,u}}(t), \quad (\text{A.18})$$

wobei zugunsten einer kompakteren Notation $k_{\text{Pk}}^{\text{N}} = E_{\text{Pk}} b d_{\text{Pk}}^{31}$ und $k_{\text{Pk}}^{\text{M}} = \frac{1}{2} E_{\text{Pk}} b (h_{\text{Gfk}} + h_{\text{Pk}}) d_{\text{Pk}}^{31}$ gilt. Die Summe der Beiträge beider piezoaktiven Schichten wird unter der Forderung

$$V_{\text{Pk,o}}(t) = -V_{\text{Pk,u}}(t) = V_{\text{Pk}}(t)$$

gebildet, neben $(bN_v)_{\text{Pk}} = 0$ folgt

$$(bM_v)_{\text{Pk}} = 2k_{\text{Pk}}^{\text{M}} V_{\text{Pk,o}}(t) \chi(v). \quad (\text{A.19})$$

Die flächenbezogenen äußeren Kräfte aus (A.1) bzw. die flächenbezogenen äußeren Momente aus (A.5) ergeben sich aus der Änderung der linienbezogenen äußeren Kräfte beziehungsweise Momente zu $bq_v = 0$ und

$$bm_\xi = -\frac{\partial (bM_v)_{\text{Pk}}}{\partial v}. \quad (\text{A.20})$$

Die äußeren Momente aus (A.20) induzieren eine Biegung des Biegewandlers, die am linken Rand der piezoaktiven Schicht eingeleitet wird und an ihrem rechten Rand durch ein entgegengesetzt orientiertes äußeres Moment aufgehoben wird. Den Vorstellungen entsprechend, kann eine piezoaktive Schicht nur in dem von ihr belegten Bereich eine Verkrümmung bewirken. Die Bedingung $V_{\text{Pk,o}}(t) = -V_{\text{Pk,u}}(t) = V_{\text{Pk}}(t)$ bewirkt, dass eine elektrische Spannung lediglich die transversale Verschiebung beeinflusst und trägt damit zur Entkopplung der longitudinalen und der transversalen Bewegungsgleichungen bei. Eine allgemeine schematische Darstellung der elektrischen Verschaltung trimorpher Biegewandler findet sich beispielsweise in [Mat09], darüber hinaus beinhaltet [Bal07] (S. 28f) derartige Prinzipskizzen für unterschiedliche Typen von Biegewandlern.

Äußere viskose Dämpfung

Neben der internen Kelvin-Voigt-Dämpfung findet eine zusätzliche äußere viskose Dämpfung innerhalb des Modells des trimorphen Biegewandlers Berücksichtigung. Die viskose Dämpfung wird lediglich bezüglich der Auslenkung in ζ -Richtung angenommen. Der Ansatz in Abhängigkeit von der transversalen Geschwindigkeit sowie einer Dämpfungskonstanten d^v lautet

$$bq_\zeta = -d^v \frac{\partial w(v,t)}{\partial t}. \quad (\text{A.21})$$

A.1.5 Zusammenführung und Vereinfachung der Gleichungen

Ausgangspunkt für die Zusammenführung der Gleichungen sind die kinetischen Zusammenhänge gemäß (A.1) sowie (A.5). Die inneren Kräfte und Momente bestimmen sich aus (A.13) beziehungsweise (A.14). Für die äußeren Kräfte gilt $bq_v = 0$ während die äußeren Momente in Abhängigkeit

von der elektrischen Spannung durch (A.20) gegeben sind. Unter den Annahmen an die Material- und Geometriekonstanten sowie die elektrische Spannung resultieren damit die entkoppelten Bewegungsgleichungen in ihrer starken Form zur Beschreibung der transversalen $w(v,t)$ und der longitudinalen Verschiebung $v(v,t)$. Es gilt

$$\frac{\partial^2 v(v,t)}{\partial t^2} - \beta_S \frac{\partial^2 v(v,t)}{\partial v^2} - \beta_{KV} \frac{\partial^3 v(v,t)}{\partial^2 v \partial t} = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial t^2} + \alpha_S \frac{\partial^4 w(v,t)}{\partial v^4} + 2\alpha_{KV} \frac{\partial^5 w(v,t)}{\partial v^4 \partial t} + 2\alpha_V \frac{\partial w(v,t)}{\partial t} = \alpha_{In} \frac{\partial^2 \chi(v)}{\partial v^2} V_{Pk}(t) \quad (\text{A.23})$$

mit den gegenüber beiden Unabhängigen konstanten Koeffizienten $\beta_S = \mu^{-1} \tilde{E}_{ges}$, $\beta_{KV} = \mu^{-1} \tilde{d}_{ges}^{kv}$ beziehungsweise

$$\begin{aligned} \alpha_S &= \frac{\tilde{EI}_{ges}}{\mu}, & 2\alpha_{KV} &= \frac{\tilde{d}_{ges}^{kv}}{\mu}, \\ 2\alpha_V &= \frac{d^v}{\mu}, & \alpha_{In} &= \frac{2k_{Pk}^M}{\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Die Dichteverteilung μ ist per Definition von Null verschieden, der Faktor zwei vor den Dämpfungskoeffizienten wird im Hinblick auf das Eigenwertproblem des Systemoperators in Abschnitt D.1.1 eingeführt.

Im Folgenden wird die unter den genannten Voraussetzungen gültige Entkopplung der longitudinalen von der transversalen Dynamik zum Anlass genommen, um lediglich die transversale Dynamik entsprechend (A.23) zu betrachten. Die Bewegungsgleichung (A.23) beschreibt die transversale Dynamik des trimorphen Biegewandlers auf dem eindimensionalen offenen örtlichen Intervall $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ für $t > 0$.

A.1.6 Anfangsbedingungen und Randbedingungen

Eine mathematisch korrekt gestellte Beschreibung der Dynamik des trimorphen Biegewandlers setzt neben der Bewegungsgleichung (A.23) eine Beschreibung des Systemverhaltens am Rand des örtlichen und des zeitlichen Intervalls voraus.

Die Auslenkung und die zeitliche Änderung der Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$, beschrieben durch

$$w(v,0) = w_0(v), \quad \left. \frac{\partial w(v,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\partial w_0(v)}{\partial t}, \quad (\text{A.25})$$

determinieren die Anfangsbedingungen und damit den linken Rand des rechtsseitig offenen zeitlichen Intervalls.

Das Verhalten des Biegewandlers auf dem Abschluss des örtlichen Intervalls, also dessen Rand $\partial\Omega = \{0, L\}$, ist durch die Definition von vier Randbedingungen festzulegen. Die Anzahl der zu definierenden Randbedingungen entspricht der höchsten Ableitung bezüglich der örtlichen Unabhängigen innerhalb der Bewegungsgleichung (A.23). Physikalisch werden die Randbedingungen

eines Balkens im Allgemeinen durch die verschiedene Lagerungsfälle festgelegt. Eine Übersicht verschiedener Lagerungsfälle und der daraus resultierenden Randbedingungen ist beispielsweise in [Kö75] (S. 17) gegeben. In Anlehnung an den praktischen Einsatz des Biegewandlers wird eine Lagerkonfiguration entsprechend eines Kragbalkens gewählt. Während das linke Ende des Biegewandlers fest eingespannt ist, wird das rechte Ende als frei angenommen. Diese Form der einseitigen Einspannung ist in Abbildung 1.1b zu erkennen. Entsprechend der Ausführungen aus dem vorangehenden Abschnitt, werden lediglich Randbedingungen für die transversale Dynamik festgelegt.

Im Hinblick auf die Auslenkung $w(v, t)$ in ζ -Richtung bedingt die feste Einspannung am linken Rand Forderungen an die Verschiebung sowie den Verdrehwinkel

$$w(0, t) = \frac{\partial w(v, t)}{\partial v} \Big|_{v=0} = 0, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\text{A.26})$$

für das freie Ende sind das Biegemoment und die Querkraft festgelegt

$$\frac{\partial^2 w(v, t)}{\partial v^2} \Big|_{v=L} = \frac{\partial^3 w(v, t)}{\partial v^3} \Big|_{v=L} = 0, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (\text{A.27})$$

Die Gleichungen (A.26) und (A.27) beschreiben die Randbedingungen der transversalen Bewegung und werden abkürzend mit RB bezeichnet. Die wesentlichen Randbedingungen bezüglich der transversalen Bewegung RB_w sind durch die Bedingungen am linken Rand (A.26) des trimorphen Biegewandlers gegeben.

Die Dynamik des Beispielsystems lässt sich damit formal durch die Gleichungen (A.23), (A.25), (A.26) und (A.27) beschreiben. Als Lösung der damit definierten Problembeschreibung wird die Auslenkung

$$\begin{aligned} w : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (v, t) &\mapsto w(v, t) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

aufgefasst.

A.2 Schwache Formulierung der Bewegungsgleichungen

Die starke Formulierung der Bewegungsgleichungen nach (A.23) enthält im inhomogenen Term eine zweifache Differentiation der Ortsfunktion $\chi(v)$. Im Allgemeinen erlauben geringere Forderungen an die Differenzierbarkeit dieser Funktionen eine allgemeinere Problemformulierung und damit die Berücksichtigung einer breiteren Klasse an Problemen. Insbesondere erfordert eine Differentiation der an dieser Stelle durch (A.12) vorausgesetzten Ortsfunktion einen erweiterten Differentiationsbegriff. Aus diesem Grund erfolgt zunächst die Überführung der Bewegungsgleichungen in ihre schwache Form.

Für die folgenden Betrachtungen wird zwischen dem homogenen Teil der starken Formulierung der Bewegungsgleichungen des trimorphen Biegewandlers und dem inhomogenen Anteil unterschieden.

A.2.1 Homogener Teil der Bewegungsgleichungen

Zur Überführung des homogenen Anteils der transversalen Bewegungsgleichung in eine schwache Formulierung, ist es formal möglich, (A.23) mit Testfunktionen $\phi(v) \in C_0^\infty((\Omega])$ zu multiplizieren und anschließend partiell zu integrieren.

Die gebräuchliche Interpretation der schwachen Ableitung sieht allerdings eine Anwendung von Testfunktionen aus dem Abschluss von $C_0^\infty((\Omega])$ in einem geeigneten Sobolew-Raum vor ([Alt06] (S. 168ff)). Im Hinblick auf die schwache Formulierung der transversalen Bewegung wird der Abschluss von $C_0^\infty((\Omega])$ in $H^{2,2}(\Omega)$, gegeben durch

$$H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega) = \{x \in H^{2,2}(\Omega) \mid \text{RB}_w\} \quad (\text{A.29})$$

eingeführt und bezüglich der Testfunktionen $\phi(v) \in H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega)$ gefordert. Mit $H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega)$ wird ein gegenüber $C_0^\infty((\Omega])$ größerer Raum von Testfunktionen angenommen. Weitere Ausführungen zur Sinnhaftigkeit der punktförmigen Randbedingungen in Sobolew-Räumen finden sich beispielsweise in [HN01] (S. 246).

Die partielle Integration wird beispielhaft für den zweiten Term aus (A.23) vorgenommen, nach einfacher Anwendung der partiellen Integration gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \left(\alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right)}{\partial v^2} \phi(v) \, dv &= \left[\frac{\partial \left(\alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right)}{\partial v} \phi(v) \right]_0^L - \int_{\Omega} \frac{\partial \left(\alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right)}{\partial v} \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \, dv \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \left(\alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right)}{\partial v} \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \, dv \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Dabei werden die natürlichen Randbedingungen aus (A.27) sowie die Eigenschaften der Testfunktionen $\phi(0) = 0$ genutzt. Erneute Anwendung der partiellen Integration führt unter Berücksichtigung der natürlichen Randbedingungen sowie $\frac{\partial \phi(v)}{\partial v}|_{v=0} = 0$ auf

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \left(\alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right)}{\partial v^2} \phi(v) \, dv = \int_{\Omega} \alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \frac{\partial^2 \phi(v)}{\partial v^2} \, dv. \quad (\text{A.31})$$

Für den Fall, dass $\alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2}$ den Anforderungen aus Definition 94 genügt aber selbst nicht unmittelbar im starken Sinn differenzierbar ist, aber eine Funktion $f(v)$ gemäß Definition 94 existiert, sodass

$$\int_{\Omega} f(v) \phi(v) \, dv = \int_{\Omega} \alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \frac{\partial^2 \phi(v)}{\partial v^2} \, dv \quad (\text{A.32})$$

gilt, heißt $f(v) = D_v^2 \left(\alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \right)$ schwache Ableitung von $\alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2}$. Die rechte Seite des voranstehenden Integralausdrucks lässt sich zudem unter Annahme einer zusätzlichen komplexen Konjugation als Sesquilinearform auffassen. Diese Interpretation dient als Grundlage der Formulierung einer Operator Darstellung in Abschnitt A.3. In diesem Zusammenhang ist auch die Aussage

zur Grundidee der Hilbertraummethoden bei der Lösung von Randwert-Problemen entsprechend [Alt06] (S. 168) interessant.

Laut (A.27) gilt $\frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \Big|_{v=L} = \frac{\partial^3 w(v,t)}{\partial v^3} \Big|_{v=L} = 0$ für alle Zeiten, daher muss am rechten Rand auch $\frac{\partial^3 w(v,t)}{\partial v^2 \partial t} \Big|_{v=L} = \frac{\partial^4 w(v,t)}{\partial v^3 \partial t} \Big|_{v=L} = 0$ für alle Zeiten gelten. Die schwache Ableitung des Dämpfungsterms in (A.23) lässt sich damit analog zu dem voranstehend gezeigten Vorgehen herleiten. Ausgehend von (A.23) lautet die schwache Formulierung der homogenen transversalen Bewegungsgleichung in Integraldarstellung damit

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial t^2} \phi(v) + \alpha_s \frac{\partial^2 w(v,t)}{\partial v^2} \frac{\partial^2 \phi(v)}{\partial v^2} + 2\alpha_{KV} \frac{\partial^3 w(v,t)}{\partial v^2 \partial t} \frac{\partial^2 \phi(v)}{\partial v^2} + 2\alpha_v \frac{\partial w(v,t)}{\partial t} \phi(v) dv = 0. \quad (\text{A.33})$$

Anhand der Überführung der Bewegungsgleichungen in die schwache Formulierung wird die bekannte Unterscheidung der Randbedingungen in wesentliche Randbedingungen und natürliche Randbedingungen deutlich. Während die wesentlichen Randbedingungen zur weiteren Betrachtung der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichungen in den zugrunde liegenden Funktionenräumen explizit in der Definition dieser Funktionenräume zu berücksichtigen sind, ergeben sich die natürlichen Randbedingungen zwangsläufig ([Bra07a] (S. 42)).

Der Definition der schwachen Ableitung folgend, muss zur Gewährleistung der Wohdefiniiertheit der Integration die lokale Integrierbarkeit sowohl der zu differenzierenden Funktion als auch der schwachen Ableitung dieser Funktion gefordert werden. Der inhomogene Teil der transversalen Bewegungsgleichung erfüllt diese Voraussetzungen unter Annahme einer rechteckförmigen Ortsfunktion $\chi(v)$ nicht. Bei der Behandlung des inhomogenen Teils der Bewegungsgleichung (A.23) in Abschnitt A.2.2 wird dieser mathematischen Besonderheit durch die Berücksichtigung der Ableitung im distributiven Sinne Rechnung getragen.

Für eine einheitliche Betrachtung wären alle schwachen Differentiationen dieses Abschnitts als distributive Ableitungen zu interpretieren. Da gemäß den Aussagen aus Anhang B.10.3 beide Differentiationsbegriffe für den Fall regulärer Distributionen übereinstimmen, wird darauf an dieser Stelle verzichtet und statt dessen die weniger allgemeine Interpretation vorgezogen.

A.2.2 Inhomogener Teil der Bewegungsgleichungen

In diesem Abschnitt wird der inhomogene Anteil

$$f_t(v,t) = \alpha_{In} \frac{\partial^2 \chi(v)}{\partial v^2} V_{Pk}(t) \quad (\text{A.34})$$

der starken Formulierung der transversalen Bewegungsgleichung (A.23) betrachtet. Die elektrische Spannung wird als Element eines geeigneten Funktionenraums angesehen. Der genannte Term beinhaltet formal die zweifache örtliche Differentiation der Orstfunktion $\chi(v)$ der piezoaktiven Schicht. Die angenommene rechteckförmige Ortsfunktion (A.12) von Seite 207 kann als Überlagerung zweier Sprungfunktionen angesehen werden. Da entsprechend Abschnitt B.10.3 keine

lokal integrierbare Funktion existiert, die den inhomogenen Anteil der transversalen Bewegungsgleichung erfüllt, muss die Differentiation der Ortsfunktion im distributiven Sinn entsprechend Definition 95 von Seite 316 verstanden werden.

Für die schrittweise gebildete zweifache distributive Ableitung wird die Ortsfunktion als reguläre Distribution mit einem kompakten Träger

$$\text{supp}(\chi) = [v^l, v^r] \quad (\text{A.35})$$

interpretiert. Erwartungsgemäß führt die erste distributive Ableitung der Ortsfunktion

$$\begin{aligned} D(\chi(v)) &= - \int_{\Omega} \chi(v) \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} dv = - \int_{v^l}^{v^r} \chi(v) \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} dv \\ &= - \int_{v^l}^{v^r} 1 \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} dv = - [\phi(v)]_{v^l}^{v^r} = \phi(v^l) - \phi(v^r) \\ &= \delta_{v^l}(\phi) - \delta_{v^r}(\phi) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

auf zwei Dirac-Delta, die für eine Auswertung der Testfunktionen an den Sprungstellen stehen. Entsprechend Abschnitt B.10.3 sind die Dirac-Delta irreguläre Distributionen, deren erneute distributive Ableitung auf eine Auswertung der Ableitung der Testfunktionen führt. In diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} D(D(\chi(v))) &= - \langle D(\chi(v)), \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \rangle = -D(\chi(v)) \left(\frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \right) = (\delta_{v^r} - \delta_{v^l}) \left(\frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \right) \\ &= \delta_{v^r} \left(\frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \right) - \delta_{v^l} \left(\frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Die zweifache distributive Ableitung der Ortsfunktion wird somit als ein lineares Funktional aufgefasst, dass aus dem Raum der Testfunktionen auf den Körper abbildet.

Unter der Annahme, dass die piezoaktiven Schichten unmittelbar am linken Rand des trimorphen Biegewandlers beginnen, gilt $v^l = 0$. Die Eigenschaften der Testfunktionen und die Tatsache, dass eine Differentiation als lokaler Operator den Träger einer Funktion durch seine Anwendung nicht vergrößern kann führen auf $\phi(0) = \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \big|_{v=0}$.

In der distributiven Formulierung wird der inhomogene Anteil der transversalen Bewegungsgleichung damit als Funktional auf einem Raum geeigneter Testfunktionen angesehen. Falls $\phi(v)$ einem solchen Raum von Testfunktionen angehört, lässt sich der inhomogene Anteil durch das Funktional

$$f_t(\phi(v)) V_{\text{Pk}}(t) = \alpha_{\text{In}} \frac{\partial \phi(v)}{\partial v} \big|_{v=v^r} V_{\text{Pk}}(t) \quad (\text{A.38})$$

ausdrücken. Gleichsam ist eine Darstellung als Dualitätsprodukt zwischen dem Raum der Testfunktionen und dessen Dualraum denkbar. In dem Fall ist die distributive Ableitung aus (A.37) als Element des Dualraums zu interpretieren. In allen geschilderten Fällen ist eine Auswertung des inhomogen Terms nur in Verbindung mit geeigneten Testfunktionen sinnvoll.

A.3 Überführung in eine Operatordarstellung

Dieser Abschnitt enthält die Überführung der aus der Modellbildung resultierenden transversalen Bewegungsgleichungen aus Abschnitt A.1 beziehungsweise Abschnitt A.2 in eine Operatordarstellung. Ausgangspunkt dazu ist Gleichung (A.23) beziehungsweise (A.33). Eine Operatordarstellung der Bewegungsgleichungen des trimorphen Biegewandlers dient als Vorstufe zur Systemdarstellung im Zustandsraum und in Halbgruppendarstellung und erleichtert die Anwendung funktionalanalytischer sowie operatortheoretischer Methoden zur Systemanalyse. Gleichzeitig ergibt sich eine Verallgemeinerung vom konkreten Beispiel des trimorphen Biegewandlers auf eine Familie unendlich-dimensionaler Systeme zweiter Ordnung. Die formal angestrebte Operatordarstellung

$$\frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial w(t)}{\partial t} + S w(t) = f(t), \quad w(0) = w_0, \frac{\partial w(0)}{\partial t} = w_1, \quad (\text{A.39})$$

auf einem noch zu definierenden Funktionenraum, kann als äquivalent zu der bei konzentriert parametrischen Systemen insbesondere im Bereich der Mechanik weit verbreiteten Darstellung mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung angesehen werden ([Mei00] (S. 165), [Mei01] (S. 283)). An die Stelle der dort gebräuchlichen Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen treten im Fall unendlich-dimensionaler Systeme entsprechende Steifigkeitsoperatoren S und Dämpfungsoperatoren D , deren Eigenschaften sich ebenfalls anhand der Physik des betrachteten Systems anschaulich herleiten lassen.

Als Grundlegender Raum der Operatorgleichung (A.39) wird zunächst ohne weitere Spezifikation ein Hilbertraum H angenommen, dessen Wahl in Abschnitt A.3.1 gezeigt wird. H dient als Pivotraum einer Raumskala der Form

$$V \underset{d}{\hookrightarrow} H \underset{d}{\hookrightarrow} V' \quad (\text{A.40})$$

wobei V und der im Sinne von H als Pivotraum festgelegte Dualraum V' ebenfalls Hilberträume sind. Weitere grundlegende Ausführungen zu Raumskalen finden sich in Abschnitt B.9. Eine wesentliche Rolle bei der Überführung der Bewegungsgleichungen von sowohl der schwachen als auch der starken Formulierung in eine Operatordarstellung spielt die jeweilige Definition eines Steifigkeitsoperators S . Die verschiedenen Definitionen und Interpretationen des Steifigkeitsoperators beziehungsweise einer zugeordnet Sesquilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ werden in Abschnitt A.3.2 eingeführt. Den Ausführungen aus Abschnitt B.9.2 folgend werden verschiedene Potenzen einer Formulierung des Steifigkeitsoperators nachfolgend als Ausgangspunkt genutzt, um eine systemspezifische Raumskala gemäß Gleichung (B.115) zu definieren. Die dabei erzeugte Raumskala dient als Basis für die Zustandsraumdarstellung des ungezwungenen Beispielsystems in Abschnitt 2.2.4.

Die Definition der Dämpfungsoperatoren in Abschnitt A.3.3 folgt weitestgehend dem für den Steifigkeitsoperator beschriebenen Vorgehen. Die resultierende Beschreibung der Dämpfungsterme lässt sich als Summe des gewichteten Steifigkeitsoperators und eines Skalars darstellen.

A.3.1 Festlegung des grundlegenden Raumes H

Dieser Abschnitt dient der Festlegung des Raumes H der als grundlegend für die Definition des Steifigkeitsoperators und in Folge dessen auch für die Formulierung der Zustandsraumdarstellung des Beispielsystems in Abschnitt 2.2.4 anzusehen ist. Als wesentliches Kriterium wird für H die Vollständigkeit (Definition 23, Seite 230) gefordert. Darüber hinaus soll die Wahl von H die dichte Definition (Abschnitt B.4) des Steifigkeitsoperators $S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$ der starken Formulierung der Bewegungsgleichungen gewährleisten. Ohne eine detaillierte Definition wird der Steifigkeitsoperator im wesentlichen als Differentialoperator betrachtet, der Differentiationen hinsichtlich der örtlichen Unabhängigen beschreibt. Der Steifigkeitsoperator und damit die genannten Differentialoperatoren dienen als Grundbausteine des Systemoperators des Beispielsystems. Damit zielt dieser Abschnitt auf eine Definition von H ab, sodass der Systemoperator in der Zustandsraumdarstellung des Beispielsystems die notwendigen Bedingungen eines infinitesimalen Erzeugers einer stark stetigen Halbgruppe erfüllt (Satz 3).

Maximaler Steifigkeitsoperator und dessen Einschränkungen

Formal wird der noch nicht vollständig definierte Steifigkeitsoperator zunächst ohne Berücksichtigung jeglicher Randbedingungen und ohne konkrete Festlegung der beteiligten Räume als maximaler Operator

$$\begin{aligned} \tilde{S} : \mathcal{D}(\tilde{S}) \subset H &\rightarrow H \\ x &\mapsto \alpha_S \frac{\partial^4 x}{\partial v^4} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

nach Anhang B.4 angenommen. Die zur mathematischen Beschreibung des Beispielsystems unumgängliche Berücksichtigung der zugehörigen Randbedingungen führt zu einer in Anhang B.4 beschriebenen Einschränkung $S \subset \tilde{S}$ von \tilde{S} . Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(S)$ umfasst nur diejenigen Elemente von $\mathcal{D}(\tilde{S})$, die den geforderten Randbedingungen genügen und $\mathcal{D}(S)$ ist eine echte Untermenge des Definitionsbereichs des maximalen Operators, es gilt

$$\begin{aligned} S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(\tilde{S}) &\subset H \rightarrow H \\ x &\mapsto S x. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Entsprechend der einleitend genannten Forderungen bezüglich H , ist die Festlegung von H derart zu treffen, dass die Einschränkung S des maximalen Operators \tilde{S} durch die Einführung der Randbedingungen dicht definiert ist.

Dichte Definition der Einschränkung des maximalen Steifigkeitsoperators

Im Hinblick auf das Beispielsystem ist aus der physikalischen Anschauung heraus die Auslenkung des trimorphen Biegewandlers hinsichtlich der örtlichen Unabhängigen zu jedem Zeitpunkt als stetig und auch als „knickfrei“ zu erwarten. Um dieser Anschauung mathematisch gerecht zu

werden, müsste die Lösung $w(t)$ der Operatorgleichung (A.39) eine über dem Gebiet zu jedem Zeitpunkt stetige und ausreichend oft stetig differenzierbare Funktion sein. Die Wahl des Raums der über dem örtlichen Gebiet stetigen Funktionen für H führt allerdings in Zusammenhang mit den auftretenden Differentialoperatoren nicht auf dicht definierte Einschränkungen des maximalen Operators (Beispiel 2.6,[Kat95] (S. 144f)). Anstelle des Raums der über dem Gebiet stetigen Funktionen wird daher die Wahl $H = L^2(\Omega)$ getroffen. $L^2(\Omega)$ wird durch Definition 86 definiert und steht für die Äquivalenzklassen Lebesgue-messbarer und quadratisch über dem Gebiet Ω integrierbarer Funktionen. Gemäß Abschnitt B.10.1 und unter Annahme des kanonischen Innenprodukts genügt $L^2(\Omega)$ den Anforderungen an einen Hilbertraum und wird dem üblichen Sprachgebrauch folgend als Vektorraum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen bezeichnet. Mit $L^2(\Omega)$ wird ein Raum betrachtet, bei dem keine Unterscheidung zwischen enthaltenen Elementen gemacht wird, die im Sinne des Lebesgue-Maßes fast überall gleich sind (Definition 86). Zwei nicht identische stetige Funktionen unterscheiden sich auf mehr als einer Lebesgue-Nullmenge, daher liegt höchstens eine stetige Funktion in einer Äquivalenzklasse.

Der Hilbertraum $L^2(\Omega)$ ist zudem als Vervollständigung (B.2) der über einem abgeschlossenen Intervall $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen unter Berücksichtigung der 2-Norm

$$L^2(\Omega) = \left(\overline{C(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_2 \right)$$

aufzufassen ([CZ95] (S. 576)). Abgeleitet aus (A.23) wird im Vorgriff auf Abschnitt A.3.2 der durch (A.41) formal eingeführte maximale Steifigkeitsoperator im Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$ betrachtet. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(\tilde{S})$ des maximalen Steifigkeitsoperators in H soll die Funktionen enthalten, die nach viermaliger Differentiation noch immer in H liegen. Daher wird zur Festlegung von $\mathcal{D}(\tilde{S})$ für die Elemente von H zusätzlich die absolute Stetigkeit bis zur dritten Ableitung vorausgesetzt und somit Satz 55 folgend die Existenz einer vierten Ableitung $\frac{\partial^4 x}{\partial v^4} \in L^2(\Omega) \forall x \in \mathcal{D}(\tilde{S})$ gewährleistet. Als Definitionsbereich des maximalen Steifigkeitsoperators wird somit

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \left\{ x \in L^2(\Omega) \mid x, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial v^3} \text{ absolut stetig, } \frac{\partial^4 x}{\partial v^4} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (\text{A.43})$$

eingeführt. Da es sich bei dem Steifigkeitsoperator aus (A.41) um einen Differentialoperator handelt, bildet \tilde{S} beispielsweise alle über dem örtlichen Gebiet und in $\mathcal{D}(\tilde{S})$ liegenden konstanten Funktionen auf Null ab. Entsprechend ist $N(\tilde{S}) \neq 0$, da der Kern von \tilde{S} nicht ausschließlich die Null enthält, ist \tilde{S} gemäß Satz 17 nicht invertierbar. Die Wahl von $\mathcal{D}(\tilde{S})$ gewährleistet aber, dass eine Einschränkung $S \subset \tilde{S}$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen RB aus Abschnitt A.1.6 und somit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ x \in \mathcal{D}(\tilde{S}) \mid \text{RB} \right\} \quad (\text{A.44})$$

dicht definiert ist. Im folgenden gilt damit die Wahl $H = L^2(\Omega)$, die beide eingangs genannten Forderungen erfüllt und darüber hinaus H zu einem Hilbertraum macht. Eine Herleitung von $\mathcal{D}(S)$ mittels des inversen Steifigkeitsoperators wird zudem in Abschnitt A.3.2 gezeigt, die daraus resultierende Definition von $\mathcal{D}(S)$ in Gleichung (A.64) stimmt mit der voranstehenden Definition überein.

Aufgrund der Wahl $H = L^2(\Omega)$ lässt sich zum Nachweis der dichten Definition des linearen Steifigkeitsoperators zudem die hinreichende Bedingung aus [NS] (S. 486) überprüfen. Unter der Annahme einer offenen Menge Ω im \mathbb{R}^n und eines Hilbertraums $L^2(\Omega)$ ist entsprechend [NS] $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ und jeder lineare Operator $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow L^2(\Omega)$ damit dicht definiert, falls $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(T)$.

A.3.2 Definition der Steifigkeitsoperatoren

Der Steifigkeit zugeordnete Sesquilinearform

Um eine Verbindung zwischen der schwachen Formulierung der transversalen Bewegungsgleichung des trimorphen Biegewandlers (A.33) und der angestrebten Operator Darstellung (A.39) zu knüpfen, wird in diesem Abschnitt dem Steifigkeitsterm aus (A.33) eine Sesquilinearform auf dem Raum der Testfunktionen V zugeordnet. Aus der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichungen des trimorphen Biegewandlers gemäß (A.33) wird der Term

$$s(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \alpha_S \frac{\partial^2 x_1(v)}{\partial v^2} \overline{\frac{\partial^2 x_2(v)}{\partial v^2}} dv \quad (\text{A.45})$$

als Sesquilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ nach Definition 37 interpretiert, wobei hier zunächst $V = H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega)$ gewählt wird. s beschreibt die Steifigkeit des trimorphen Biegewandlers und analog zu [BSY96] (S. 97) werden die folgenden Eigenschaften festgestellt:

ST1) Hermitesch: $s(x_1, x_2) = \overline{s(x_2, x_1)}$, $\forall x_1, x_2 \in V$;

ST2) Beschränkt: Es existiert eine positive Konstanten c_1 , sodass

$$|s(x_1, x_2)| \leq c_1 \|x_1\|_V \|x_2\|_V \quad \forall x_1, x_2 \in V. \quad (\text{A.46})$$

Dabei ist c_1 gemäß [Kre78] (S. 192) durch

$$c_1 = \|s\| = \sup_{x_1, x_2 \in V \setminus \{0\}} \frac{|s(x_1, x_2)|}{\|x_1\| \|x_2\|} = \sup_{\|x_1\|=1, \|x_2\|=1} |s(x_1, x_2)|$$

gegeben und es gilt $s \in \mathcal{S}(V)$;

ST3) Halbbeschränkt nach unten (koerziv, V-elliptisch): Mit einem $c_2 > 0$ gilt

$$\text{Re}(s(x, x)) = s(x, x) = q_S(x) \geq c_2 \|x\|_V^2, \quad \forall x \in V; \quad (\text{A.47})$$

Die Forderung **ST1)** ist gemäß den in Anhang B.4 unter **S3)** aufgeführten Bedingungen nur erfüllt, falls die zugehörige quadratische Form $s(x, x) = q_S(x)$ für alle $x \in V$ reell ist. Da die Materialkonstante α_S als reell zu erwarten ist, ist diese Forderung mit

$$s(x, x) = \int_{\Omega} \alpha_S \frac{\partial^2 x(v)}{\partial v^2} \overline{\frac{\partial^2 x(v)}{\partial v^2}} dv = \int_{\Omega} \alpha_S \left| \frac{\partial^2 x(v)}{\partial v^2} \right|^2 dv \quad (\text{A.48})$$

stets erfüllt. In Bezug auf das Beispielsystem lassen sich die auftretenden Funktionen x als Verschiebungen interpretieren. Das Bild der zugehörigen Form ist als Maß für die aufgrund der Verschiebung gespeicherten Formänderungsenergie anzusehen, diese Energie muss stets reell sein. Aus (A.48) folgt $\operatorname{Re}(s(x, x)) = s(x, x)$. Das Beispielsystem ist eine gefesselte elastische Struktur und besitzt demnach keine reinen Festkörper-Moden. Folglich führt jeder von Null verschiedene Verschiebungszustand auf eine Formänderungsenergie größer Null. Die durch die schwache Formulierung entstandene Sesquilinearform ist folglich hermitesch und positiv definit und genügt damit den in Definition 56 aufgeführten Bedingungen an ein Innenprodukt

$$s(x_1, x_2) = \langle \alpha_s \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{A.49})$$

In (A.46) bzw. (A.47) wird ersichtlich, dass sowohl die Beschränktheit als auch die Koerzitivität der Sesquilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ von der Norm auf V abhängen. Im Folgenden wird der Nachweis der genannten Eigenschaften exemplarisch gezeigt. Dazu wird V mit der Norm, induziert durch das von der betrachteten Sesquilinearform definierte Innenprodukt $\|x\|_V^2 = s(x, x) = q(x) = \langle x, x \rangle_V$ ausgestattet. Abkürzend wird auf die Indizierung des Innenprodukts und der Norm auf $L^2(\Omega)$ verzichtet. Unter Verwendung der Schwarzischen Ungleichung gilt

$$|s(x, x)| = |\langle x_1, x_2 \rangle_V| \leq c_1 \|x_1\|_V \|x_2\|_V \quad (\text{A.50})$$

und damit die Beschränktheit von $s \in \mathcal{S}(V)$. Die Koerzitivität wird mit $\operatorname{Re}(s(x, x)) = s(x, x)$ aus Gleichung (A.48) ersichtlich, es gilt

$$s(x, x) = \|x\|_V^2 \geq c_2 \|x\|_V^2. \quad (\text{A.51})$$

Steifigkeitsoperator der schwachen Formulierung

Die Sesquilinearform s erfüllt die Voraussetzungen zur Anwendung von Satz 47 auf Seite 280 beziehungsweise Satz 43 von Seite 271. Somit existiert ein eindeutig bestimmter stetiger Operator $S \in \mathcal{L}(V, V')$, der jedem Element aus V ein Element aus dem zugehörigen Dualraum V' zuordnet, sodass für das Dualitätsprodukt

$$s(x_1, x_2) = \langle Sx_1, x_2 \rangle_{V' \times V} \quad \forall x_1, x_2 \in V \quad (\text{A.52})$$

gilt. Darüber hinaus besitzt der erzeugende Operator die in Satz 47 aufgeführten Eigenschaften, insbesondere stimmt die Operatornorm mit der Norm der Sesquilinearform überein

$$\|S\|_{\mathcal{L}(V, V')} = \|s\|. \quad (\text{A.53})$$

Bei den Elementen aus V' handelt es sich um lineare Funktionale, die ihrerseits Elemente aus V auf den zugrunde liegenden Körper abbilden. Da s entsprechend **ST1**) hermitesch ist, folgt für ein festes $x_1 \in V$

$$(Sx_1)(x_2) : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x_2 \in V.$$

Die Darstellung des Funktionalen erfolgt ausgehend von (A.45), unter der Voraussetzung ausreichender Regularität der beteiligten Größen. Festgelegt durch Satz 47 gilt formal

$$\begin{aligned} \underbrace{(Sx_1)}_{\in V'} \underbrace{(x_2)}_{\in V} &= \int_{\Omega} \alpha_S \frac{\partial^2 x_1(v)}{\partial v^2} \overline{\frac{\partial^2 x_2(v)}{\partial v^2}} dy \\ &= \langle \alpha_S \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Der so definierte Operator $S \in \mathcal{L}(V, V')$ wird in der Operatordarstellung der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichungen als Steifigkeitsoperator interpretiert. Die Operatordarstellung der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichungen erfolgt somit in vergleichsweise abstrakter Form auf dem Dualraum V' , zu ihrer Auswertung sind daher Testfunktionen heranzuziehen.

Auf Basis des Satzes von Lax-Milgram (Satz 44) lässt sich auf die Äquivalenz zwischen der schwachen Formulierung auf Basis der Sesquilinearform $s \in \mathcal{S}(V)$ und der durch den der Sesquilinearform zugeordneten Steifigkeitsoperator $S \in \mathcal{L}(V, V')$ auf dem Dualraum V' definierten Operatordarstellung schließen. Gemäß [DL88] (S. 369) existieren für alle $f \in V'$ zu

$$s(x, y) = \langle f, y \rangle_{V' \times V}, \quad \forall y \in V \quad (\text{A.55})$$

und

$$Sx = f \quad (\text{A.56})$$

eindeutige $x \in V$.

Der Brückenschlag von der Operatordarstellung der schwachen Formulierung (A.33) zu einer Operatordarstellung der starken Formulierung (A.23) der Bewegungsgleichung des trimorphen Biegewandlers erfolgt im nächsten Abschnitt anhand einer unbeschränkten Einschränkung des zuletzt eingeführten Steifigkeitsoperators.

Unbeschränkte Einschränkung des der Sesquilinearform zugeordneten Operators

Die Sesquilinearform s aus (A.45) erfüllt die Voraussetzungen aus Satz 47 von Seite 280 und entsprechend der Ausführungen in Abschnitt B.6.3 kann s neben dem stetigen Operator $S \in \mathcal{L}(V, V')$ ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator $S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$ zugeordnet werden, der den Anforderungen an einen koerziven Operator genügt. Im Allgemeinen ist der gesuchte Operator S formal durch (B.71) definiert und mit $\alpha_S = \overline{\alpha_S}$ gilt an dieser Stelle

$$s(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \alpha_S \frac{\partial^2 x_1(v)}{\partial v^2} \overline{\frac{\partial^2 x_2(v)}{\partial v^2}} dv = \langle \alpha_S \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} \rangle_H = \langle x_1, \alpha_S \frac{\partial^4 x_2}{\partial v^4} \rangle_H \quad (\text{A.57})$$

für alle $x_1 \in \mathcal{D}(s)$ und für alle $x_2 \in \mathcal{D}(S)$. Damit ergibt sich formal

$$\begin{aligned} S : \mathcal{D}(S) \subset H &\rightarrow H \\ x &\mapsto Sx = \alpha_S \frac{\partial^4 x}{\partial v^4}. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

S lässt sich prinzipiell auf Basis von (B.72) bestimmen. An dieser Stelle wird $\mathcal{D}(S)$ allerdings auf Basis des inversen Steifigkeitsoperators S^{-1} festgelegt, wobei die Existenz eines $S^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ aus der Koerzitivität von S folgt. Das folgende Vorgehen beruht auf dem Zusammenhang

$$\mathcal{D}(S) = S^{-1}(H) = \{x \in H \mid Sx \in H\} \quad (\text{A.59})$$

([DL88] (S. 370)) und lässt sich als lösen eines Randwertproblems der Form

$$Sx = \alpha_S \frac{\partial^4 x}{\partial v^4} = f \in H \quad (\text{A.60})$$

auffassen. (A.60) ist auf dem örtlichen Gebiet des Beispielsystems $\Omega = (0, L)$ definiert und wird durch die Randwerte des Beispielsystem aus den Gleichungen (A.26) und (A.27) zu

$$x(0) = \frac{\partial x(v)}{\partial v} \Big|_{v=0} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 x(v)}{\partial v^2} \Big|_{v=L} = \frac{\partial^3 x(v)}{\partial v^3} \Big|_{v=L} = 0$$

ergänzt. Das Integrieren von (A.60), beginnend von der Seite des örtlichen Gebiets, für die eine Randbedingung bezüglich der höchsten Ableitung vorliegt, führt auf

$$\int_L^v \frac{\partial^4 x(v)}{\partial v^4} dv = \left(\frac{\partial^3 x(v)}{\partial v^3} - \frac{\partial^3 x(L)}{\partial v^3} \right) = \alpha_S^{-1} \int_L^v f(\tau) d\tau. \quad (\text{A.61})$$

Aufgrund der Randbedingungen ist $\frac{\partial^3 x(L)}{\partial v^3} = 0$. Für $f \in H = L^2(\Omega)$ garantiert Satz 55, dass $\alpha_S \frac{\partial^3 x(v)}{\partial v^3}$ absolut stetig ist und $\alpha_S \frac{\partial^4 x(v)}{\partial v^4} = f$ fast überall gilt. Die Wiederholung dieses Vorgehens führt unter Berücksichtigung der Randbedingungen auf

$$\frac{\partial^2 x(v)}{\partial v^2} = \alpha_S^{-1} \int_L^v \int_L^{\bar{\tau}} f(\tau) d\tau d\bar{\tau}, \quad \frac{\partial x(v)}{\partial v} = \alpha_S^{-1} \int_0^v \int_L^{\hat{\tau}} \int_L^{\bar{\tau}} f(\tau) d\tau d\bar{\tau} d\hat{\tau} \quad (\text{A.62})$$

und schließlich auf den gesuchten inversen Steifigkeitsoperator

$$S^{-1} : H \rightarrow \mathcal{D}(S) \\ f \mapsto \alpha_S^{-1} \int_0^v \int_0^{\hat{\tau}} \int_L^{\bar{\tau}} \int_L^{\tilde{\tau}} f(\tau) d\tau d\bar{\tau} d\hat{\tau} d\tilde{\tau}. \quad (\text{A.63})$$

Aus den in Abschnitt B.6.2 genannten Eigenschaften koerziver Operatoren geht hervor, dass $S^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ positiv ist. Der inverse Steifigkeitsoperator wird als Integraloperator mit quadratisch Lebesgue-integrierbarem Kern angesehen und ist damit entsprechend Satz 11.3 aus [Kab14] (S. 268) (oder Satz 12.7 aus [Kab11] (S. 238)) ein Hilbert-Schmidt-Operator auf $L^2(\Omega)$ und als solcher auch kompakt. Das Bild eines beliebigen $f \in H = L^2(\Omega)$ unter dem inversen Steifigkeitsoperator

erfüllt die Randbedingungen RB aus (A.26) und (A.27). Ferner sind $x(v)$, $\frac{\partial x(v)}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 x(v)}{\partial v^2}$ und $\frac{\partial^3 x(v)}{\partial v^3}$ aufgrund von Satz 55 absolut stetig, während $\frac{\partial^4 x(v)}{\partial v^4} \in L^2(\Omega)$. Damit folgt

$$\mathcal{D}(S) = S^{-1}(H) = \left\{ x \in H \mid x, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial v^3} \text{ sind absolut stetig, } \frac{\partial^4 x}{\partial v^4} \in L^2(\Omega), \text{ RB} \right\}. \quad (\text{A.64})$$

Der voranstehend definierte $\mathcal{D}(S)$ stimmt mit dem durch die Gleichungen (A.43) und (A.44) definierten Definitionsbereich überein und $\mathcal{D}(S)$ liegt sowohl in H als auch in V dicht, zudem ist der neu definierte Steifigkeitsoperator abgeschlossen ([DL88] (S. 370)). Der Zusammenhang zwischen $S \in \mathcal{L}(V, V')$ und $S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$ lässt sich beispielsweise Remark 12. aus [DL88] (S. 372) entnehmen. Die Eigenschaften von $S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$ lassen sich neben Satz 47 auf Seite 280 auch [DL88] (S. 372) entnehmen. Auf Basis seiner Eigenschaften kann der unbeschränkte Steifigkeitsoperator gemäß den Ausführungen in Anhang B.9.2 zur Definition einer Raumskala genutzt werden.

Unter Ausnutzung der Eigenschaften des Steifigkeitsoperators wird der Hilbertraum H_1 als $\mathcal{D}(S)$ ausgestattet mit einer durch das Innenprodukt

$$\langle Sx, Sy \rangle_{H_1} \quad \forall x, y \in H_1$$

induzierten und zur Graphennorm äquivalenten Norm $\|x\|_{H_1} = \|Sx\|_H$ eingeführt ([TW09] (S. 88)).

A.3.3 Dämpfungsoperator

Der Dämpfung zugeordnete Sesquilinearform

Die Bestimmung des Dämpfungsoperators der schwachen Formulierung beruht auf den Termen aus (A.33), die ausschließlich die erste zeitliche Ableitung der Lösung enthalten. Unter der Annahme, dass die zeitliche Ableitung der Lösung ebenfalls in dem Hilbertraum V enthalten ist, ergibt sich die zugehörige Sesquilinearform $d : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ zu

$$d(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \alpha_{KV} \frac{\partial^2 x_1(v)}{\partial v^2} \overline{\frac{\partial^2 x_2(v)}{\partial v^2}} dv + \int_{\Omega} \alpha_V x_1(v) \overline{x_2(v)} dv. \quad (\text{A.65})$$

Mit einem Vorgehen wie im Fall von s lassen sich für d die folgenden Eigenschaften feststellen ([BSY96] (S. 98)):

D1) $d(x_1, x_2) = \overline{d(x_2, x_1)}, \quad \forall x_1, x_2 \in V;$

D2) Beschränkt: $d(x_1, x_2) \leq \|x_1\|_V \|x_2\|_V, \quad \forall x_1, x_2 \in V;$

D3) Halbbeschränkt von unten: $\operatorname{Re}(d(x, x)) + c_1 \|x\|_H \geq c_2 \|x\|_V, \quad \forall x \in V.$

Damit verfügt d über die analogen Eigenschaften wie s und entsprechend sind auch für die zugeordneten Operatoren entsprechende Eigenschaften zu erwarten. Die Formulierung der Koerzitivität des Dämpfungsoperators in **D3**) beruht aufgrund der viskosen Dämpfung auf einer Erweiterung der Formulierung der Koerzitivität des Steifigkeitsoperators in (A.47). Die in **D3**) verwendete Formulierung wird als V -Koerzitivität unter Berücksichtigung von H bezeichnet ([DL88] (S. 370)).

Dämpfungsoperator der schwachen Formulierung

Die Eigenschaften der zuletzt eingeführten Sesquilinearform ermöglichen in Analogie zum Steifigkeitsoperator die Zuordnung eines stetigen Dämpfungsoperators $D \in \mathcal{L}(V, V')$, der Elemente aus V auf lineare Funktionale abbildet

$$\underbrace{(Dx_1)}_{\in V'} \underbrace{(x_2)}_{\in V} = \int_{\Omega} \alpha_{KV} \frac{\partial^2 x_1(v)}{\partial v^2} \overline{\frac{\partial^2 x_2(v)}{\partial v^2}} dv + \int_{\Omega} \alpha_V x_1(v) \overline{x_2(v)} dv, \forall x_1 \in V, \forall x_2 \in V. \quad (\text{A.66})$$

Zudem ist der Dämpfungsoperator $D \in \mathcal{L}(V, V')$ auf Basis des Steifigkeitsoperator darstellbar

$$Dx = \left(\frac{\alpha_{KV}}{\alpha_S} S + \alpha_V \right) x, \quad \forall x \in V. \quad (\text{A.67})$$

Unbeschränkte Einschränkung des der Sesquilinearform zugeordneten Operators

Entsprechend $S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$ ergibt sich der zugehörige unbeschränkte Dämpfungsoperator zu

$$\begin{aligned} D : \mathcal{D}(D) \subset H &\rightarrow H \\ x &\mapsto \left(\frac{\alpha_{KV}}{\alpha_S} S + \alpha_V \right) x = \alpha_{KV} \frac{\partial^4 x}{\partial v^4} + \alpha_V x. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Der voranstehend definierte Operator mit $\mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(S)$ entspricht bei der Überführung von (A.23) in eine Operatordarstellung dem Dämpfungsoperator. Die Darstellbarkeit des Dämpfungsoperators mittels des Steifigkeitsoperators und eines Skalars ermöglichen anhand der Eigenschaften des Steifigkeitsoperators Schlüsse auf die Eigenschaften des Dämpfungsoperators. Da $\alpha_{KV} > 0, \alpha_V > 0$, folgt insbesondere auch die Selbstadjungiertheit von D aus Gleichung (A.68).

A.3.4 Bemerkungen zur Äquivalenz verschiedener Normen

Im Fall des Beispielsystems können die Ausführungen zur Konstruktion von Raumskalen anhand positiver Operatoren aus Abschnitt B.9.2 zur systemspezifischen Definition einer Raumskala auf Basis des Steifigkeitsoperators genutzt werden. Die dabei resultierende Raumskala ist durch (B.115) gegeben. Die durch die Potenzen $\alpha = \{\frac{1}{2}, 1\}$ des Steifigkeitsoperators S^α definierten Normen aus (B.110) sind auf den jeweiligen Definitionsbereichen $\mathcal{D}(S^\alpha)$ äquivalent zu den entsprechenden Graphennormen aus (B.111) ([TW09] (S. 88)). Diese Normäquivalenz impliziert die

Isomorphie von $\mathcal{D}(S^\alpha)$ zum einen ausgestattet mit der eingeführten Norm $\|\cdot\|_{H_\alpha}$ und zum anderen versehen mit der entsprechenden Graphennorm (Aufgabe II.5.15, [Wer11] (S. 83)). Falls auf einem Vektorraum zwei äquivalente Normen definiert sind, sind die beiden resultierenden Räume isomorph. Zwischen den aufgeführten Räumen existieren Isomorphismen, die Räume sind damit hinsichtlich aller hier relevanten Eigenschaften als gleichwertig zu betrachten.

Für die Ausführungen zur Bestimmung des Steifigkeitsoperators wird der Raum $V = H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega)$ vorausgesetzt, dabei kann der Raum der Testfunktionen $V = H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega)$ als Abschluss von $\mathcal{D}(S)$ in $H^{2,2}(\Omega)$ angesehen werden. Falls eine Normäquivalenz zwischen der Graphennorm von $S^{\frac{1}{2}}$ und der gemeinhin verwendeten Sobolew-Norm bezüglich $\mathcal{D}(S)$ besteht, folgt daraus die Isomorphie von $H_{\frac{1}{2}}$ und $H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega)$. Der Definition der Sobolew-Norm $\|x\|_p^m$ aus (B.164) folgend ergibt sich für den Fall $m = p = 2$ die Standardnorm auf $H^{2,2}(\Omega)$ zu

$$\|x\|_{2,2}^2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \|D^\alpha x\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^1 x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^2 x\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{A.69})$$

Um die Äquivalenz der letztgenannten Norm zur Graphennorm (B.111) zu zeigen, ist eine Abschätzung des Anteils der ersten Ableitung $\|D^1 x\|_{L^2(\Omega)}^2$ an der Sobolew-Norm erforderlich. Für die Wahl $j = 1, m = r = q = 2, a = \frac{1}{2}$ folgt aus Satz 62 die Existenz einer Konstante $c_1 > 0$, sodass

$$\|D^1 x\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \|D^2 x\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|x\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in H^{2,2}(\Omega). \quad (\text{A.70})$$

Dabei wird Satz 61 verwendet um für den Fall $m = r = q = 2$ aus $W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ auf $W^{2,2}(\Omega) \cap L^2(\Omega) = H^{2,2}(\Omega)$ zu schließen. Das Quadrieren von (A.70) und die anschließende Anwendung der Youngschen-Ungleichung $ab < \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ führt auf eine Abschätzung der Norm der ersten Ableitung von x mittels der Funktion und der zweiten Ableitung

$$\|D^1 x\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_1 \|D^2 x\|_{L^2(\Omega)} \|x\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{A.71})$$

$$\leq c_2 \left(\|D^2 x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (\text{A.72})$$

Die Berücksichtigung der letztgenannten Ungleichung in (A.69) führt auf die Abschätzung

$$\|x\|_{2,2}^2 = \|x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^1 x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^2 x\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\text{A.73})$$

$$\leq c_3 \left(\|D^2 x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (\text{A.74})$$

Die Quadratwurzel des Steifigkeitsoperators ist anders als der Steifigkeitsoperator der starken Formulierung der betrachteten Bewegungsgleichung (A.23) kein Differentialoperator. An dieser Stelle wird dennoch angenommen, dass die durch die Wurzel des Steifigkeitsoperators definierte Norm $\left\| S^{\frac{1}{2}} x \right\|_H$ und damit auch die zugehörige Graphennorm auf $\mathcal{D}(S)$ äquivalent zu einer durch die zweite Ableitung einer Funktion definierten Norm ist.

Unter dieser Annahme wird auf Basis der Abschätzung (A.73) sowie unter Anwendung von Korollar 15 auf die Äquivalenz der Sobolew-Norm zur Graphennorm (B.111) und damit auch zu der

Norm aus (B.110) für den Fall $\alpha = 1/2$ geschlossen. Entsprechend wird der Raum $H_{\frac{1}{2}}$ als isomorph zu $H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega)$ angesehen und in Folge dessen wird keine Unterscheidung mehr zwischen den Räumen getroffen, es gilt

$$V = H_{\text{RB}_w}^{2,2}(\Omega) \cong H_{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.75})$$

A.3.5 Resultierende Operatordarstellung

Ausgehend von (A.33) lautet die Operatordarstellung der schwachen Form der transversalen Bewegungsgleichung des trimorphen Biegewandlers basierend auf den beschränkten Operatoren

$$S \in \mathcal{L}\left(H_{\frac{1}{2}}, H_{-\frac{1}{2}}\right) \quad D \in \mathcal{L}\left(H_{\frac{1}{2}}, H_{-\frac{1}{2}}\right)$$

und unter Berücksichtigung eines inhomogenen Terms $f \in H_{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial w(t)}{\partial t} + Sw(t) &= f(t) \quad \text{in } H_{-\frac{1}{2}} \\ w(0) = w_0, \frac{\partial w(0)}{\partial t} &= w_1. \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Die Operatordarstellung der starken Form dieser Bewegungsgleichung (A.23) wird mittels der unbeschränkten Operatoren

$$S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H \quad D : \mathcal{D}(D) \subset H \rightarrow H$$

und eines inhomogenen Terms $f \in H$ bezüglich des Pivotraums analog formuliert.

B Grundlegende Definitionen

B.1 Vektorräume

Eine der grundlegenden Strukturen für folgende Definitionen unterschiedlicher Räume ist die des Vektorraums. Neben der üblichen Interpretation eines Körpers wie beispielsweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ als \mathbb{K} -Vektorraum, werden innerhalb dieser Arbeit verschiedene andere Mengen aufgeführt, die den Anforderungen an einen Vektorraum genügen. Dazu zählen verschiedene Funktionenräume aber beispielsweise auch die Menge der beschränkten linearen Operatoren zwischen zwei Vektorräumen (Definition 42). Zudem enthält die Definition linearer Operatoren (Definition 35) Bedingungen zur Erhaltung der Vektorraumstruktur. Daher macht es Sinn, lineare Operatoren auf oder in derartigen Räumen zu betrachten.

Die Definition des Vektorraums beinhaltet die Definition der Gruppe **G1**)-**G3**) sowie die der abelschen Gruppe **G1**)-**G3**) und **AG1**). Die Elemente eines Vektorraums sind selbstverständlich nicht zwingend Vektoren, vielmehr sind sehr vielfältige mathematische Gebilde als Elemente der zugrundeliegenden Menge denkbar. Innerhalb dieser Arbeit bezeichnet der Begriff Körper keine anderen Körper als den der reellen oder den Körper der komplexen Zahlen.

Definition 14 (Vektorraum)

Eine nichtleere Menge über einem Körper \mathbb{K} heißt Vektorraum V , falls sie unter einer additiven Verknüpfung $+: V \times V \rightarrow V$ eine abelsche Gruppe bildet, somit für $x, y, z \in V$

$$\mathbf{G1)} \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{Assoziativität})$$

$$\mathbf{G2)} \quad 0 + x = x + 0 = x \quad (\text{Neutrales Element})$$

$$\mathbf{G3)} \quad x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad (\text{Inverses Element})$$

mit $\mathbf{AG1)} \quad x + y = y + x \quad (\text{Kommutativität})$

gilt und zudem eine Skalarmultiplikation mit Elementen aus dem Körper $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ definiert ist, die mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$

$$\mathbf{VR1)} \quad 1 \cdot x = x \quad (\text{Neutralität gegenüber neutralem Element aus } \mathbb{K})$$

$$\mathbf{VR2)} \quad \alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \quad (\text{Assoziativität})$$

$$\mathbf{VR3)} \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \quad (\text{Distributivität})$$

$$\mathbf{VR4)} \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

genügt.

□

Unterraum

Die folgende Definition benennt Teilmengen von Vektorräumen, die ihrerseits ebenfalls wieder Vektorräume sind ([Heu92] (S. 74)).

Definition 15 (Unterraum) Eine nichtleere Teilmenge M eines Vektorraums V wird als Unterraum von V bezeichnet, falls M bezüglich der durch V induzierten Verknüpfungen abgeschlossen ist, folglich $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in M, \forall x, y \in M$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt. □

(Externe) direkte Summe und Produktraum

Die Zustandsraumdarstellung eines unendlich-dimensionalen Systems mit mehr als einem kontinuierlichen Energiespeicher $1 < n < \infty$ erfordert die Definition eines Zustandsraums auf Basis der externen direkten Summe. Die folgende Definition der externen direkten Summe entstammt [Rom08] (S. 38).

Definition 16 ((Externe) direkte Summe) Es seien X_1, \dots, X_n mit $n < \infty$ Vektorräume über \mathbb{K} . Dann definiert die externe direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^n X_i = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ den Vektorraum X aus geordneten n-Tupel $X = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\}$ mit

$$\alpha (x_1, \dots, x_n) + \beta (y_1, \dots, y_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) \quad (\text{B.1})$$

für $x_i, y_i \in X_i, i = 1, \dots, n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. □

Die externe direkte Summe wird für eine endliche Anzahl von Teilräumen $n < \infty$ als äquivalent zum kartesischen Produkt beziehungsweise (topologischen) Produktraum gemäß [Gro70] (S. 68) angesehen. Für $n < \infty$ wird gemäß [Gro70] (S. 68) die Menge von n-Tupeln

$$\prod_{i=1}^n X_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\}$$

als kartesisches Produkt bezeichnet, welches den Produktraum

$$\begin{aligned} X &= X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

definiert. Innerhalb dieser Arbeit wird für die externe Direkte Summe $X \ni x = \bigoplus_{i=1}^n X_i, n < \infty$ eine Vektornotation verwendet, sodass $X \ni x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$.

Die Definition der (internen) direkten Summe entstammt [Kre78] (S. 146) und bereitet die Darstellung eines Hilbertraums (Definition 61, 262) als direkte Summe aus einem abgeschlossenen Unterraum und dessen orthogonalem Komplement vor.

Definition 17 ((Interne) direkte Summe) Es sei X ein Vektorraum und $X_1, \dots, X_n, n < \infty$ Unterräume von X . Der Vektorraum X heißt direkte Summe $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ der X_i , falls sich jedes Element $x \in X$ eindeutig durch $x = \bigoplus_{i=1}^n x_i$ für $x_i \in X_i$ darstellen lässt. \square

Im Gegensatz zur externen direkten Summe, geht die interne direkte Summe von Unterräumen $X_1, \dots, X_n, n < \infty$ von X aus. Die interne direkte Summe lässt sich zur Darstellung von Elementen aus X heranziehen, während die externe direkte Summe in erster Linie der Konstruktion von X aus einzelnen Vektorräumen dient.

Linearkombination, Lineare Hülle und lineare Unabhängigkeit

Die folgenden Definitionen beziehen sich auf die Kombination von Elementen eines Vektorraums.

Definition 18 (Linearkombination) Es sei V ein Vektorraum und $x_i \in V, i = 1, \dots, n, n < \infty$. Dann heißt die Summe

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n, n < \infty$$

Linearkombination von $x_i, i = 1, \dots, n, n < \infty$. \square

In der Definition der Linearkombination ist explizit die endlich Anzahl der Elemente in der Summe gefordert, die Verallgemeinerung in Form einer unendlichen Reihe wird in Abschnitt B.2 beschrieben.

Definition 19 (Lineare Hülle) Es sei V ein Vektorraum und M eine nichtleere Teilmenge von V . Dann wird die Menge aller möglichen Linearkombination von Elementen aus M als lineare Hülle von M bezeichnet und durch $\text{span}(M)$ abgekürzt. \square

Die lineare Hülle wird aus allen denkbaren Linearkombinationen der Elemente von $M \subset V$ gebildet, sie ist demnach gegenüber der Multiplikation mit Elementen aus dem Körper sowie unter der additiven Verknüpfung der Elemente aus M abgeschlossen und folglich ein Vektorraum. Dieser

Vektorraum wird von den Elementen aus M aufgespannt, die Menge M ist ein erzeugendes System des Vektorraums.

Definition 20 (Lineare Unabhängigkeit) Es sei V ein Vektorraum und M eine Teilmenge von V aus den Elementen $x_i, i = 1, \dots, n, n < \infty$. Falls

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0, \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1 \dots n,$$

ausschließlich mittels der trivialen Wahl der Koeffizienten $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, n, n < \infty$ zu erfüllen ist, heißt die Menge der betrachteten Elemente linear unabhängig. Jede nicht linear unabhängige Menge ist linear abhängig. \square

Basis und Dimension eines Vektorraums

Der im Folgenden eingeführte Basisbegriff bezieht sich auf endlich-dimensionale Räume und wird im Allgemeinen als Hamelbasis bezeichnet ([Alt06] (S. 310), [Heu92] (S. 75)).

Definition 21 (Basis) Eine linear unabhängige Teilmenge M eines Vektorraums V heißt Basis von V falls jedes Element $x \in V$ als endliche Linearkombination der Elemente von M dargestellt werden kann. Die Elemente einer Basis M heißen Basisvektoren oder Basiselemente. \square

Eine Basis ist ein minimal erzeugendes System von V . Jedes Element x eines endlich-dimensionalen Vektorraums V lässt sich eindeutig in einer endlichen Reihe der Vektoren einer Basis von V entwickeln, damit spannt eine Hamelbasis M von V den Raum V auf. Wichtigster Unterschied in der voranstehenden Definition der Basis zu den später folgenden Begriffen der Schauder- oder Rieszbasis ist die explizite Forderung nach einer endlichen Anzahl von Basiselementen bei der Erzeugung aller $x \in V$. Falls eine Basis M eines Vektorraums V aus einer endlichen Anzahl n von Basisvektoren besteht, handelt es sich um einen endlich dimensional Vektorraum mit einer Dimension entsprechend der Kardinalzahl (Mächtigkeit) der Basis $\dim V = n$. Jeder Vektorraum nicht endlicher Dimension ist unendlich-dimensional $\dim V = \infty$. Aus [Kre78] (S. 55) ist bekannt, dass jeder nichttriviale endlich-dimensionale Vektorraum V eine Basis besitzt und die Dimension verschiedener Basen zu genau einem Vektorraum übereinstimmt.

B.2 Metrische Räume

Metrik und metrische Räume

Eine Metrik wird im Allgemeinen dazu benutzt, den Begriff des Abstands für Elemente einer Menge zu definieren, dementsprechend anschaulich sind die Eigenschaften einer Metrik. Die Definition einer Metrik und darauf aufbauend die eines metrischen Raums finden sich beispielsweise in [Heu92] (S. 55).

Definition 22 (Metrik) Es sei X eine nichtleere Menge und $d(x_1, x_2) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann wird d als Metrik bezeichnet, falls

$$\mathbf{M1)} \quad d(x_1, x_2) \geq 0 \text{ und } d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

$$\mathbf{M2)} \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) \text{ und}$$

$$\mathbf{M3)} \quad d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$$

gilt. □

Aus **M1)** folgt, dass zwei unterschiedliche Elemente einer Menge stets einen positiven Abstand zueinander aufweisen, während zwei identische Elemente den Abstand Null voneinander besitzen. Die Symmetrie einer Metrik (**M2)**) besagt, dass der Abstand von x_1 zu x_2 genauso groß ist, wie der Abstand von x_2 zu x_1 . Die Dreiecksungleichung (**M3)**) beinhaltet, dass der direkte Abstand zwischen zwei Elementen x_1, x_2 nicht größer sein kann, als der Abstand zwischen den beiden unter Berücksichtigung des „Umwegs“ über ein drittes Element x_3 .

Definition 23 (Metrischer Raum) Es sei X eine nichtleere Menge und d eine Metrik auf X . Dann wird (X, d) als metrischer Raum bezeichnet. □

Folgen, Teilfolgen und Reihen

Die Definition einer Folge entstammt [Hil06] (S. 34).

Definition 24 (Folge) Es sei eine Menge X . Dann heißt eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow X$, die jedem Element von \mathbb{N} ein Element von X zuordnet, eine Folge in X , die als $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ geschrieben wird. □

Eine Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in X besitzt an der Stelle $x \in X$ einen Häufungspunkt, falls in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen ([AE] (S. 145)). Zu jeder Folge lassen sich Teilfolgen definieren, die zugehörige Definition ist aus [AE] (S. 148) entnommen.

Definition 25 (Teilfolge) Es sei $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , ferner sei $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung. Dann heißt $x \circ \psi$ Teilfolge von x . □

Zu einer Folge $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ wird mit $i_k = \psi(k)$ eine Teilfolge $x \circ \psi$ durch $\{x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ gekennzeichnet.

Die Reihe verallgemeinert die Summation auf unendlich viele Summanden ([Hil06] (S. 60)). Unter Verwendung von \mathbb{I}^+ wird durch $\{x_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Folge definiert, zu der sich mittels $y_N = x_1 + \dots + x_N$ die Folge der Partialsummen $\{y_N\}_{N \in \mathbb{I}^+}$ definieren lässt, diese spezielle Folge trägt die Bezeichnung unendliche Reihe oder abkürzend Reihe. Falls eine Reihe konvergiert, also der Grenzwert

$$y = \lim_{N \rightarrow \infty} y_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{B.3})$$

existiert, ist y die Summe oder der Wert der Reihe. Die abkürzende Schreibweise für (B.3) lautet

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{N \rightarrow \infty} y_N. \quad (\text{B.4})$$

Entsprechend der Ausführungen aus [Hil06] bezeichnet $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ sowohl die Folge der Partialsummen und damit also die Reihe als auch den Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} y_N$, falls dieser existiert.

Konvergente Folgen und abgeschlossene Teilmengen

Um auf einem Raum sinnvoll einen Konvergenzbegriff einzuführen, ist ein Abstandsbegriff vorauszusetzen ([Kre78] (S. 25)).

Definition 26 (Konvergente Folge) Es sei X ein metrischer Raum und $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann wird $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ als konvergent bezeichnet, falls es ein $x \in X$ gibt, sodass $\lim_{i \rightarrow \infty} d(x, x_i) = 0$. Ferner heißt $x \in X$ dann Grenzwert der Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. □

Gemäß [Kre78] (S. 25) wird als Notation für den Grenzwert einer Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ äquivalent

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x \quad \text{oder} \quad x_i \rightarrow x \text{ für } i \rightarrow \infty \quad (\text{B.5})$$

geschrieben. Eine konvergente Folge besitzt einen eindeutig bestimmten Grenzwert. Falls eine Folge konvergent ist, existiert nur ein Häufungspunkt, der gerade dem Grenzwert entspricht ([AE] (S.

148)). Andererseits kann eine Folge durchaus divergent sein und dennoch einen endlichen Häufungspunkt besitzen, dieser Fall betrifft die Folge aller Eigenwerte des Beispielsystems.

Folgender Satz knüpft die Existenz eines Häufungspunktes einer Folge an die Existenz einer konvergenten Teilfolge ([AE] (S. 149)).

Satz 12 *Eine Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt genau dann x als Häufungspunkt, wenn $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, die gegen x konvergiert.* \square

Der Nachweis der Konvergenz einer Folge lässt sich beispielsweise auf Basis des Majorantenkriteriums führen. Die dazu benötigte Definition einer Majoranten findet sich beispielweise in [Hil06] (S. 65).

Definition 27 (Majorante) Zur einer Reihe $\sum_{i \in \mathbb{I}^+} a_i, a_i \in \mathbb{R}$ wird die Reihe $\sum_{i \in \mathbb{I}^+} b_i, b_i \geq 0$ als Majorante bezeichnet, falls ein Index $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_i| < b_i, \forall i > i_0$ gilt. \square

Zu beachten ist, dass innerhalb der Definition der Majoranten nicht-negative $b_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{I}^+$ vorausgesetzt werden. Das Majorantenkriterium dient dem indirekten Nachweis der Konvergenz einer unendlichen Reihe, auf Basis der Konvergenz einer Majoranten.

Satz 13 *Besitzt eine Reihe $\sum_{i \in \mathbb{I}^+} a_i, a_i \in \mathbb{R}$ eine konvergente Majorante $\sum_{i \in \mathbb{I}^+} b_i, b_i \geq 0$, ist sie absolut konvergent und damit konvergent gemäß Definition 26.* \square

Die Betrachtung der Konvergenz von Reihen lässt sich zum Teil erheblich durch die Nutzung des Landau-Symbols \mathcal{O} und des damit verbundenen \mathcal{O} -Kalküls vereinfachen. Die zugehörige Definition entstammt [Hil06] (S. 345).

Definition 28 (Landausche Symbole) Es sei M eine Menge des $\mathbb{R}^n, x_0 \in \overline{M}$, sowie $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $g(x) \neq 0$ für $x \in M$ mit $|x - x_0| \ll 1$ gelte.

Dann heißt $f(x)$ von der Ordnung „groß O von $g(x)$ für $x \rightarrow x_0$ “, wenn eine positive Konstante $c < \infty$ existiert, sodass

$$|f(x)| \leq c |g(x)|$$

für $x \rightarrow x_0$. In diesem Fall lautet die Schreibweise $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$. \square

Im Fall reellwertiger f und g gilt $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$ für $x \rightarrow \infty$, falls eine positive Konstante c und ein $x_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass zu jedem $x > x_0$ die Ungleichung $|f(x)| \leq c |g(x)|$ erfüllt wird.

Vereinfacht gesagt beschreibt die Menge $\mathcal{O}(g(x))$ Funktionen, die in ihrem Wachstum nach oben durch $g(x)$ beschränkt sind, also nicht schneller wachsen als $g(x)$.

Bezüglich der Ordnung von $f(x)$ gelten mit einer Konstanten c_1 und unter Vernachlässigung der Abhängigkeit von x folgende Zusammenhänge

$$\text{LS1)} \quad f \in \mathcal{O}(f);$$

$$\text{LS2)} \quad \mathcal{O}(\mathcal{O}(f)) \in \mathcal{O}(f);$$

$$\text{LS3)} \quad c_1 \mathcal{O}(f) \in \mathcal{O}(f);$$

$$\text{LS4)} \quad \mathcal{O}(f + c_1) \in \mathcal{O}(f).$$

Darüber hinaus gilt für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bezüglich der Addition $\mathcal{O}(f_1) + \mathcal{O}(f_2) = \mathcal{O}(\max\{f_1, f_2\})$ und bezüglich der Multiplikation $\mathcal{O}(f_1) \cdot \mathcal{O}(f_2) = \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$.

Abgeschlossene Teilräume

Unter der Annahme eines metrischen Raums X wird eine Teilmenge M von X als abgeschlossen bezeichnet, falls das Komplement $X \setminus M$ offen ist ([Wer11] (S. 520)). Dann muss jedes $x \in X$ mit $x \notin M$ eine Umgebung von Punkten aufweisen, die ebenfalls nicht in M liegen. Im Falle einer abgeschlossenen Teilmenge M von X besitzt jede Folge mit Elementen in M , die zumindest in X konvergiert, einen ebenfalls in M gelegenen Grenzwert, es gilt $\overline{M} = M$ ([Kre78] (S. 30) oder [Alt06] (S. 18)). In diesem Zusammenhang sei auf die Definition abgeschlossener Operatoren in Definition 53 verwiesen.

Cauchy-Folgen und vollständige Räume

Der Begriff der Cauchy-Folge ist grundlegend für die Definition vollständiger Räume.

Definition 29 (Cauchy-Folge) Es sei X ein metrischer Raum und $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann heißt $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $k(\varepsilon)$ existiert, sodass

$$d(x_i, x_j) < \varepsilon \quad \forall i, j > k. \quad (\text{B.6})$$

□

Eine äquivalente Bedingung aus [Alt06] (S. 25) für eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fundamental oder Cauchy zu sein, lautet

$$d(x_i, x_j) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad i, j \rightarrow \infty. \quad (\text{B.7})$$

Auf Basis der durch eine Metrik erfüllten Dreiecksungleichung (Definition 22, **M3**) folgt, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, die Umkehrung dieser Behauptung gilt ausschließlich in vollständigen Räumen. Ein Raum wird als vollständig bezeichnet, falls jede Cauchy-Folge von Elementen aus dem Raum gegen einen Grenzwert konvergiert, der ebenfalls ein Element des Raums ist ([Wer11] (S. 2), Definition I.1.2). Die treffende Nomenklatur mathematischer Konstrukte deutet im Fall eines „vollständigen“ Raums bereits darauf hin, dass in einem derartigen Raum keine Elemente, speziell keine Grenzwerte von Cauchy-Folgen, fehlen.

Die Abgeschlossenheit eines Unterraums, eines vollständigen metrischen Raums, ist notwendig und hinreichend für die Vollständigkeit des betreffenden Unterraums. Der folgende Satz entspricht Theorem 1.4-7 aus [Kre78] (S. 30).

Satz 14 (Vollständiger Unterraum) *Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und Y ein Unterraum von X . Y ist genau dann vollständig, wenn Y abgeschlossen ist.* \square

Dichte Teilmenge

Der Begriff der dichten Teilmenge ist essentiell für verschiedene innerhalb dieser Arbeit verwendete mathematische Konstrukte. So bauen beispielsweise die Definition dicht definierter Operatoren aus Abschnitt B.4 oder die Definition stetig und dicht ineinander eingebetteter Räume auf dem Begriff der dichten Teilmenge auf. Darüber hinaus ist die Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge eines Raumes ein Kriterium für seine Separabilität. Die Definition der dichten Teilmenge ist in verschiedenen Werken zur Funktionalanalysis wie beispielsweise [Wer11] oder auch [Kre78; Kat95] zu finden.

Definition 30 (Dichte Teilmenge) *Es sei ein metrischer Raum X und M eine Teilmenge von X . Dann heißt M dichte Teilmenge von X , falls $\overline{M} = X$.* \square

Der Abschluss einer dichten Teilmenge M von X entspricht gerade dem gesamten Raum X . Im Vergleich dazu sei auf die abgeschlossene Teilmenge hingewiesen, für die $\overline{M} = M$ gilt. Äquivalent zu dem Ausdruck M ist dichte Teilmenge von X , ist der Ausdruck „ M ist dicht in X .“

Durch die Elemente einer dichten Teilmenge M kann jedes Element eines Raumes, in dem die Teilmenge dicht liegt, beliebig nah angenähert werden. Äquivalente Formulierungen dazu sind

- D1)** Zu jedem $x \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $y \in M$, mit $d(x, y) < \epsilon$ ([Kat95] (S. 130));
- D2)** In jeder nichtleeren, offenen Teilmenge von X , findet sich ein $y \in M$ ([Wer11] (S. 28));
- D2)** Da der metrische Raum X der Abschluss der dichten Teilmenge M ist, ist jedes Element $x \in X$ der Grenzwert einer Folge aus M ([Wer11] (S. 28)).

Ein bekanntes Fallbeispiel für eine dichte Teilmenge wird durch den Weierstraßschen Approximationssatz benannt ([Zei95] (S. 84), [Wer11] (S. 29)). Zudem liegen die auf einem kompakten Intervall stetigen Funktionen $C([a,b])$ für $1 \leq p < \infty$ dicht in $L^p([a,b])$ ([Wer11] (S. 31)).

Vervollständigung metrischer Räume

In nicht vollständigen metrischen Räumen existiert zumindest eine nicht konvergente Cauchy-Folge. Die Idee der Vervollständigung eines metrischen Raums besteht darin, die Grenzwerte nicht konvergenter Cauchy-Folgen zum Raum hinzuzunehmen und somit mittels möglichst weniger zusätzlicher Elemente einen vollständigen Raum zu erhalten ([Jä05] (S. 63)).

Die Vervollständigung metrischer Räume spielt eine zentrale Rolle bei der Überführung linearer partieller Differentialgleichungen in eine Darstellung mittels linearer Operatoren. Dieser Zusammenhang wird erneut bei der Einführung der Sobolew-Räume in Definition 96 auf Seite 317 deutlich.

Definition 31 (Vervollständigung metrischer Räume) Es sei ein metrischer Raum (X,d) . Dann wird die Erweiterung $(\widehat{X},\widehat{d})$ mit $X \subset \widehat{X}$ und der Einschränkung der Metrik $d = \widehat{d}|_{X \times X}$ als Vervollständigung bezeichnet, falls

V1) die Erweiterung $(\widehat{X},\widehat{d})$ vollständig ist;

V2) es sich um eine minimale vollständige Erweiterung $\overline{X} = \widehat{X}$ handelt.

Die Vervollständigung eines metrischen Raums ist eindeutig. □

Mathematisch äquivalente Formulierungen zu **V2)** sind, dass X dicht in \widehat{X} liegt bzw. die abgeschlossene Hülle \overline{X} von X gerade dem Raum \widehat{X} entspricht.

B.3 Normierter Raum

Norm und normierte Räume

Während eine Metrik vornehmlich dazu dient, die Distanz zwischen den Elementen einer Menge zu bestimmen, kann mittels einer Norm die Größe eines in der normierten Menge enthaltenen Elements definiert werden.

Definition 32 (Norm) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} . Dann wird eine Abbildung $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \|x\|_V$ mit den Eigenschaften

$$\mathbf{N1)} \quad \|x\|_V \geq 0$$

$$\mathbf{N2)} \quad \|x\|_V = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|\alpha x\|_V = |\alpha| \|x\|_V$$

$$\mathbf{N4)} \quad \|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$$

als Norm auf V bezeichnet. □

Definitionsgemäß (**N1**)) besitzt kein Element des betrachteten Vektorraums eine „Größe“ kleiner als Null. Nur das Nullelement besitzt eine Größe von Null (**N2**)). Die Kombination aus **N1**) und **N2**) führt auf die positive Definitheit der Norm. Falls ein Element des Vektorraums mit einem Skalar aus dem Körper multipliziert wird, so ändert sich sein Größe um eben die Multiplikation mit dem Betrag des Skalars (**N3**), Homogenität). Jede Norm erfüllt mit **N4**) die Dreiecksungleichung. Die Norm der Summe zweier Elemente ist nicht größer als die Summe der Normen der einzelnen Elemente. Werden von einer Abbildung alle Eigenschaften einer Norm, abgesehen von **N2**) erfüllt, so wird diese Abbildung als Halbnorm bezeichnet.

Falls auf einem Vektorraum eine Norm definiert ist, wird der Vektorraum als normierter Raum bezeichnet. Auf einem normierten Raum kann durch die Norm, mittels

$$d(x, y) = \|x - y\|_V \tag{B.8}$$

ein Abstands begriff und damit eine Metrik induziert werden.

Normäquivalenz

Alle über genau einem endlich-dimensionalen Vektorraum definierten Normen sind äquivalent, entsprechend resultieren aus verschiedenen Normen äquivalente Abstands begriffe. Diese Norm-äquivalenz gilt über unendlich-dimensionalen Vektorräumen im Allgemeinen nicht. Die folgende Definition beinhaltet ein Kriterium, dass zur Feststellung der Normäquivalenz zweier Normen auf unendlich-dimensionalen Räumen überprüft werden kann.

Definition 33 (Normäquivalenz) Es sei X ein Vektorraum und $\|(\cdot)\|_1$ sowie $\|(\cdot)\|_2$ Normen auf X . Die beiden Normen sind äquivalent, falls zwei positive Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, sodass

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \tag{B.9}$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist. □

Aus [Kre78] (S. 75) ist bekannt, dass auf einem Raum X äquivalente Normen eine gleiche Topologie T für den Raum X definieren. Aus der Äquivalenz zweier Normen $\|(\cdot)\|_1$ und $\|(\cdot)\|_2$ auf einem Vektorraum X folgt die Isomorphie der Paare $(X, \|(\cdot)\|_1)$ und $(X, \|(\cdot)\|_2)$ ([Wer11] (S. 83)).

Die anschauliche graphische Darstellung der für die Normäquivalenz charakteristischen Einschachtelung (B.9) ist für den Fall 2-dimensionaler Euklidischer Räume wohlbekannt und beispielsweise in [Wer11] (S. 25) zu finden.

Banachraum

Als ein wichtiger Sonderfall normierter Räume erfolgt die Definition eines Banachraums.

Definition 34 (Banachraum) Es sei X ein normierter Raum und $\|\cdot\|_X$ eine Norm auf X . Falls X vollständig in Bezug auf eine durch $\|\cdot\|_X$ definierte Metrik ist, wird X als Banachraum bezeichnet. \square

Der Nachweis der Äquivalenz zweier Normen, in denen ein Vektorraum jeweils vollständig und damit ein Banachraum ist, vereinfacht sich durch den folgenden Satz auf eine Richtung der Ungleichung aus Definition 33.

Satz 15 (Normäquivalenz in vollständigen Räumen) Es sei X ein Vektorraum, der mit den zwei Normen $\|(\cdot)\|_1, \|(\cdot)\|_2$ jeweils vollständig ist. Falls für eine positive Konstante c_1

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \quad \forall x \in X$$

gilt, dann sind $\|(\cdot)\|_1$ und $\|(\cdot)\|_2$ äquivalent. \square

Satz 15 entspricht Korollar IV.3.5 aus [Wer11] (S. 155).

Produkttopologie

Der folgende Satz bezüglich der auf einer externen direkten Summe (Definition 16) induzierten Produkttopologie entspricht inhaltlich Satz I.3.3 aus [Wer11] (S. 35).

Satz 16 (Produkttopologie) Es seien X_1, X_2 normierte Räume.

PT1) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$. Dann definiert

$$\|x\|_P = \begin{cases} (\|x_1\|_{X_1}^p + \|x_2\|_{X_2}^p)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty \\ \max(\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}) & \text{für } p = \infty \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

eine Norm auf der direkten Summe $X = X_1 \oplus X_2$. Die derart normierte direkte Summe wird mit $X_1 \oplus_p X_2$ bezeichnet;

PT2) Alle so definierten Normen sind äquivalent und erzeugen die Produkttopologie auf X , d.h.

$$\begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ hinsichtlich } \|\cdot\|_p \Leftrightarrow (x_{1,n}) \rightarrow x_1 \text{ und } (x_{2,n}) \rightarrow x_2; \quad (\text{B.11})$$

PT3) Falls X_1 und X_2 vollständig sind, ist auch $X_1 \oplus_p X_2$ vollständig. \square

Auf eine ohne Weiteres mögliche Generalisierung der Produkttopologie auf $N < \infty$ normierte Räume wird an dieser Stelle verzichtet.

B.4 Lineare Operatoren, Lineare Funktionale und Sesquilinearformen

Lineare Operatoren

Die Definition eines linearen Operators ([Kre78] (S. 82), [Kat95] (S. 16)) beinhaltet die allgemein gebräuchlichen Begriffe des Definitionsbereichs $\mathcal{D}(T)$ sowie des Bildbereichs $\mathcal{R}(T)$ eines linearen Operators ([Kre78] (S. 83)), auf die an dieser Stelle im einzelnen nicht eingegangen wird.

Definition 35 (Linearer Operator) Es seien X, Y Vektorräume über dem Körper \mathbb{K} . Ein Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow \mathcal{R}(T) \subset Y$ wird als linearer Operator bezeichnet, falls er die folgenden Bedingungen erfüllt:

- O1)** Sowohl der Definitionsbereich als auch der Bildbereich des Operators sind Vektorräume über dem gleichen Körper, der Operator erhält die Vektorraumstruktur;
- O2)** Für alle Elemente aus seinem Definitionsbereich $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ sowie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ erfüllt der Operator die Bedingungen der Homogenität und Additivität

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2. \quad \square$$

In Definition 35 bezeichnet $\mathcal{D}(T)$ den Definitionsbereich von T , $\mathcal{R}(T)$ ist die Menge aller Tx die sich unter Berücksichtigung aller $x \in \mathcal{D}(T)$ ergibt. Darüber hinaus bezeichnet $\mathcal{N}(T)$ die Menge aller $x \in \mathcal{D}(T)$ für die $Tx = 0$ gilt. Weitere Ausführungen zum Sprachgebrauch linearer Operatoren lassen sich beispielsweise [Kre78] (S. 82f) entnehmen. Synonym zum Begriff des linearen Operators finden die Bezeichnung lineare Abbildung oder Homomorphismus Verwendung, der Sonderfall $Y = X$ trägt die Bezeichnung Endomorphismus ([Heu92] (S. 78)). Da innerhalb dieser Arbeit lineare Abbildungen betrachtet werden, bezeichnet die abkürzende Bezeichnung Operator stets einen linearen Operator.

Bildet ein Operator in einen Vektorraum Y ab, wird bei der Einführung des Operators auf die explizite Nennung des Bildbereichs verzichtet und kurz $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ geschrieben.

Unter der Annahme, dass X ein metrischer Raum ist und $\mathcal{D}(T)$ dicht in X liegt, wird $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ als dicht definiert bezeichnet. Bei einem dicht definierten Operator ist der Definitionsbereich also eine dichte Teilmenge von X (Definition 30) und entsprechend gilt $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$.

Lineare Funktionale

Lineare Funktionale ([Kre78] (S. 104)) sind spezielle lineare Operatoren, die im Verlauf der Arbeit an verschiedenen Stellen auftreten. Als wichtiges regelungstechnisch relevantes Beispiel sind verschiedentlich die Ausgangsoperatoren von Zustandsraumdarstellungen linearer Systeme durch lineare Funktionale realisierbar.

Definition 36 (Lineares Funktional) Es sei X ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} . Ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ heißt lineares Funktional, falls $Y = \mathbb{K}$. □

Ein Funktional hebt sich von gewöhnlichen linearen Operatoren durch seinen Bildbereich ab, dieser entspricht gerade dem Körper, über dem der Vektorraum X definiert ist.

Sesquilinearform

Die Definition einer Sesquilinearform sowie ihrer Eigenschaften ist in zahlreichen Grundlagenwerken zur Operatortheorie zu finden, stellvertretend seien [Wei] (S. 20) und [NS] (S. 277) genannt. Im Rahmen dieser Arbeit gehen einige grundlegende Eigenschaften von Sesquilinearformen bei der Überführung der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichungen des trimorphen Biegewandlers aus dem Anhang A.2 in die Operatordarstellung ein.

Definition 37 (Sesquilinearform) Es sei X ein Vektorraum, $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Eine Abbildung $t : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto t(x, y)$ mit

- S1)** $t(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha t(x_1, y) + \beta t(x_2, y), \forall y \in Y$ (Linearität bezüglich X)
S2) $t(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha} t(x, y_1) + \overline{\beta} t(x, y_2), \forall x \in X$ (Semilinearität bezüglich Y)

wird als Sesquilinearform bezeichnet. □

Im Fall komplexer Vektorräume $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $Y = X$ ist eine Sesquilinearform über die sogenannte Polarisierungsidentität ([Wei] (S. 20)) vollständig durch ihre zugehörige quadratische Form

$$q : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } q(x) = t(x, x) \text{ und } x \in X \quad (\text{B.12})$$

bestimmt.

Weiterführende Charakterisierungen von Sesquilinearformen sind anhand der folgenden Eigenschaften möglich. Unter den Voraussetzungen aus Definition 37 und $Y = X$ heißt eine Sesquilinearform $t : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$:

S3) hermitesch, falls $t(x_1, x_2) = \overline{t(x_2, x_1)}, \forall x_1, x_2 \in X$ gilt;

S4) positiv definit, falls $t(x_1, x_1) = q(x_1) \geq 0$ und $q(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \forall x_1, x_2 \in X$ gilt.

Eigenschaft **S3)** kann nur dann erfüllt sein, wenn das Bild der Sesquilinearform für alle Urbilder stets reell ist. Äquivalent dazu ist, dass $t(x, x) = q(x)$ für alle $x \in X$ reell ist (Satz 1.17 [Wei] (S. 21f)). Im Fall reeller Vektorräume, entspricht diese Forderung der Symmetrie einer Bilinearform. **S4)** besagt, dass das Bild der zugehörigen quadratischen Form einer Sesquilinearform stets positiv sein muss und dann und nur dann Null, wenn das Urbild Null ist. In diesem Zusammenhang sei auch auf die Charakterisierung selbstadjungierter Operatoren anhand ihres numerischen Bildbereichs entsprechend Definition 72 auf Seite 278 verwiesen.

Invertierung linearer Operatoren

Damit ein Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow \mathcal{R}(T) \subset Y$ bezüglich seines Bildbereichs $\mathcal{R}(T)$ invertierbar ist, muss er injektiv sein. Jedes Element aus seinem Definitionsbereich muss einem anderen Element in seinem Bildbereich zugeordnet sein ([Kre78] (S. 614))

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2.$$

Es existiert dann eine eindeutige Beziehung zwischen dem Definitionsbereich des Operators und seinem Bildbereich. Da nur der Bildbereich betrachtet wird, ist der Operator zudem surjektiv und damit bezüglich der betrachteten Mengen $\mathcal{D}(T), \mathcal{R}(T)$ auch bijektiv. Eine sehr anschauliche weiterführende Betrachtung findet sich in [Kre78] (S. 613f).

Definition 38 (Inverser Operator) Es seien X, Y lineare Vektorräume und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow \mathcal{R}(T) \subset Y$ ein linearer Operator. T wird als invertierbar bezeichnet, falls es einen Operator $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow \mathcal{D}(T)$ gibt, sodass $T^{-1}Tx = x, \forall x \in \mathcal{D}(T)$ beziehungsweise $TT^{-1}y = y, \forall y \in \mathcal{R}(T)$ gilt. Der Operator T^{-1} heißt zu T inverser Operator. □

Die aufgeführte Definition kann beispielsweise ebenfalls in [Kre78] (S. 87) oder [CZ95] (S. 582) nachgeschlagen werden. Falls der inverse Operator T^{-1} existiert, ist dieser ebenfalls ein linearer Operator.

Kriterium für die Invertierbarkeit linearer Operatoren

Ein Kriterium für die Existenz eines inversen Operators T^{-1} zu dem Operator T basiert auf einer Betrachtung des Nullraums $N(T)$ von T ([Kre78] (S. 87)).

Satz 17 (Zusammenhang Kern und Invertierbarkeit) Ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow \mathcal{R}(T) \subset Y$ ist dann und nur dann invertierbar, wenn $N(T) = 0$ und somit

$$Tx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

gilt. □

Aus dem kurzen Beweis ([Kre78]) zum ersten Teil von Satz 17 geht hervor, dass $N(T) = 0$ gleichbedeutend mit der Injektivität des Operators auf den betrachteten Untermengen $\mathcal{D}(T), \mathcal{R}(T)$ ist.

Gleichheit, Einschränkung und Erweiterung linearer Operatoren

Per Definition muss ein Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ nicht für jedes Element des Vektorraums X definiert sein. Um zwei Operatoren $S : \mathcal{D}(S) \subset X \rightarrow X$ und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ miteinander identifizieren zu können, reicht es demnach nicht aus, dass sich durch ihre Anwendung auf jedes, beiden Definitionsbereichen gemeinsame Element $x \in \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$, das gleiche Bild ergibt $Sx = Tx$. Zusätzlich müssen auch die beiden Definitionsbereich beider Operatoren übereinstimmen.

Definition 39 (Gleichheit zweier Operatoren) Es sei X ein Vektorraum und $S : \mathcal{D}(S) \subset X \rightarrow X$ und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ lineare Operatoren. S und T sind gleich $S = T$, falls ihre Definitionsbereiche identisch sind $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$ und zudem die Bilder jedes Elements der Definitionsbereiche übereinstimmen $Sx = Tx, \forall x \in \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$. □

Auf natürlich Weise ergibt sich analog zur Gleichheit zweier Operatoren die Definition der Einschränkung und Erweiterung von Operatoren ([Kre78] (S. 99), [Kat95] (S. 142)).

Definition 40 (Einschränkung und Erweiterung) Es sei ein Vektorraum X und lineare Operatoren $S : \mathcal{D}(S) \subset X \rightarrow X$ und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$. Falls

$$Sx = Tx \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$$

gilt, heißt S Erweiterung zu T die abkürzend durch $S \supseteq T$ notiert wird. Umgekehrt heißt T Einschränkung zu S , geschrieben als $T \subseteq S$. □

Auf Basis der Erweiterung linearer Operatoren wird der maximale Operator eingeführt. Der maximale Operator \tilde{T} zeichnet sich durch einen Definitionsbereich aus, der wirklich alle Elemente x aus X enthält, deren Abbildung am maximalen Operators ebenfalls in X liegt. Es lässt sich demnach keine Erweiterung zum maximalen Operator finden, deren Bild ebenfalls in X liegt und deren Definitionsbereich größer als der des maximalen Operators \tilde{T} ist ([Kat95] (S. 144)).

Graph eines linearen Operators

Der Graph eines linearen Operators wird zur Definition der Abgeschlossenheit (Definition 53) unbeschränkter Operatoren verwendet. Die folgende Definition entstammt [CZ95] (S. 597). Im regelungstechnischen Kontext kommt dem Graph eines Operators besondere Bedeutung im Hinblick auf die Graphen- beziehungsweise Gap-Metrik zu.

Definition 41 (Graph eines linearen Operators) Es seien normierte Räume X, Y . Zu einem linearen Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ heißt die Menge der geordneten Paare $\text{Gr}(T) = \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\} \subset X \times Y$, in dem Produktraum $X \times Y$ Graph $\text{Gr}(T)$ von T . \square

Jedes Element des Graphen $\text{Gr}(T)$ setzt sich aus einem Element des Definitionsbereichs $\mathcal{D}(T) \subset X$ von T sowie dem zugehörigen Element aus dem Bildbereich Tx zusammen. Der Graph ist demnach ein Unterraum des Produktraums $X \times Y$.

Für Elemente des Definitionsbereichs des Operators $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ ist die Graphennorm durch $\|x\|_{\text{Gr}} = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ definiert.

B.4.1 Stetige lineare Operatoren und Sesquilinearformen

Stetige lineare Operatoren

Anschaulich impliziert die Stetigkeit eines linearen Operators, dass kleine Änderungen seines Urbildes zu kleinen Änderungen seines Bildes führen. Die Definition stetiger Operatoren findet sich in jedem mathematischen Grundlagenwerk angrenzender Themengebiete, die folgende Variante orientiert sich an [Zei95] (S. 26).

Definition 42 (Stetige lineare Operatoren) Es seien normierte Räume X, Y und ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y, x \mapsto Tx$. T wird genau dann als stetig bezeichnet, falls er eine der gleichwertigen Bedingungen erfüllt:

SO1) (Stetigkeit) Zu jedem Punkt $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ und jeder Schranke $\epsilon > 0$ existiert eine Schranke $\delta(\epsilon, x_0) > 0$, sodass

$$\|x_0 - x\|_X < \delta(\epsilon, x_0) \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \quad \Rightarrow \quad \|Tx_0 - Tx\|_Y < \epsilon;$$

SO2) (Folgenstetigkeit) Das Bild jeder im Definitionsbereich konvergenten Folge $\{x_n\} \in \mathcal{D}(T)$ ist konvergent, es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ mit } x \in \mathcal{D}(T) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx.$$

□

Die gleichwertige Definition der Stetigkeit anhand der Folgenstetigkeit ermöglicht einen einfacheren „Vergleich“ mit der Definition abgeschlossener Operatoren (Definition 53). Für beschränkte Operatoren folgt aus der Konvergenz der Folge im Urbildbereich die Konvergenz der Folge der Bilder.

Für den Nachweis der Stetigkeit linearer Operatoren lässt sich der folgende Satz aus [Wei] (S. 69) heranziehen.

Satz 18 (Zur Stetigkeit äquivalente Aussagen) Es seien normierte Räume X, Y und ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$, dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

SO1) T ist stetig;

SO2) T ist stetig im Ursprung;

SO3) T ist beschränkt, es existiert eine reelle positive Konstante c_1 , sodass

$$\|Tx\|_Y \leq c_1 \|x\|_X \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

□

Die Existenz einer positiven Konstanten c_1 in **SO3)** impliziert, dass ein beschränkter Definitionsbereich, wie beispielsweise eine Einheitskugel, zu einem ebenfalls beschränkten Bildbereich führt. Die Anwendung eines stetigen Operators auf eine beschränkte Menge erhält die Eigenschaft der Beschränktheit ([Kre78] (S. 91)). Daher werden stetige Operatoren auch als beschränkte Operatoren bezeichnet. Innerhalb dieser Arbeit werden beide Begriffe synonym gebraucht. Ferner ist ein beschränkter linearer Operator dann und nur dann abgeschlossen, wenn sein Definitionsbereich abgeschlossen ist ([Kat95] (S. 164)).

Operatornorm

Die Interpretation einer Norm eines Elements eines normierten Raums als dessen „Größe“ führt auf eine anschauliche Deutung der Beschränktheit eines Operators. Die Konstante c_1 steht für eine obere Schranke der „Vergrößerung“ aller Elemente aus dem Definitionsbereich eines stetigen Operators in Folge seiner Anwendung. Zu beachten ist dabei, dass es sich um eine einzelne Schranke für alle Elemente aus dem Definitionsbereich handelt, somit c_1 nicht von der Wahl eines bestimmten $x \in \mathcal{D}(T)$ abhängt. Die anschauliche Deutung trägt allerdings der Tatsache, dass in Definition 42 unterschiedliche Normen auf den verwendeten Räumen genutzt werden können, nur bedingt Rechnung. Die Frage nach der kleinsten oberen Schranke, die die Beziehung aus Satz 18 erfüllt, führt auf die Definition der Operatornorm.

Definition 43 (Norm eines stetigen Operators) Es seien normierte Räume X, Y und ein stetiger linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$. Dann ist die Norm von T äquivalent durch

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in \mathcal{D}(T), \|x\|_X=1} \|Tx\|_Y$$

definiert. □

Beschränkte lineare Operatoren sind eine wichtige Untermenge allgemeiner linearer Operatoren. Aus diesem Grund seien einige wichtige Beispiele beschränkter Operatoren genannt. Die Identität $I_X : X \rightarrow X, x \mapsto I_X x = x$ auf einem Vektorraum X , ist beschränkt mit der Norm $\|I\| = 1$. Gleichsam ist die Nullabbildung $0 : X \rightarrow Y, x \mapsto 0x = 0$ beschränkt mit $\|0\| = 0$. Der folgende Satz trifft eine Aussage über die Beschränktheit linearer Operatoren auf endlich-dimensionalen Räumen.

Satz 19 (Operatoren auf endlich-dimensionalen Räumen) Es sei X ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $T : X \rightarrow X$ ein linearer Operator. Dann ist T beschränkt. □

Der Beweis zu Satz 19 findet sich in [Kre78] (S. 96). Als Konsequenz aus Satz 19 lassen sich alle Systemmatrizen endlich-dimensionaler LZI-Systeme in die Klasse der beschränkten linearen Operatoren einordnen.

Stetige Fortsetzung

Die Aussage über die Existenz einer stetigen und damit beschränkten linearen Fortsetzung eines stetigen linearen Operators von seinem Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ auf den Abschluss seines Definitionsbereichs wird unter anderem für die stetige Fortsetzung stark stetiger Halbgruppen benötigt. Darüber hinaus bildet die stetige Fortsetzung die Basis, um im Rahmen des Gelfandschen Dreiers in Anhang B.9.1 Funktionale aus dem „größeren Raum“ als Innenprodukt auf dem Pivotraum darzustellen ([Wlo82] (S. 259)). Der folgende Satz findet sich in ähnlicher Formulierung beispielsweise in [Kat95] (S. 133), [Kre78] (S. 100) oder [Wer11] (S. 48). Die an dieser Stelle verwendete Fassung findet sich samt eines Beweises in [Wei] (S. 82f).

Satz 20 Es sei X ein normierter und Y ein Banachraum sowie $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ ein stetiger Operator. Dann besitzt T eine eindeutige, stetige Fortsetzung

$$\hat{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \rightarrow Y,$$

mit der Norm $\|T\| = \|\hat{T}\|$. Handelt es sich bei X um einen (Prä-)Hilbertraum, so kann T auf ganz X fortgesetzt werden, ohne die Norm zu vergrößern. □

Synonym zum Begriff der stetigen Fortsetzung wird an dieser Stelle der Begriff der stetigen Erweiterung gebraucht. Für die in Satz 20 angenommenen Operatoren wird für alle $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$ die eindeutige stetige Fortsetzung auf den Abschluss des Definitionsbereichs durch die Grenzwerte

$$\widehat{T}x = y \quad \text{für } y = \lim_{i \rightarrow \infty} Tx_i, y \in Y, \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(T) \quad (\text{B.13})$$

definiert. Die stetige Fortsetzung \widehat{T} eines stetigen Operators T erzeugt für Elemente aus $\mathcal{D}(T)$ das gleiche Bild wie T , es gilt

$$\widehat{T}x = Tx \quad \forall x \in \mathcal{D}(T). \quad (\text{B.14})$$

Im Gegensatz zu T gehören zum Definitionsbereich der stetigen Fortsetzung \widehat{T} auch die jeweiligen Grenzwerte der konvergierenden Folgen, deren Folgenglieder in $\mathcal{D}(T)$ liegen und deren Grenzwerte damit jeweils in $\overline{\mathcal{D}(T)}$ liegen. Das Bild eines derartigen Grenzwertes unter der stetigen Fortsetzung entspricht gerade dem Grenzwert der Bilder der Folge unter dem ursprünglichen Operator

$$\widehat{T} \left(\underbrace{\lim_{i \rightarrow \infty} x_i}_{x \in \overline{\mathcal{D}(T)}} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{Tx_i}_{y \in Y}. \quad (\text{B.15})$$

Stetige und dichte Einbettung

Insbesondere in Bezug auf die Konstruktion von Raumskalen in Abschnitt Definition B.9.1 folgt die Definition des Begriffs der Einbettung. In der Literatur lässt sich eine Definition der Einbettung beispielsweise in [Kre78] (S. 109), [Zei95] (S. 261), [Alt06] (S. 144) oder [Dob06] (S. 24) finden.

Definition 44 (Einbettung) Es seien Y und X normierte Räume. Falls eine injektive Abbildung $i_X \in \mathcal{L}(Y, X)$ existiert, heißt i_X stetige Einbettung von Y nach X und Y ist stetig eingebettet in X . Die stetige Einbettung wird geschrieben als $Y \hookrightarrow X$. Eine stetige Einbettung heißt ferner stetige dichte Einbettung, falls Y dicht in X liegt, also falls $\overline{Y} = X$. Eine (stetige) dichte Einbettung wird als $Y \xhookrightarrow{d} X$ geschrieben. □

Im Fall einer stetigen Einbettung von Y nach X existiert ein $c > 0$, sodass

$$\|i_X x\|_X \leq c_1 \|x\|_Y, \quad \forall x \in Y. \quad (\text{B.16})$$

Stetige lineare Funktionale

Als Spezialfall linearer Funktionale (Definition 36) folgt die Definition stetiger linearer Funktionale, die im Allgemeinen die Grundlage zur Definition des topologischen Dualraums eines Vektorraums darstellen und in Anhang B.5.4 zur Einführung des Dualraums eines Hilbertraums verwendet werden.

Definition 45 (Stetige lineare Funktionale) Es sei ein Vektorraum X über dem Körper \mathbb{K} und ein lineares Funktional $\psi : \mathcal{D}(\psi) \subset X \rightarrow \mathbb{K}$. ψ wird genau dann als stetig bezeichnet, wenn es beschränkt ist, also wenn eine reelle positive Konstante c_1 existiert, sodass

$$|\psi(x)| \leq c_1 \|x\|_X \quad (\text{B.17})$$

für alle $x \in X$ gilt. □

Stetige Sesquilinearformen

Die Definition einer stetigen Sesquilinearform baut unmittelbar auf der Definition der Sesquilinearform (Definition 37) auf, beinhaltet aber die zusätzliche Annahme eines normierten Raums X . Sie wird daher mit der fortlaufenden Kennzeichnung der Eigenschaften von Sesquilinearformen versehen.

Definition 46 S5) (Stetige Sesquilinearformen) Seien X, Y normierte Vektorräume, $x \in X, y \in Y$. Eine Sesquilinearform $t : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto t(x, y)$ heißt beschränkt, falls eine positive Konstante c_1 existiert, sodass

$$|t(x, y)| \leq c_1 \|x\|_X \|y\|_Y, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

□

Definition 46 lehnt sich an die in [DL88] (S. 351) eingeführte Definition der Beschränktheit von Sesquilinearformen an. Analog zu linearen Operatoren sind die Eigenschaften der Stetigkeit und Beschränktheit einer Sesquilinearform gleichwertig. Der Raum der stetigen Sesquilinearformen von $X \times Y$ nach \mathbb{K} wird mit $\mathcal{S}(X \times Y)$ bezeichnet, für den Sonderfall $Y = X$ lautet die Bezeichnung $\mathcal{S}(X)$. Entsprechend der Definition aus [Heu92] (S. 185) wird eine stetige Sesquilinearform $t \in \mathcal{S}(X)$ als koerziv bezeichnet, falls eine positive Konstante c_2 existiert, sodass

$$|t(x, x)| \geq c_2 \|x\|_X, \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.18})$$

Demnach sind koerzive stetige Sesquilinearformen von oben und von unten beschränkt. Eine Definition der Koerzitivität auf Basis des Realteils des Bildes der Sesquilinearform $\operatorname{Re}(t(x, x))$ findet sich beispielsweise in Definition 4. aus [DL88] (S. 368).

B.4.2 Räume stetiger linearer Operatoren

Die Menge der stetigen linearen Operatoren, die zwischen zwei Vektorräumen definiert sind, genügt selbst ebenfalls den Bedingungen eines Vektorraum gemäß Definition 14 von Seite 226 ([Wei]).

Einleitend erfolgen die Definition des Raums der stetigen linearen Operatoren sowie der Banachalgebra stetiger Endomorphismen. Anschließend werden verschiedene Topologiebegriffe auf dem Raum der stetigen linearen Operatoren eingeführt. Darauf aufbauend finden sich abschließend Begrifflichkeiten zur Konvergenz von Operatorfolgen.

Der Raum $\mathcal{L}(X, Y)$

Der Vektorraum der beschränkten Operatoren $T : X \rightarrow Y$ wird mit $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnet, für den Sonderfall stetiger Endomorphismen $T : X \rightarrow X$ lautet die Bezeichnung $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$. Versehen mit der Operatornorm (Definition 43) wird der Raum der stetigen linearen Operatoren zu einem normierten Raum. Die Vollständigkeit von $\mathcal{L}(X, Y)$ hängt ausschließlich von Y ab, falls Y ein Banachraum ist, gilt dies auch für $\mathcal{L}(X, Y)$. Damit besteht die Möglichkeit, Aussagen über die Konvergenz von Folgen stetiger Operatoren im Sinne der Operatornorm zu treffen. Aus [Wer11] (S. 47) ist der folgende Satz über die Vollständigkeit der Räume linearer Operatoren bekannt.

Satz 21 (Vollständigkeit von $\mathcal{L}(X, Y)$) Falls Y vollständig ist, ist der Vektorraum $\mathcal{L}(X, Y)$, ausgestattet mit der Operatornorm gemäß Definition 43 ebenfalls vollständig und damit ein Banachraum. □

Ein Beweis zu Satz 21 findet sich in [Wer11] (S. 47). Der wichtige Spezialfall der Menge der stetigen linearen Funktionale auf einem Hilbertraum wird in Anhang B.5.4 eingeführt.

Banachalgebra stetiger Endomorphismen

Ausgehend von einem normierten Vektorraum X kann der Spezialfall einer Banachalgebra definiert werden, dazu sind die folgenden Eigenschaften zu erfüllen:

BA1) X ist ein Banachraum;

BA2) X ist unter einer multiplikativen Verknüpfung eine assoziative Algebra;

BA3) Die auf X definierte Norm ist submultiplikativ.

Bezogen auf den Spezialfall der beschränkten Endomorphismen ist der Vektorraum $\mathcal{L}(X)$ versehen mit der Operatornorm und unter Annahme eines Banachraums X ebenfalls ein Banachraum. Neben der additiven Verknüpfung zweier beschränkter Operatoren ist auf $\mathcal{L}(X)$ für $S, T \in \mathcal{L}(X)$ auch die multiplikative Verknüpfung $\cdot : X \times X \rightarrow X$, $(S, T) \mapsto S \cdot T$ definiert. Abkürzend wird $T \cdot S = TS$ notiert. Da für $R, S, T \in \mathcal{L}(X)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (T + S)R &= TR + SR \in \mathcal{L}(X), \\ T(S + R) &= TS + TR \in \mathcal{L}(X), \\ \alpha(TS) &= (\alpha T)S = T(\alpha S) \in \mathcal{L}(X), \end{aligned} \tag{B.19}$$

gilt, genügt $(\mathcal{L}(X), \cdot)$ den Anforderungen an eine Algebra über dem Körper \mathbb{K} . Zudem ist die Multiplikation stetiger Endomorphismen $R, S, T \in \mathcal{L}(X)$ assoziativ

$$(RS)T = R(ST),$$

demnach ist $(\mathcal{L}(X), \cdot)$ eine assoziative Algebra. Zusammen mit der Submultiplikativität der Operatornorm

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\| \quad (\text{B.20})$$

erfüllt der Raum der stetigen Endomorphismen auf einem Banachraum die Bedingungen für eine Banachalgebra mit Einselement. Diese Klassifizierung bezüglich der algebraischen Struktur erlaubt weitreichende Aussagen für jedes einzelne Element der genannten Banachalgebra. Unter der zusätzlichen Annahme einer komplexen Banachalgebra $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lassen sich von endlich-dimensionalen Matrizen bekannte Aussagen bezüglich des Spektrums direkt auf beschränkte Operatoren übertragen, insbesondere ist deren Spektrum nichtleer und kompakt ([Heu92] (S. 474)). Detaillierte Betrachtungen finden sich in [Heu92].

Topologien auf $\mathcal{L}(X, Y)$ und Konvergenz von Operatorfolgen

Dieser Abschnitt enthält verschiedene Begriffe bezüglich möglicher Topologien des Raums der beschränkten linearen Operatoren. Da unterschiedliche Topologien im Allgemeinen nicht auf äquivalente Konvergenzbegriffe führen, wird auf Basis verschiedener Topologien die Konvergenz von Operatorfolgen im Sinne der entsprechenden Topologie definiert. Ein kurzer Überblick zur historischen Entwicklung des mathematischen Teilgebiets der Topologie sowie die Einordnung in den mathematischen Gesamtkontext findet sich in [Jä05]. Die Definitionen verschiedener Topologiebegriffe bezüglich des Raums der beschränkten linearen Abbildungen $\mathcal{L}(X, Y)$ sind in ausführlicher Form beispielsweise in [DS58] (S. 475) oder [Kat95] (S. 150) zu finden.

Definition 47 (Gleichmäßige Operatortopologie (Normtopologie)) Auf dem Raum der beschränkten Operatoren $\mathcal{L}(X, Y)$ wird die, durch die Norm

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

definierte, Topologie als gleichmäßige Operatortopologie bezeichnet. □

Da die gleichmäßige Operatortopologie auf Basis der Operatornorm (Definition 43) definiert wird, ist auch die Bezeichnung Normtopologie üblich. Die Definition der beiden folgenden Operatortopologien entspricht der Definition in [DS58] (S. 476).

Definition 48 (Starke und schwache Operatortopologie) Es sei X_1 endliche Untermenge von X und Y_1' endliche Untermenge von Y' . Dann wird die starke Operatortopologie in $\mathcal{L}(X, Y)$ durch die Umgebungen

$$U(T; X_1, \epsilon) = \{S \mid S \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ und } \|(T - S)x\| < \epsilon \forall x \in X_1\}$$

definiert. Die schwache Operatortopologie in $\mathcal{L}(X, Y)$ ist definiert durch Umgebungen der Form

$$U(T; X_1, Y_1', \epsilon) = \{S \mid S \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ und } \|\psi(Tx) - \psi(Sx)\| < \epsilon \forall x \in X_1, \forall \psi \in Y_1'\}.$$

□

Die zur Definition der Umgebungen im Fall der starken bzw. schwachen Operatortopologie eingesetzten Normen werden hinsichtlich der Elemente von Y bzw. hinsichtlich der Elemente eines zugrunde liegenden Zahlenkörpers gebildet.

Die aufgeführten Topologiebegriffe sind nicht die einzig möglichen, aber die gebräuchlichsten Topologien ([DS58] (S. 475)) für den Raum $\mathcal{L}(X, Y)$. Zudem liegen die ihnen zugehörigen Konvergenzbegriffe der Klassifizierung von Operatorhalbgruppen in gleichmäßig stetige oder lediglich stark stetige Operatorhalbgruppen zugrunde. Aus [Kre78] (S. 263f) stammen die folgenden Konvergenzbegriffe für Operatorfolgen.

Definition 49 (Konvergenz von Operatorfolgen) Es seien X, Y metrische Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein beschränkter Operator. Dann wird eine Folge $\{T_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von Operatoren mit $T_i \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\forall i \in \mathbb{I}^+$ als

OK1) konvergent im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie bezeichnet, falls für $i \rightarrow \infty$ $\|T - T_i\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0$ folgt und damit $\{T_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ im Sinne der Operatornorm (Definition 43) gegen T konvergiert;

OK2) konvergent im Sinne der starken Operatortopologie bezeichnet, falls für $i \rightarrow \infty$ $\|(T - T_i)x\|_Y \rightarrow 0 \forall x \in X$ folgt und damit die Folge der Bilder $\{T_i x\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ für alle Urbilder aus dem Definitionsbereich $x \in X$ im Sinne der Norm des Bildbereichs gegen Tx konvergiert;

OK3) konvergent im Sinne der schwachen Operatortopologie bezeichnet, falls für $i \rightarrow \infty$ $|\psi(Tx) - \psi(T_i x)| \rightarrow 0 \forall x \in X \forall \psi \in Y'$ folgt und damit die Abbildung der Folge der Bilder eines beliebigen $x \in X$ an jedem beliebigen $\psi \in Y'$ auf dem Körper gegen $\psi(Tx)$ konvergiert.

□

Die aus den verschiedenen Konvergenzbegriffen resultierenden Grenzwerte T werden [Kre78] (S. 264) folgend als gleichmäßiger, starker oder schwacher Operatorgrenzwert bezeichnet. Konvergenz

im Sinne eines stärkeren topologischen Begriffs impliziert dabei die Konvergenz im Sinne der jeweils schwächeren Topologien, laut [Kre78] (S. 264) gilt **OK1** \Rightarrow **OK2** \Rightarrow **OK3**).

B.4.3 Projektionen

Die Definition und Eigenschaften von Projektionen lassen sich verschiedenen Werken zur Funktionalanalysis oder Operatortheorie entnehmen, stellvertretend seien an dieser Stelle [Kat95; Heu92; Alt06] und [Wer11] genannt. Unter der Annahme eines Unterraums Y des Vektorraums X wird ein Endomorphismus $P : X \rightarrow X$ als Projektion auf Y bezeichnet, falls $P^2 = P$ ist und zudem $\mathcal{R}(P) = Y$ ([Alt06] (S. 295)). Die Idempotenz einer Projektion auf Y ist gleichbedeutend mit $P = I$ auf Y ([Alt06] (S. 295)). Demnach entspricht die Anwendung einer Projektion auf Y auf Elemente von Y gerade der Anwendung der Identität auf Y , es gilt $Py = y, \forall y \in Y$. Im Allgemeinen sind lineare Projektionen nicht zwingend stetig, die verallgemeinerten Betrachtungen sind u.a. in [Alt06] (S. 295) zu finden. Die Annahme einer Projektion $P : X \rightarrow X$ erlaubt die Zerlegung von X in eine interne direkte Summe (Definition 17) aus dem Bild und aus dem Nullraum der Projektion

$$X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P). \quad (\text{B.21})$$

Die Projektion von $x \in X$ auf das Bild $\mathcal{R}(P)$ erfolgt entlang des Nullraums der Projektion P , es gilt $x = Px + Qx \Leftrightarrow Q = I - P$. Für jede Projektion $P : X \rightarrow X$ ist auch $I - P$ Projektion mit $\mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P)$ und $\mathcal{N}(I - P) = \mathcal{R}(P)$ ([Alt06] (S. 295)). Darüber hinaus lässt sich der letztgenannten Quelle ebenfalls entnehmen, dass auf jeden Unterraum Y eines Vektorraums X eine Projektion existiert.

Innerhalb dieser Arbeit gilt es in erster Linie Projektionen auf endlich-dimensionale Unterräume von Hilberträumen zu untersuchen. Unter Annahme eines Hilbertraums X existiert gemäß Satz IV.6.2 aus [Wer11] (S. 164) zu jedem endlich-dimensionalen Unterraum Y von X eine stetige lineare Projektion $P \in \mathcal{L}(X)$ auf Y mit $\|P\| \leq \dim Y$.

Allgemeine Aussagen zu den Eigenschaften stetiger linearer Projektionen $P \in \mathcal{L}(X)$ auf normierten Räumen X lassen sich beispielsweise Lemma IV.6.1 aus [Wer11] (S. 163) entnehmen. Insbesondere sind in solchen Fällen sowohl $\mathcal{R}(P)$ als auch $\mathcal{N}(P)$ abgeschlossen.

B.4.4 Kompakte Operatoren

In dieser Arbeit werden grundlegende Eigenschaften kompakter Operatoren in erster Linie für die Betrachtung der kompakten Resolvente des Systemoperators und der Inversen des Steifigkeitsoperators des Beispielsystems benötigt. Darüber hinaus wird für die in Satz 65 auf Seite 334 definierte Unterklasse der Pritchard-Salamon-Systeme ein kompakter Hankel-Operator vorausgesetzt. Einleitend enthält dieser Abschnitt die Definition kompakter Operatoren sowie Kriterien, anhand derer die Kompaktheit linearer Operatoren festzustellen ist. Daran anschließend sind einige grundlegende

Eigenschaften kompakter Operatoren und ihres Spektrums genannt. Die abschließenden Ausführungen zur relativen Kompaktheit dienen insbesondere der Charakterisierung von Störungen unbeschränkter Operatoren. Im Verlaufe dieser Arbeit tritt der Begriff der relativen Kompaktheit bei der Untersuchung des Spektrums des Systemoperators des Beispielsystems als Eigenschaft eines Dämpfungsterms auf.

Definition kompakter Operatoren

Die Definition kompakter Operatoren lässt sich verschiedenen Werken zur Operatortheorie und Funktionalanalysis entnehmen. Die Definition des kompakten Operators in der folgenden Form entstammt [Kre78] (S. 405).

Definition 50 (Kompakter Operator) Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Dann heißt T kompakt, falls das Bild $T(M)$ jeder beschränkten Teilmenge M von X unter T relativ kompakt und damit der Abschluss des Bildes $\overline{T(M)}$ kompakt ist. \square

Kompakte lineare Operatoren sind eine Unterklasse der beschränkten linearen Operatoren, jeder kompakte lineare Operator ist also beschränkt und damit auch stetig ([Kre78] (S. 406)).

Kriterien für die Kompaktheit linearer Operatoren

Das folgende Kriterium kann zum Nachweis der Kompaktheit eines linearen Operators angewandt werden und ist in dieser Form an [Kre78] (S. 407) angelehnt.

Satz 22 (Kriterium für den Nachweis der Kompaktheit) Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. T ist genau dann kompakt, falls T jede beschränkte Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ aus X auf eine relativ kompakte Folge $\{Tx_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ in Y abbildet. \square

Entsprechend der Definition relativ kompakter Mengen (1.11.1 Compact Sets, Definition 1. aus [Zei95] (S. 33)) besitzt jede relativ kompakte Folge eine konvergente Teilfolge. Damit stimmt Satz 22 mit Theorem 8.1-3 [Kre78] (S. 407) inhaltlich überein. Ein Beweis zu Satz 22 lässt sich somit [Kre78] (S. 407) entnehmen.

Neben der Feststellung der Kompaktheit eines Operators anhand des folgenbasierten Kriteriums aus Satz 22 lassen sich beispielsweise Satz 3.8 aus [Wei] oder Theorem 8.1-4 aus [Kre78] (S. 407) zum Nachweis der Kompaktheit eines Operators heranziehen. Aus den genannten Quellen geht insbesondere die Kompaktheit beschränkter Operatoren T mit $\mathcal{R}(T) < \infty$ hervor. Als Sonderfall dazu sind Projektionen eines Hilbertraums auf einen endlich-dimensionalen Unterraum des betrachteten Hilbertraums kompakt ([Kre78] (S. 411)). Letztere Aussage lässt sich zur Betrachtung von Eigenprojektionen zu den mit endlicher Vielfachheit auftretenden Eigenwerten des Beispielsystems

heranziehen. Weitere Beispiele zur Überprüfung der Kompaktheit von Operatoren finden sich in [Kat95] (S. 157).

Falls ein Operator bereits in Reihendarstellung vorliegt, eignet sich besonders der folgende Satz ([Kre78] (S. 408)) zur Überprüfung der Kompaktheit des betrachteten Operators.

Satz 23 (Konvergente Folgen kompakter Operatoren) *Es sei ein normierter Raum X , ein Banachraum Y sowie eine Folge kompakter Operatoren $\{T_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ mit $T_i : X \rightarrow Y, \forall i \in \mathbb{I}^+$. Falls $\{T_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ im Sinne der gleichmäßigen Operator-topologie gegen einen Operator T konvergiert und somit*

$$\|T - T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \rightarrow 0,$$

gilt, ist der Grenzwert T der Folge $\{T_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ein kompakter Operator. □

Einige Eigenschaften kompakter Operatoren

Im Folgenden sind einige hilfreiche Bemerkungen zu kompakten Operatoren aufgelistet.

K1) Die Menge der kompakten linearen Operatoren von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y bilden selber einen Vektorraum ([Kre78] (S. 407)), der mit $\mathcal{L}_K(X,Y)$ bezeichnet wird. Die Elemente des Vektorraums $\mathcal{L}_K(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ erfüllen die Zusammenhänge nach Definition 14. Für $Y = X$ wird der Raum kompakter Endomorphismen abkürzend mit $\mathcal{L}_K(X,X) = \mathcal{L}_K(X)$ bezeichnet;

K2) Die Identität $I : X \rightarrow X$ ist für $\dim X = \infty$ beschränkt, aber nicht kompakt ([Kre78] (S. 406));

K3) Der Nulloperator jedes normierten Raums ist kompakt;

K4) Es seien $X_i, i \in \{1,2,3,4\}$ Banachräume. Ferner seien $T_1 \in \mathcal{L}(X_1,X_2)$ und $T_3 \in \mathcal{L}(X_3,X_4)$ beschränkte Operatoren sowie $T_2 \in \mathcal{L}_K(X_2,X_3)$ ein kompakter Operator. Dann gilt $T_3T_2 \in \mathcal{L}_K(X_2,X_4)$ und $T_2T_1 \in \mathcal{L}_K(X_1,X_3)$ ([Kat95] (S. 158)).

Unter Annahme eines Banachraums X ergibt sich aus **K4)** unter Annahme von $T_1 \in \mathcal{L}_K(X)$ und $T_0 \in \mathcal{L}(X)$ die Kompaktheit der Verknüpfungen $T_0T_1 \in \mathcal{L}_K(X)$ und $T_1T_0 \in \mathcal{L}_K(X)$ ([Kat95] (S. 158)).

Im Hinblick auf die gegebenenfalls kompakte Resolvente eines Systemoperators ist zudem der folgende Satz über die Separierbarkeit des Bildbereichs eines kompakten linearen Operators aus [Kre78] (S. 415) relevant.

Theorem 1 (Separierbarkeit des Bildbereichs eines kompakten Operators) *Es seien X,Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator. Dann ist der Bildbereich $\mathcal{R}(T)$ von T separierbar.* □

Der Beweis dazu basiert auf dem relativ kompakten Bild beschränkter Kugeln unter dem kompakten Operator T und dem Satz von der totalen Beschränktheit, demzufolge die relativ kompakte Menge eines metrischen Raums total beschränkt und damit auch separierbar ist ([Kre78] (S. 412)).

Einige Eigenschaften des Spektrums kompakter Operatoren

Über die Eigenschaften des Spektrums kompakter Operatoren lassen sich zahlreiche interessante Aussagen treffen, ein Überblick dazu findet sich beispielsweise in [Kre78] (S. 419) oder [Kat95] (S. 260). Die Einführung der folgenden Sätze zielt insbesondere auf die Charakterisierung des Spektrums des inversen Steifigkeitsoperators des Beispielsystems ab. Einleitend dient ein Satz aus [Kre78] (S. 449) dazu, die Bedeutung des daran anschließenden Satzes zu unterstreichen.

Satz 24 *Es sei X ein normierter Raum und $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein kompakter Operator. Falls von Null verschiedene Spektralwerte von T existieren, so ist jeder von ihnen ein Eigenwert von T .* \square

Der folgende Satz trifft eine Aussage bezüglich der Häufungspunkte der Eigenwerte kompakter Operatoren (8.3-1 Theorem (Eigenvalues), [Kre78] (S. 420)).

Satz 25 (Eigenwerte kompakter Operatoren) *Es sei X ein normierter Raum und $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein kompakter Operator. Dann ist die Menge der Eigenwerte von T abzählbar (gegebenfalls endlich oder leer) und der einzig mögliche Häufungspunkt ist Null.* \square

Relative Kompaktheit

Die Begriffe der relativen Beschränktheit und relativen Kompaktheit dienen bei der Untersuchung von Störungen unbeschränkter Operatoren zur Charakterisierung „kleiner“ Störungen. Die folgenden Ausführungen stammen aus [Kat95] (S. 189ff) sowie [LS94].

Definition 51 (Relative Kompaktheit) Es seien zwei Operatoren T und R für deren Definitionsbereiche $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(R) \subset X$ gilt. Falls zu jeder Folge $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bei der sowohl $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ als auch $\{Tu_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ beschränkt sind, $\{Ru_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine konvergente Teilfolge enthält, heißt R relativ kompakt bezüglich T oder T -kompakt. \square

Ein T -kompakter Operator R ist auch T -beschränkt [Kat95] (S. 194). Unter den Annahmen gemäß Definition 51 und der zusätzlichen Bedingung, dass der inverse Operator T^{-1} kompakt ist, sind nach [LS94] (S. 51) zudem die folgenden Aussagen gleichwertig:

- **RKO 1)** Der Operator R ist T -kompakt.
- **RKO 2)** Der Operator RT^{-1} ist kompakt.
- **RKO 3)** Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|Rx\| \leq \varepsilon \|Tx\| + c_1 \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

mit einer lediglich von ε abhängigen Konstanten c_1 .

Aussage **RKO 3**) ist die Bedingung für die T -Beschränktheit von R ([Kat95] (S. 190)), die im Falle einer kompakten Inversen T^{-1} äquivalent zur T -Kompaktheit von R wird.

Für den Fall eines beschränkten Operators R existiert eine positive Konstante c , sodass

$$\|Rx\| \leq c_1 \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(R) \quad (\text{B.22})$$

gilt. Die Gültigkeit der voranstehenden Ungleichung impliziert für beschränkte R mit $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(R)$ sowie beliebige $\varepsilon > 0$ die Gültigkeit der Ungleichung in **RKO 3**), damit sind derartige R auch T -beschränkt. Falls zudem T^{-1} kompakt ist, folgt aus der Beschränktheit von R aufgrund der Äquivalenz von **RKO 1**) und **RKO 3**) auch die T -Kompaktheit von R .

B.4.5 Schatten-Klassen kompakter Operatoren

Im Hinblick auf den Hankel-Operator von Systemen der Pritchard-Salamon-Klasse werden die Schatten-Klassen kompakter Operatoren gemäß [Wei] (S. 148) eingeführt.

Definition 52 (Schatten-Klassen kompakter Operatoren) Es seien X, Y Hilberträume, ein kompakter Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ist dann und nur dann Element von $\mathcal{L}_{S,p}(X, Y)$, $p > 0$, wenn seine Singulärwerte p -fach summierbar sind

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} (\sigma_i(T))^p < \infty. \quad (\text{B.23})$$

Ferner gilt dann $\|T\|_p = \left(\sum_{i \in \mathbb{I}^+} (\sigma_i(T))^p \right)^{\frac{1}{p}}$. □

$\|\cdot\|_p, p > 0$ wird als Schatten-Norm bezeichnet, die für $p \geq 1$ die Dreiecksungleichung erfüllt ([Wei] (S. 148)). Weitere Eigenschaften von Operatoren der Schatten-Klassen finden sich beispielsweise in [Wei]. Zusammen mit verschiedenen Verweisen auf weiterführende Abhandlungen zu Schatten-Klassen kompakter Operatoren findet sich in [Kab11] die Deutung der Schatten-Klassen kompakter Operatoren als Operator-Entsprechung der l^p -Folgenräume (Abschnitt B.10.1).

Von besonderem Interesse für die Betrachtung linearer Systeme sind die Schatten-Klassen kompakter Operatoren für die Fälle $p = 1$ und $p = 2$. Unter der Annahme von Hilberträumen X, Y wird ein kompakter Operator T für den $T = \mathcal{L}_{S,2}(X, Y)$ und damit

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} (\sigma_i(T))^2 < \infty \quad (\text{B.24})$$

gilt, als Hilbert-Schmidt bezeichnet ([CMS05]). Falls $T = \mathcal{L}_{S,1}(X, Y)$ und damit

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \sigma_i(T) < \infty \quad (\text{B.25})$$

gilt, heißt T nuklear ([CMS05]) oder Spurklasse-Operator. Im Hinblick auf die Steuer- und Beobachtbarkeitsoperatoren sowie den Hankel-Operator von Pritchard-Salamon-Systemen sind die folgenden in [CMS05] aufgeführten Beziehungen zwischen den Vektorräumen $\mathcal{L}_{S,p}(X,Y)$, $p \in \{1,2\}$ sowie den kompakten und den beschränkten Operatoren von Bedeutung. Laut [CMS05] (S. 3) gilt

$$\mathcal{L}_{S,1}(X,Y) \subset \mathcal{L}_{S,2}(X,Y) \subset \mathcal{L}_K(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y). \quad (\text{B.26})$$

Unter der Annahme eines weiteren Hilbertraums Z gilt für Verknüpfungen ferner

$$\mathcal{L}_{S,p}(Y,Z) \mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{L}_{S,p}(Y,Z) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}(Y,Z) \mathcal{L}_{S,p}(X,Y) \subset \mathcal{L}_{S,p}(Y,Z) \quad (\text{B.27})$$

für $p \in \{1,2\}$ und

$$\mathcal{L}_{S,2}(Y,Z) \mathcal{L}_{S,2}(X,Y) \subset \mathcal{L}_{S,1}(X,Z). \quad (\text{B.28})$$

Die Verknüpfung eines jeweils über Hilberträumen definierten Hilbert-Schmidt-Operators und eines beliebigen beschränkten Operators ergibt unabhängig von der Reihenfolge der Verknüpfung wiederum stets einen Hilbert-Schmidt-Operator. Letztere Aussage ist auch für nukleare anstelle von Hilbert-Schmidt-Operatoren gültig. Darüber hinaus entspricht die Verknüpfung zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren einem nuklearen Operator.

B.4.6 Abgeschlossene lineare Operatoren

Im Hinblick auf den Systemoperator und damit die Behandlung von Differentialoperatoren werden an dieser Stelle, als Sonderfall unbeschränkter Operatoren, abgeschlossene Operatoren eingeführt. Abgeschlossene Operatoren sind mathematisch angenehme Sonderfälle unbeschränkter Operatoren, die sich nahezu wie beschränkte Operatoren verhalten, solange sie auf Folgen angewendet werden deren Bild a priori konvergiert ([Heu92] (S. 101)).

Abgeschlossener Operator

Die hier verwendete Definition abgeschlossener Operatoren entstammt [CZ95] (S. 595). Alternative Formulierungen finden sich u.a. in [Wei] (S. 159) oder [Wer11] (S. 156). In jedem Fall ist die Rolle des Definitionsbereichs $\mathcal{D}(T)$ für die Abgeschlossenheit von T zu erkennen.

Definition 53 (Abgeschlossene Operatoren) Es seien X, Y normierte Räume, ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ heißt abgeschlossen, falls eines der folgenden gleichwertigen Kriterien erfüllt ist:

CO1) Der Graph $\text{Gr}(T)$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $X \times Y$;

CO2) Für konvergente Folgen mit $\mathcal{D}(T) \ni x_i \rightarrow x \in X$ und $Tx_i \rightarrow y \in Y$ für $i \rightarrow \infty$ folgt, dass $x \in \mathcal{D}(T)$ sowie $y = Tx$. □

Eine Herleitung von **CO2)** aus **CO1)** ist durch die Berücksichtigung der Definition des Graphen Definition 41 möglich. Insbesondere die Definition abgeschlossener Operatoren über konvergente Folgen ermöglicht einen unmittelbaren Vergleich zur Definition beschränkter Operatoren auf Basis der Folgenstetigkeit entsprechend Definition 42 von Seite 242.

Falls die Folge der Urbilder $\{x_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ im Definitionsbereich des Operators $\mathcal{D}(T)$ verläuft und gegen ein Element aus X konvergiert und zudem die Folge der Bilder $\{Tx_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ gegen ein Element des Bildbereichs $y \in Y$ konvergiert, muss im Falle eines abgeschlossenen Operators der Grenzwert x der Folge der Urbilder $\{x_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ebenfalls im Definitionsbereich des Operators liegen $x \in \mathcal{D}(T)$. Darüber hinaus muss das Bild des Grenzwertes $x \in \mathcal{D}(T)$ am abgeschlossenen Operator gerade dem Grenzwert der Folge der Bilder $\{Tx_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ entsprechen. Damit lässt sich unter den genannten Bedingungen die Konvergenz gegen einen „unerwarteten“ Grenzwert ausschließen ([Heu92] (S. 101)). Ein hilfreicher Vergleich hinsichtlich der Grenzwerte von Folgen im Fall beschränkter beziehungsweise abgeschlossener Operatoren wird in [HN01] (S. 248) angestellt. Eine anschauliche Deutung abgeschlossener Operatoren mit speziellem Bezug zum Differentiationsoperator findet sich in [Heu92] (S. 101).

Ausgesuchte Eigenschaften abgeschlossener Operatoren

Abgeschlossene Operatoren verfügen über einige im Kontext dieser Arbeit hilfreiche Eigenschaften, die im Folgenden aufgeführt werden. Für die an dieser Stelle nicht aufgeführten zugehörigen mathematischen Beweise sei auf die jeweils aufgeführte Literatur verwiesen.

AO1) Es sei ein abgeschlossener Operator T_1 und ein beschränkter Operator T_2 mit $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{D}(T_2)$. Dann ergibt die Summe der beiden Operatoren $T_1 + T_2$ einen abgeschlossenen Operator;

AO2) Ein abgeschlossener Operator dessen Definitionsbereich dem gesamten Vorbereich des Operators entspricht, ist zusätzlich auch beschränkt ([Kat95] (S. 166)).

$$T : \mathcal{D}(T) \rightarrow X \text{ ist abgeschlossen mit } \mathcal{D}(T) = X \quad \Rightarrow \quad T \text{ ist beschränkt;}$$

AO3) Der zu T inverse Operator T^{-1} ist genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist.

AO1) findet sich in [Kat95] (S. 164) und ist beispielsweise für die Summe aus der Identität, definiert auf einem nicht abgeschlossenen Unterraum, und einem abgeschlossenen Operator interessant. Da die Identität in diesem Fall zwar beschränkt, aber nicht abgeschlossen ist ([CZ95] (S. 595)).

Theoreme bezüglich der Abgeschlossenheit linearer Operatoren

Der folgende Satz leitet sich aus den Ausführungen in [TW09] (S. 32) ab.

Satz 26 (Abgeschlossenheit anhand der Resolventenmenge) Es seien X, Y Hilberträume $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Falls T eine nichtleere Resolventenmenge $\rho(T)$ besitzt, ist T abgeschlossen. \square

Um das voranstehende Theorem zum Nachweis der Abgeschlossenheit eines Operators T anzuwenden, reicht der Nachweis aus, dass ein einzelner Punkt der komplexen Ebene Element der Resolventenmenge von T ist. Im Zusammenhang damit kann das folgende Theorem aus [CZ95] (S. 596) gesehen werden, dass den Nachweis der Abgeschlossenheit eines Operators T anhand der Existenz und Beschränktheit des zugehörigen inversen Operators T^{-1} ermöglicht.

Satz 27 (Abgeschlossenheit eines Operators) Es seien X, Y Banachräume und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Falls zu T ein inverser Operator T^{-1} existiert und dieser zudem beschränkt ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, dann ist T abgeschlossen. \square

Falls gezeigt werden kann, dass zu einem linearen Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ eine beschränkte Inverse $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ existiert, so folgt daraus, dass $0 \in \rho(T)$. Folglich ist die Resolventenmenge $\rho(T)$ nicht leer und T ist auch auf Basis von Satz 26 abgeschlossen.

Zu beachten sind die Voraussetzungen für die Invertierbarkeit eines Operators T gemäß Definition 17, also insbesondere die Injektivität des betrachteten Operators. Falls die Injektivität von T bezüglich der betrachteten Räume nicht gewährleistet ist, kann stellvertretend die Summe $T + I$ mit einer entsprechenden Identität betrachtet werden ([CZ95]). Dazu sind die Eigenschaften der Identität sowie die Aussage über die Summe eines abgeschlossenen und eines beschränkten Operators **AO1**) relevant.

Vom abgeschlossenen zum beschränkten Operator

Der folgende Satz ist [Wer11] (S. 158) entnommen und formuliert die Vollständigkeit des Definitionsbereichs eines abgeschlossenen Operators unter Verwendung der Graphennorm. Allein durch die geeignete Wahl der Norm seines Definitionsbereichs ergibt sich für einen abgeschlossenen Operator zusätzlich die Beschränktheit bezüglich dieser Norm. Diese Tatsache lässt sich erneut als Indiz dafür werten, dass ein abgeschlossener Operator nicht „allzu unbeschränkt“ ist.

Satz 28 Es seien X, Y Banachräume und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ ein linearer abgeschlossener Operator. $\mathcal{D}(T)$ ist ein Untervektorraum von X .

a) $\mathcal{D}(T)$ ist mit der Graphennorm $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(T)} = \|\cdot\|_X + \|T(\cdot)\|_Y$ ein Banachraum, also vollständig.

b) Der lineare Operator T ist mit $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_{\mathcal{D}(T)})$ beschränkt. \square

Da X, Y Banachräume sind, sind beide im Sinne ihrer jeweiligen Norm vollständig. Der Beweis aus [Wer11] zum ersten Teil von Satz 28 geht von einer Cauchy-Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in \mathcal{D}(T)$ im mit der Graphennorm ausgestatteten Definitionsbereich des abgeschlossenen Operators aus. Folglich gilt

$$\|x_i\|_{\mathcal{D}(T)} = \|x_i\|_X + \|Tx_i\|_Y \quad \forall i \in \mathbb{I}^+.$$

Daraus folgt direkt, dass sowohl $\|x_i\|_X$ als auch $\|Tx_i\|_Y$ Cauchy-Folgen im Sinne der jeweiligen Norm sind. Da zudem X, Y als Banachräume vollständig sind, besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert innerhalb des jeweiligen Raums. Entsprechend existieren die Grenzwerte $x_i \rightarrow x$ sowie $Tx_i \rightarrow y$ für $i \rightarrow \infty$. Da T abgeschlossen ist, kann direkt geschlossen werden, dass $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = y$ gilt.

Für die Differenz zwischen der angenommenen Cauchy-Folge und dem Grenzwert im Definitionsbereich gilt

$$\begin{aligned}\|x_i - x\|_{\mathcal{D}(T)} &= \|x_i - x\|_X + \|Tx_i - Tx\|_Y \\ &= \|x_i - x\|_X + \|Tx_i - y\|_Y \\ &= 0,\end{aligned}$$

für $i \rightarrow \infty$. Dementsprechend folgt die Vollständigkeit von $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_{\mathcal{D}(T)})$. Der Beweis zum zweiten Teil des betrachteten Satzes basiert auf der Ungleichung

$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y &\leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y \\ \Leftrightarrow \|Tx\|_Y &\leq \|x\|_{\mathcal{D}(T)}.\end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang ist unter Berücksichtigung der Positivität einer Norm direkt ersichtlich. Die Definition der Beschränktheit ist unmittelbar abzulesen.

B.4.7 Dissipative und maximal-dissipative Operatoren

Das Konzept der Dissipativität linearer Operatoren wird an dieser Stelle im Hinblick auf das Lumer-Phillips-Theorem (Abschnitt 2.2.3) und damit zur Charakterisierung der Erzeuger von Kontraktionshalbgruppen eingeführt.

Dissipative Operatoren

Die Definition der Dissipativität eines Operators entstammt [Phi59] (S. 193), entspricht in der folgenden Form aber Definition 1.2. aus [LP61] (S. 680). Eine entsprechende Definition findet sich beispielsweise auch in [TW09] (S. 75).

Definition 54 (Dissipative Operatoren) Es sei X ein Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein linearer Operator. T heißt dissipativ, falls

$$\operatorname{Re}(\langle Tx, x \rangle_X) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T). \quad (\text{B.29})$$

□

Äquivalent zu Definition 54 lässt sich die Dissipativität eines Operators $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ über die „Accretivität“ von $-T$ definieren ([Kat95] (S. 279) oder [Haa06] (S. 316)). Weitere ausführliche Betrachtungen zu dissipativen Operatoren werden in [Phi59] angestellt.

Der Nachweis der Dissipativität wird für allgemeine Operatoren durch folgenden Satz [TW09] (S. 75) auf ein einfaches, auf Basis der Resolvente eines Operators formuliertes, Kriterium reduziert.

Satz 29 (Dissipativität) Ein Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ist dann und nur dann dissipativ, falls

$$\|(sI - T)x\| \geq s\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), s \in (0, \infty). \quad (\text{B.30})$$

Der Beweis des voranstehenden Satzes wird beispielsweise in [TW09] (S. 76) oder [Paz83] (S. 14) geführt. In Abschnitt 2.2.3 wird aus Satz 29 eine hinreichende Bedingung hergeleitet unter der ein diagonalisierbarer Operator zusätzlich dissipativ ist.

Maximal-dissipative Operatoren

Ein dissipativer Operator in einem Raum X ist zusätzlich auch maximal-dissipativ, wenn in X keine dissipative Erweiterung dieses Operators existiert. Die Klasse der maximal-dissipativen Operatoren ist eine Untermenge der dissipativen Operatoren und wird eingeführt da sie genau die Operatoren definiert, die infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe sind. Diese Verknüpfung wird durch das Lumer-Phillips-Theorem in Satz 6 formuliert.

Die folgende Definition maximal-dissipativer Operatoren basiert auf Theorem 3.1.7. und Definition 3.1.8. aus [TW09].

Definition 55 (Maximal-dissipative oder m-dissipative Operatoren) Ein dissipativer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ heißt maximal-dissipativ oder m-dissipativ, falls eine der folgenden äquivalenten Aussagen zutrifft:

MDO1) $\mathcal{R}(sI - T) = X$ für einige $s \in \mathbb{C}_0^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$;

MDO2) $\mathcal{R}(sI - T) = X$ für alle $s \in \mathbb{C}_0^+$;

MDO3) T ist dicht definiert und falls \widehat{T} eine dissipative Erweiterung von T ist, dann gilt $T = \widehat{T}$. □

Der folgende aus [TW09] (S. 78) entnommene Satz bietet einen Ansatz zum Nachweis der m-Dissipativität eines Operators.

Satz 30 (Äquivalente Eigenschaften m-dissipativer Operatoren) Für einen Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

EMD1) T ist m-dissipativ;

EMD2) Die positive reelle Achse ist Teil der Resolventenmenge $(0, \infty) \subset \rho(T)$ und

$$\|R(s, T)\| = \|(sI - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{s} \quad \forall s \in (0, \infty);$$

EMD3) Die positive Halbebene der komplexen Ebene ist Teil der Resolventenmenge $\mathbb{C}_0^+ \subset \rho(T)$

$$\text{und } \|R(s, T)\| = \|(sI - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(s)} \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+. \quad \square$$

Die Aussagen zur Resolventenmenge in **EMD2)** und **EMD3)** implizieren unter Berücksichtigung von Satz 26 die Abgeschlossenheit von T . Für dicht definierte, dissipative Operatoren lässt sich die m -Dissipativität anhand des Nachweises ihrer Abgeschlossenheit und der Dissipativität des zugehörigen adjungierten Operators zeigen.

Satz 31 Es sei $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein dicht definierter, dissipativer Operator. Dann ist T genau dann m -dissipativ, falls T abgeschlossen ist und T^* dissipativ ist. \square

Satz 31 lässt sich insbesondere auf einfache Weise auf dissipative diagonalisierbare Spektraloperatoren anwenden (Abschnitt 2.2.3).

B.5 Prähilberträume- und Hilberträume

B.5.1 Prähilberträume

Definition von Prähilberträumen

Die Definition von Prähilberträumen also Innenprodukträumen lässt sich in zahlreichen Büchern zur Funktionalanalysis finden ([Heu92] (S. 146), [Wer11] (S. 204)). Eine sehr schöne Darstellung der Prähilberträume findet sich in [Kre78] (S. 127), dabei werden die Prähilberträume historisch vor allgemeinen normierten Räumen eingeordnet und strukturell als direkte Erweiterung der Euklidischen Räume eingeführt. Zusätzlich werden die strukturellen Vorteile eines Prähilbertraums gegenüber allgemeinen normierten Räumen aufgeführt. Innerhalb dieser Arbeit dient das Innenprodukt als Grundlage zur Einführung und Nutzung des Prinzips der Orthogonalität. Die Definition von Prähilberträumen erfordert zunächst die Definition des Innenprodukts auf einem Vektorraum.

Definition 56 (Innenprodukt) Es sei X ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} , dann heißt eine Abbildung $\langle(\cdot), (\cdot)\rangle_X : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ Innenprodukt, falls sie die in Anhang B.4 genannten Eigenschaften S1-S4 einer Sesquilinearform erfüllt und damit eine hermitesche positiv definite Sesquilinearform ist. \square

Definition 57 (Prähilbertraum) Ein Vektorraum V auf dem ein Innenprodukt definiert ist, wird als Prähilbertraum (Innenproduktraum) bezeichnet. \square

Auf jedem Prähilbertraum X wird durch das Innenprodukt mittels der Abbildung

$$x \mapsto \|x\|_X = \langle x, x \rangle_X^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in X \quad (\text{B.31})$$

eine Norm induziert. Damit ist jeder Prähilbertraum auch ein metrischer Raum (Definition 23).

Orthogonalität, Orthonormalsysteme und orthogonales Komplement

Der Begriff der Orthogonalität basiert auf einem Innenprodukt, kann also sinnvoll nur für Elemente eines Prähilbertraums definiert werden. Wobei die Orthogonalität zweier Elemente eines Prähilbertraums vom spezifischen Innenprodukt abhängt.

Definition 58 (Orthogonalität) Es sei ein Prähilbertraum X . Die Elemente $x_1, x_2 \in X$ werden als orthogonal zueinander bezeichnet, falls $\langle x_1, x_2 \rangle_X = 0$. Die Orthogonalität zweier $x_1, x_2 \in X$ wird auch durch die Schreibweise $x_1 \perp x_2$ gekennzeichnet. \square

In Anlehnung an Definition 58 werden $Y_1, Y_2 \subset X$ als orthogonal bezeichnet, falls $y_1 \perp y_2, \forall y_1 \in Y_1, \forall y_2 \in Y_2$ gilt. Die Orthogonalität von $Y_1, Y_2 \subset X$ wird durch $Y_1 \perp Y_2$ gekennzeichnet.

Als Grundlage für den Begriff des vollständigen Orthonormalsystems werden die Begriffe des Orthogonalsystems und des Orthonormalsystems eingeführt ([Alt06] (S. 287)).

Definition 59 (Orthogonalsystem/Orthonormalsystem) Eine Teilmenge Y eines Prähilbertraums X wird als Orthogonalsystem bezeichnet, falls seine Elemente im Sinne von Definition 58 paarweise orthogonal zueinander sind.

Ein Orthogonalsystem Y heißt zudem Orthonormalsystem, falls alle seine Elemente eine, durch das Innenprodukt in dessen Sinne die Orthogonalität gilt, induzierte Norm von Eins besitzen

$$\|y\|_X = \langle y, y \rangle_X = 1, \quad \forall y \in Y. \quad (\text{B.32})$$

\square

Ein Orthogonalsystem kann mittels einer geeigneten Normierung in ein Orthonormalsystem überführt werden.

Die nachfolgende Definition des orthogonalen Komplements entstammt [Wer11] (S. 224).

Definition 60 (Orthogonales Komplement) Es sei X ein Prähilbertraum und $Y \subset X$. Dann heißt die Menge aller Elemente $x \in X$, die senkrecht auf Y stehen $Y^\perp = \{x \in X \mid x \perp Y\}$ orthogonales Komplement Y^\perp zu Y in X . \square

Verschiedene Eigenschaften von Y^\perp finden sich beispielsweise in [Wer11] (S. 225). Unter Zuhilfenahme des orthogonalen Komplements lässt sich in Hilberträumen eine Bedingung für die Dichtheit einer Teilmenge formulieren.

Satz 32 *Es sei H ein Hilbertraum und M eine nichtleere Teilmenge von H . $V = \text{span}\{M\}$ ist genau dann dicht in H , wenn M^\perp nur die Null enthält.* \square

Schwarzsche Ungleichung

Die Schwarzsche Ungleichung wird innerhalb dieser Arbeit für den Nachweis der Beschränktheit von Sesquilinearformen benutzt, weitere Betrachtungen zu dieser Ungleichung finden sich u.a. in [Wei], [Kre78] oder [Zei95].

Satz 33 (Schwarzsche Ungleichung) *Es sei X ein Prähilbertraum, dessen Innenprodukt $\langle x_1, x_2 \rangle_X, \forall x_1, x_2 \in X$ die Norm $\|x_1\|_X = \langle x_1, x_1 \rangle_X^{\frac{1}{2}}, \forall x_1 \in X$, induziert. Dann gilt*

$$|\langle x_1, x_2 \rangle_X| \leq \|x_1\|_X \|x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

\square

Die Gleichheit in der Schwarzschen Ungleichung gilt dann und nur dann, wenn die betrachteten Elemente linear abhängig sind. Als Spezialfall davon kann der Ansatz zum Nachweis der Koerzitivität derjenigen Sesquilinearform angesehen werden, die in Abschnitt A.3.2 den Steifigkeitsoperator definiert.

B.5.2 Hilberträume

Definition von Hilberträumen

Ein wesentlicher Teil der in dieser Arbeit auftretenden Räume sind Hilberträume. Das auf derartigen Räumen definierte Innenprodukt bietet die Grundlage zur Nutzung verschiedener Ansätze, die auf dem Konzept der Orthogonalität beruhen.

Definition 61 (Hilbertraum) Ein Prähilbertraum (Innenproduktraum) der vollständig im Sinne der durch sein Innenprodukt induzierten Norm und Metrik ist, heißt Hilbertraum. \square

Die zusätzliche Forderung der Separabilität eines Hilbertraums garantiert die Existenz einer abzählbaren Orthonormalbasis für den betreffenden Raum. Innerhalb dieser Arbeit wird im Allgemeinen die Separabilität der verwendeten Hilberträume vorausgesetzt.

Der folgende Satz entspricht Lemma 3.1 aus [Wlo82] (S. 70) und trifft eine Aussage über die Separabilität von Unterräumen separabler Hilberträume.

Satz 34 (Unterräume separabler Hilberträume) *Unterräume eines separablen Hilbertraums sind ebenfalls separabel.* \square

Direkte Summe im Falle eines Hilbertraums

Im Fall eines Hilbertraums kann die interne direkte Summe (Definition 17) ausgehend von einem abgeschlossenen Unterraum des Hilbertraums und dessen orthogonalem Komplement formuliert werden ([Kre78] (S. 146)). Anwendung findet eine Darstellung mittels der direkten Summe bei der Zerlegung des Zustandsvektors in einen endlich-dimensionalen und einen unendlich-dimensionalen Teil. Die Bezeichnung des folgenden Satzes als Projektionssatz entstammt der genannten Quelle und lässt sich anhand der Ausführungen in Anhang B.6 nachvollziehen.

Satz 35 (Projektionssatz) *Es sei X ein Hilbertraum und X_1 ein abgeschlossener Unterraum von X . Dann gilt $X = X_1 \oplus X_1^\perp$.* \square

Der Beweis für Satz 35 findet sich in [Kre78] (S. 146), aus den dortigen Ausführungen folgt zudem für jeden abgeschlossenen Unterraum eines Hilbertraums auch die Vollständigkeit des Unterraums.

B.5.3 Basen unendlich-dimensionaler Hilberträume

Aus der Definition der Dimension eines Vektorraums geht hervor, dass ein unendlich-dimensionaler Vektorraum nicht durch eine Hamelbasis erzeugt wird. Die eindeutige Darstellung jedes Elements eines Hilbertraums mittels gewisser Basiselemente des betreffenden Raumes erfordert daher die Einführung generalisierter Basisbegriffe.

Orthonormalbasis

Die Definition einer Orthonormalbasis eines Hilbertraums, die äquivalent auch als vollständiges (maximales, totales) Orthonormalsystem bezeichnet wird, findet sich beispielsweise in [Kre78] (S. 168), [CZ95] (S. 579), [Wer11] (S. 236) und [Alt06] (S. 288).

Definition 62 (Orthonormalbasis/vollständiges Orthonormalsystem) Es sei X ein Hilbertraum und $Y = \{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ein Orthonormalsystem von X . Dann wird Y als Orthonormalbasis von X bezeichnet, falls eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

ONS1) $\text{span}(Y)$ liegt dicht in X ;

ONS2) Falls $\langle x, y \rangle_X = 0, \forall y \in Y \Rightarrow x = 0$;

ONS3) Darstellung der Elemente $x \in X$ mittels $x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle_X u_i, \quad \forall x \in X$;

ONS4) $\langle x, y \rangle_X = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle_X \overline{\langle y, u_i \rangle_X}, \quad \forall x, y \in X$;

ONS5) (Parsevalsche Gleichung) $\|y\|_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle y, u_i \rangle_X|^2, \quad \forall y \in X$;

\square

Die voranstehende Definition orientiert sich an [Alt06] (S. 288). Weitere Ausführungen unter welchen äquivalenten Bedingungen ein Orthonormalsystem auch eine Orthonormalbasis ist und Beweise hinsichtlich der Äquivalenz der in Definition 62 genannten Bedingungen finden sich in [Alt06] (S. 288ff) und [Chr03] (S. 57).

Der folgende Satz verdeutlicht wie ausgehend von einer Orthonormalbasis eines Hilbertraums mittels unitärer Operatoren alle Orthonormalbasen des Hilbertraums zu charakterisieren sind ([Chr03] (S. 59)).

Satz 36 (Orthonormalbasen eines Hilbertraums) *Es sei X ein Hilbertraum, $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Orthonormalbasis von X und $T \in \mathcal{L}(X)$ ein unitärer Operator. Dann sind die Orthonormalbasen von X durch die Mengen $\{Tu_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ definiert.* \square

Der Beweis von Satz 36 findet sich in [Chr03] (S. 59). Die Definition unitärer Operatoren als eine Unterklasse beschränkter Operatoren lässt sich beispielsweise Definition V.5.3 aus [Wer11] (S. 239) entnehmen. In jedem Hilbertraum existiert ein vollständiges Orthonormalsystem ([Kre78] (S. 168)). Zudem besitzen alle Orthonormalbasen eines Hilbertraums die gleiche Mächtigkeit ([Kre78] (S. 168), [AG93] (S. 19)). In dieser Arbeit wird im Allgemeinen die Separabilität der betrachteten Hilberträume vorausgesetzt, daher sind alle in diesen Hilberträumen existierenden Orthonormalsysteme abzählbar (3.6-4 Theorem, [Kre78] (S. 171)). Jede Orthonormalbasis aus höchstens abzählbar unendlich vielen Elementen besitzt die gleiche Mächtigkeit wie die natürlichen Zahlen \mathbb{N} ([Kre78] (S. 171)). Ferner gilt für separable unendlich-dimensionale Hilberträume Satz 57. Weitere anschauliche Betrachtungen zu separablen und nicht separablen Hilberträumen finden sich in den genannten Quellen oder beispielsweise in [Gro70] (S. 59ff).

Rieszbasis

Die Einführung der Rieszbasen von Hilberträumen dient der Verallgemeinerung des Konzepts der Orthonormalbasen. Insbesondere bieten Rieszbasen eine Möglichkeit der Darstellung von Elementen eines Hilbertraums mittels nicht zwingend orthonormalen Systeme. Im Hinblick auf die Darstellung unendlich-dimensionaler Systeme eröffnet sich damit die Möglichkeit, eine Diagonalisierung eines Systems mittels der Eigenvektoren des Systemoperators durchzuführen, falls diese zumindest eine Rieszbasis des zugrunde liegenden Zustandsraums bilden.

Im Hinblick auf die Betrachtung von Rieszbasen wird zunächst die Definition biorthogonaler Systeme eingeführt ([Die54]).

Definition 63 (Biorthogonales System) *Es sei X ein Hilbertraum und $Y_1 = \{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$, $Y_2 = \{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ Untermengen von X . Y_1 und Y_2 formen ein biorthogonales System $(Y_1, Y_2)^\perp$, falls*

$$\langle w_i, v_j \rangle_X = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{I}^+ \quad (\text{B.33})$$

für alle Elemente der Untermengen gilt. \square

Die paarweise verschiedenen Elemente jeder der beiden in Definition 63 zunächst separat betrachteten Untermengen Y_1 und Y_2 von X erfüllen nicht zwingend die Bedingung der Orthogonalität gemäß Definition 58. Dagegen steht jedes fest gewählte Element aus einer der Untermengen senkrecht auf allen Elementen der anderen Untermenge, abgesehen von dem Element der jeweils anderen Untermenge, dass den gleichen Zählindex besitzt.

Den Ausführungen aus [GK69] (S. 307) folgend, existiert zu jeder Basis eines Hilbertraums ein eindeutig bestimmtes biorthogonales System, zudem gilt der folgende Satz.

Satz 37 *Es sei X ein Hilbertraum und die Folge $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Basis von X . Dann ist die zu $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ biorthogonale Folge $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ebenfalls eine Basis von X .* \square

Ein Verweis zum Beweis von Satz 37 findet sich in [GK69] (S. 307).

Die folgende Definition einer Rieszbasis entstammt [Chr03] (S. 63), weitere Abhandlungen zu diesem Thema sind u.a. in [GK69] (S. 308), [You80] und [AG93] zu finden.

Definition 64 (Rieszbasis) Es sei X ein Hilbertraum, $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Orthonormalbasis von X und $T \in \mathcal{L}(X)$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt $\{Tu_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ Rieszbasis von X . \square

Für den in Definition 64 angenommenen bijektiven beschränkten Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ folgt aus seiner Bijektivität neben der Existenz auch die Beschränktheit des inversen Operators T^{-1} . Dieser Zusammenhang findet sich in [Wer11] (S. 155). Gemäß Definition 64 gehen Rieszbasen durch eine beschränkte bijektive Abbildung aus einer Orthonormalbasis hervor, sie sind damit äquivalent zu Orthonormalbasen im Sinne von [You80] (S. 30). Im Gegensatz zur Charakterisierung aller Orthonormalbasen eines Hilbertraums in Satz 36 wird bei der Charakterisierung von Rieszbasen anstelle einer unitären Transformationsvorschrift lediglich eine beschränkte und bijektive Abbildung vorausgesetzt ([Chr03] (S. 63)).

Der folgenden Satz beinhaltet gleichwertige Aussagen aus [GK69] (S. 310), [You80] (S. 32) und [Chr03] (S. 66), anhand derer eine Untermenge eines Hilbertraums sich als Rieszbasis des betreffenden Hilbertraums identifizieren lässt.

Satz 38 *Es sei X ein Hilbertraum, dann sind für eine Untermenge $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von X die folgenden Aussagen gleichwertig:*

RB1) $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ist eine Rieszbasis von X ;

RB2) Zum Innenprodukt $\langle x_1, x_2 \rangle_X, \forall x_1, x_2 \in X$ existiert ein topologisch äquivalentes Innenprodukt

$$c_1 \langle x_1, x_1 \rangle_X \leq \langle x_1, x_1 \rangle_1 \leq c_2 \langle x_1, x_1 \rangle_X, \quad c_1, c_2 > 0, x_1 \in X, \quad (\text{B.34})$$

hinsichtlich dessen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ zu einer Orthonormalbasis von X wird ([You80] (S. 32));

RB3) $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ist vollständig in X , sodass $\overline{\text{span}}(\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}) = X$ und für beliebige positive ganzzahlige N existieren positive Konstanten c_1, c_2 , sodass für beliebige Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$

$$c_1 \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i \right\| \leq c_2 \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \quad (\text{B.35})$$

gilt;

RB4) $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ist vollständig in X , zudem existiert eine zu $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ biorthogonale, ebenfalls vollständige, Folge $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$, sodass

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, v_i \rangle_X|^2 < \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, w_i \rangle_X|^2 < \infty, \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.36})$$

□

Die Beweise der Äquivalenz der in Satz 38 aufgeführten Aussagen sowie weitere äquivalente Aussagen finden sich in [GK69] (S. 310), [You80] (S. 33) und [Chr03] (S. 66).

Der Definition äquivalenter Basen aus [You80] (S. 30) lässt sich entnehmen, dass im Fall zweier äquivalenter Basen $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und $\{Tu_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von X , für die Reihen

$$X \ni x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i \quad \Leftrightarrow \quad X \ni Tx = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \alpha_i Tu_i \quad (\text{B.37})$$

gilt. Aufgrund von Theorem 7 aus [You80] (S. 30) ist die dortige Definition äquivalenter Basen gleichwertig zu Definition 64.

Überführung einer Orthonormalbasis in eine Rieszbasis

Es folgen einige Überlegungen, die die Überführung einer Orthonormalbasis mittels eines beschränkten linearen Operators in eine Rieszbasis verdeutlichen. Es sei X ein Hilbertraum und $Y = \{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Orthonormalbasis von X , sodass

$$\langle u_i, u_j \rangle_X = \delta_{ij} \quad i, j \in \mathbb{I}^+. \quad (\text{B.38})$$

Ferner sei $T \in \mathcal{L}(X)$ ein bijektiver Operator, dessen ebenfalls beschränkte Inverse (Korollar IV.3.4, [Wer11] (S. 155)) mit T^{-1} bezeichnet wird. Der zur Inversen T^{-1} adjungierte Operator trägt die Bezeichnung $(T^{-1})^*$. Durch das Einbringen der Identität $I = T^{-1}T$ in (B.38) ergibt sich

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle T^{-1}T u_i, u_j \rangle = \langle T u_i, (T^{-1})^* u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{I}^+. \quad (\text{B.39})$$

T erfüllt die Bedingungen für die Existenz einer beschränkten Inversen T^{-1} und damit besitzt auch der zu T adjungierte Operator T^* eine beschränkte Inverse $(T^*)^{-1}$ (Lemma A.3.65 c., [CZ95] (S. 603)), ferner sind die Invertierung der adjungierten Abbildung $(T^*)^{-1}$ und die adjungierte Abbildung der Inversen $(T^{-1})^*$ identisch $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Der zugehörige Beweis findet sich in [CZ95] (S. 603) und den dort genannten Quellen. Die Substitutionen

$$Tu_i = v_i \quad \text{und} \quad (T^{-1})^* u_i = (T^*)^{-1} u_i = w_i \quad (\text{B.40})$$

führen in (B.39) auf

$$\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{I}^+. \quad (\text{B.41})$$

$\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+} = \{Tu_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+} = \{(T^*)^{-1}u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ sind Untermengen von X die ein biorthogonales System gemäß Definition 63 bilden. Definition 62 **ONS3**) garantiert eine Darstellung aller $x \in X$ mittels der Elemente der angenommenen Orthonormalbasis $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$, es gilt

$$x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle_X u_i, \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.42})$$

Durch das Einsetzen des Zusammenhangs $x = Ix = T(T^{-1}x)$, $\forall x \in X$ in (B.42) und unter Berücksichtigung der Stetigkeit von T sowie der Eigenschaften linearer Abbildungen folgt

$$x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, (T^{-1})^* u_i \rangle_X T u_i, \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.43})$$

Berücksichtigung von (B.40) in (B.43) führt auf

$$x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.44})$$

Die durch die Transformationsvorschrift (B.40) erhaltenen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bilden gemäß Satz 64 eine Basis äquivalent zu einer Orthonormalbasis, also eine Rieszbasis. In (B.44) ist zu erkennen, dass in einer Rieszbasis des Hilbertraums X die Entwicklung der Elemente $x \in X$ analog zur Darstellung B.42 in einer Orthonormalbasis möglich ist. Allerdings basieren die Koeffizientenfunktionale $\{\langle x, w_i \rangle\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ auf der zur Rieszbasis biorthogonalen Menge $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$.

Zu der auf X definierten Norm $\|\cdot\|_X^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_X$ lässt sich unter Verwendung von $u_i = T^{-1}v_i$ mittels

$$\|x\|_1^2 = \langle x, x \rangle_1 = \langle T^{-1}x, T^{-1}x \rangle_X \quad (\text{B.45})$$

eine äquivalente Norm definieren. Aufgrund von $\|x\|_1 = \|T^{-1}x\|_X \leq \|T^{-1}\| \|x\|_X$ und

$$\|x\|_X = \|TT^{-1}x\|_X = \|Tx\|_1 \leq \|T\| \|x\|_1 \quad (\text{B.46})$$

gilt

$$\frac{1}{\|T\|} \|x\|_X \leq \|x\|_1 \leq \|T^{-1}\| \|x\|_X. \quad (\text{B.47})$$

Duale Rieszbasis

Der folgende Satz sowie dessen Beweis finden sich in [Chr03] (S. 55).

Satz 39 *Es sei X ein Hilbertraum und $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Rieszbasis von X . Dann existiert eine eindeutig bestimmte Menge $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ in X , für die*

$$x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i, \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.48})$$

$\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ist eine Basis von X , außerdem sind $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ biorthogonal. \square

Aus [GK69] (S. 310) ist der folgende Satz sowie dessen Beweis bekannt.

Satz 40 (Basiseigenschaften von zu Rieszbasen biorthogonalen Mengen) *Basen die biorthogonal zur Rieszbasis eines Raums X sind, bilden selber ebenfalls eine Rieszbasis von X .* \square

Die zu einer Rieszbasis $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eines Hilbertraums X biorthogonale Basis $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ist also ebenfalls eine Rieszbasis von X und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ heißt duale Rieszbasis zu $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$. Ferner gilt

$$x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, v_i \rangle_X w_i = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle_X v_i, \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.49})$$

In Kombination dienen Satz 39 und Satz 40 dem Nachweis, dass der zu einem diagonalisierbaren Operator adjungierte Operator ebenfalls diagonalisierbar ist.

Da Rieszbasen äquivalent zu Orthonormalbasen im Sinne von [You80] (S. 30) sind, gilt unter der Annahme einer Orthonormalbasis $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$, einer Rieszbasis $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und der zu $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ dualen Rieszbasis $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eines Hilbertraums X

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, u_i \rangle_X|^2 < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, v_i \rangle_X|^2 < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, w_i \rangle_X|^2 < \infty \quad (\text{B.50})$$

für alle $x \in X$.

B.5.4 Charakterisierung des topologischen Dualraums eines Hilbertraums

Einleitend erfolgt in diesem Abschnitt die Definition des topologischen Dualraums eines Hilbertraums X . Anschließend liefert der Rieszsche Darstellungssatz die Grundlage zur Charakterisierung des Dualraums auf Basis des ursprünglichen Hilbertraums. Als Vorbereitung auf den Satz von Lax-Milgram wird dann die Isomorphie zwischen $\mathcal{S}(X)$, $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(X, X')$ eingeführt. Abschließend wird die Isomorphie zwischen X und X' durch den Satz von Lax-Milgram charakterisiert.

Dualraum eines Hilbertraums

Zu einem Vektorraum X wird durch die Menge aller auf X erklärten linearen Funktionalen ebenfalls ein Vektorraum definiert, der als algebraischer Dualraum zu X bezeichnet wird ([Kre78] (S. 106)). Im Unterschied dazu wird der topologische Dualraum zu einem Hilbertraum X durch die stetigen linearen Funktionalen auf X erklärt. Da innerhalb dieser Arbeit allgemeine algebraischer Dualräume nicht betrachtet werden, wird ohne Verwechslungsgefahr der topologische Dualraum zu einem Hilbertraum X abkürzend als Dualraum bezeichnet. Synonym zu der Bezeichnung Dualraum finden in der Literatur verschiedentlich die Begriffe adjungierter Raum und konjugierter Raum ([Kre78] (S. 120)) Verwendung.

Definition 65 (Dualraum eines Hilbertraums) Es sei X ein Hilbertraum über dem Körper \mathbb{K} . Die Menge aller stetigen linearen Funktionale $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ wird als Dualraum X' zu X bezeichnet. \square

Die Betrachtung stetiger linearer Funktionale erlaubt es, den Dualraum mit der Funktionalnorm

$$\|\psi\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} |\psi(x)|, \quad (\text{B.51})$$

auszustatten. Der Dualraum zu einem Hilbertraum ist mit der voranstehenden Norm ebenfalls ein Hilbertraum (26.3 Satz, [Heu92] (S. 185)). Eine allgemeinere Aussage zur Vollständigkeit des Dualraums lässt sich Korollar II.2.2 aus [Wer11] (S. 58) entnehmen.

Zugunsten einer weniger komplexen Darstellung wird an dieser Stelle auf eine Unterscheidung zwischen dem durch X^d bezeichneten Dualraum eines Hilbertraums X und einer Repräsentation des Dualraums X' weitestgehend verzichtet. Eine Einführung der Dualität zwischen Hilberträumen und darüber hinaus der Dualität von Hilberträumen im Sinne eines Pivotraums unter Einbeziehung einer konsequenten Trennung von X^d und X' findet sich in [Keu93].

Rieszscher Darstellungssatz

Der Rieszsche Darstellungssatz ist die Basis, um beschränkte lineare Funktionale auf einem Hilbertraum X mittels des Innenprodukts auf dem entsprechenden Raum zu beschreiben ([Kre78] (S. 188), [Heu92] (S. 183)). Der Rieszsche Darstellungssatz eröffnet damit eine Möglichkeit, den Dualraum X' zu einem Hilbertraum X einfach zu charakterisieren. Die Identifikation jedes linearen Funktionals auf X mit einem Element aus X setzt unterschiedliche mathematische Gebilde gleich und führt letztendlich dazu, dass jeder Hilbertraum mit seinem Dualraum identifiziert werden kann ([NS] (S. 345)).

Satz 41 (Rieszscher Darstellungssatz) Zu jedem beschränkten linearen Funktional $\psi \in X'$ auf dem Hilbertraum X existiert ein eindeutiges $x \in X$, sodass

$$\psi(x) = \langle x, y \rangle_X \quad (\text{B.52})$$

für jedes $x \in X$ gilt. Zudem stimmt die Funktionalnorm $\|\psi\|_{X'}$ mit der Norm des Repräsentanten y auf X überein

$$\|\psi\|_{X'} = \|y\|_X. \quad (\text{B.53})$$

\square

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt, muss bei der Definition der Funktionale beachtet werden, in welchem Argument Linearität und in welchem Antilinearität vorliegt, siehe dazu auch Definition 37.

Im Hinblick auf die Einführung von Raumskalen in Anhang B.9.1 erfolgt eine Anpassung der Formulierung des Rieszschen Darstellungssatzes. Um gleichermaßen Hilberträume über dem Körper

der reellen wie komplexen Zahlen behandeln zu können, wird [Alt06] (S. 162) folgend ein semilinearer Operator

$$\begin{aligned} i_R : X &\rightarrow X' \\ y &\mapsto i_R y, \end{aligned} \tag{B.54}$$

definiert durch

$$(i_R y)(x) = \langle x, y \rangle_X, \quad \forall x \in X, \tag{B.55}$$

eingeführt. Auf Basis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung lässt sich zeigen, dass dieser Operator eine Isometrie darstellt ([Alt06] (S. 162)) und damit $\|i_R y\|_{X'} = \|y\|_X$ gilt. Die Abbildung i_R ist injektiv und surjektiv ([Alt06] (S. 162)), damit handelt es sich bei i_R um einen isometrischen Isomorphismus. Aufgrund von $\mathcal{R}(i_R) = X'$ ist i_R ferner ein unitärer Operator gemäß Definition 66. Somit kann die i_R definierende Gleichung als alternative Formulierung des Rieszschen Darstellungssatzes verstanden werden. Formal kann die Gleichsetzung $\psi = i_R y$ erfolgen. Eine Identifizierung von X mit dem zugehörigen Dualraum erfolgt durch die Vernachlässigung des Unterschieds zwischen Urbild y und Bild $i_R y$ von i_R .

Satz von Lax-Milgram

Der Satz von Lax-Milgram lässt sich als Verallgemeinerung des Rieszschen Darstellungssatzes auf stetige koerzive Sesquilinearformen interpretieren. Die Isomorphie zwischen einem Hilbertraum und dem zugehörigen Dualraum wird über einen stetigen Operator gezeigt, der einer gegebenen stetigen koerziven Sesquilinearform zugeordnet werden kann. Anwendung findet der Satz von Lax-Milgram verschiedentlich beim Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Variationsproblemen ([Bra07a]). Innerhalb dieser Arbeit wird dieser Satz zur Überführung der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichungen des Beispielsystems in die Operatordarstellung gemäß Abschnitt A.3 herangezogen. Das Vorgehen zur Einführung des Satzes von Lax-Milgram entstammt [DL88], alternativ wird der Satz u.a. in [Zei95] oder [Alt06] aufgeführt.

Einer stetigen Sesquilinearform definiert auf zwei Hilberträumen wird in eindeutiger Weise ein stetiger Operator zwischen diesen Räumen zugeordnet, die Definition des linearen Operators hängt dabei direkt vom Innenprodukt des Bildraums des Operators ab ([DL88] (S. 351)).

Satz 42 (Einer stetigen Sesquilinearform zugeordneter stetiger Operator) *Es seien Hilberträume X, Y über \mathbb{C} und eine stetige Sesquilinearform $t \in \mathcal{S}(X \times Y)$ sowie ein stetiger Operator $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann existiert ein Isomorphismus von $\mathcal{S}(X \times Y)$ auf $\mathcal{L}(X, Y)$, der $t \in \mathcal{S}(X \times Y)$ einen beschränkten Operator $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ zuordnet. Der Operator ist definiert durch*

$$\langle \tilde{T}x, y \rangle_Y = t(x, y) \quad \forall x \in X, y \in Y$$

ferner gilt $\|\tilde{T}\| = \|t\|$. □

Der voranstehende Satz, dessen Beweis [DL88] (S. 351) zu entnehmen ist, impliziert für $Y = X$ die Isomorphie der Räume $\mathcal{S}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$. Als nächstes wird ein Zusammenhang zwischen dem Raum der stetigen Sesquilinearformen $\mathcal{S}(X)$ auf dem Hilbertraum X und dem Raum der stetigen Abbildungen zwischen Elementen dieses Hilbertraums und seinem Dualraum $\mathcal{L}(X, X')$ eingeführt. Der folgende Satz und ein zugehöriger Beweis finden sich in [DL88] (S. 368).

Satz 43 (Isomorphismus von $\mathcal{L}(X)$ auf $\mathcal{L}(X, X')$) *Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 42 mit $X = Y$, ferner bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X} : X' \times X \rightarrow \mathbb{C}$ das Dualitätsprodukt. Dann existiert ein Isomorphismus von $\mathcal{S}(X)$ auf $\mathcal{L}(X, X')$ der einer Sesquilinearform $t \in \mathcal{S}(X)$ einen Operator $T \in \mathcal{L}(X, X')$ zuordnet. Der Operator ist definiert durch*

$$(Tx_1)(x_2) = \langle Tx_1, x_2 \rangle_{X' \times X} = t(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

ferner gilt $\|T\|_{\mathcal{L}(X, X')} = \|t\|$. □

Satz 43 folgend kann einer stetigen Sesquilinearform $t \in \mathcal{S}(X)$ nicht nur eindeutig ein stetiger Operator $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X)$ gemäß Satz 42 zugeordnet werden, sondern darüber hinaus ein stetiger Operator $T \in \mathcal{L}(X, X')$. Aus Satz 42 und Satz 43 folgt, dass die Räume $\mathcal{S}(X)$, $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(X, X')$ isomorph sind. Abschließend wird für den Fall stetiger und darüber hinaus koerziver Sesquilinearformen festgestellt, dass der mit einer Sesquilinearform gemäß Satz 43 assoziierte Operator $T \in \mathcal{L}(X, X')$ seinerseits ein Isomorphismus zwischen dem Hilbertraum X und dem zugehörigen Dualraum X' darstellt (Theorem 7, [DL88] (S. 368)).

Satz 44 (Satz von Lax-Milgram) *Es sei eine stetige und koerzive Sesquilinearform $t \in \mathcal{S}(X)$ und $T \in \mathcal{L}(X, X')$ der dieser Sesquilinearform gemäß Satz 43 zugeordnete Operator. Dann ist T ein Isomorphismus von X auf X' .* □

Die Definition der Koerzitivität beruht an dieser Stelle auf (B.18) aus Abschnitt B.4.1. Der in Satz 44 vorausgesetzten stetigen und koerziven Sesquilinearform $t \in \mathcal{S}(X)$ kann gleichsam gemäß Satz 42 mit $Y = X$ ein $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X)$ zugeordnet werden. In diesem Fall ist \tilde{T} invertierbar und für die Operatornorm gilt $\|\tilde{T}^{-1}\| \leq \frac{1}{c_2}$ mit c_2 gemäß (B.18).

B.6 Lineare Operatoren in Hilberträumen

Dieser Abschnitt beinhaltet verschiedene für diese Arbeit relevante Definitionen im Zusammenhang mit linearen Operatoren in Hilberträumen.

Isomorphismus zwischen Hilberträumen

Im Hinblick auf die Definition von Raumskalen in Definition B.9.1 und die Charakterisierung aller Orthonormalbasen eines Hilbertraums werden unitäre Operatoren zwischen Hilberträumen als Spezialfall isometrischer Isomorphismen eingeführt. Die folgende Definition orientiert sich an den Ausführungen aus [Kat95] (S. 258).

Definition 66 (Isometrische und unitäre lineare Operatoren) Es seien Hilberträume X, Y und ein stetiger linearer Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. T wird als isometrisch oder auch Isometrie bezeichnet, falls

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_Y = \langle x_1, x_2 \rangle_X, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Darüber hinaus heißt ein isometrischer Operator T unitär, falls eine der beiden äquivalenten Bedingungen gilt:

UO1) Das Bild von T entspricht dem gesamten Raum Y , es gilt $\mathcal{R}(T) = Y$;

UO2) T ist invertierbar mit $T^* = T^{-1}$, also $TT^* = I_Y, T^*T = I_X$. □

Aus der Erhaltung des Innenprodukts folgt auch die Erhaltung der Norm durch Isometrien und unitäre Operatoren, derartige Operatoren sind längenerhaltend und somit auch winkelerhaltend ([Wer11] (S. 240)). Ein isometrischer Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist invertierbar, aber nicht zwingend beschränkt invertierbar ([Kat95] (S. 258)). Die Existenz einer beschränkten Inversen lässt sich für unitäre Operatoren folgern, in einem derartigen Fall ist $\mathcal{R}(T) = Y = \mathcal{D}(T^{-1})$ ([Kat95] (S. 258)).

Numerischer Bildbereich linearer Operatoren

Die Definition des numerischen Bildbereichs ([Kat95] (S. 267)) eines Operators wird unter anderem zur Klassifizierung selbstadjungierter Operatoren in Definition 72 vorausgesetzt.

Definition 67 (Numerischer Bildbereich) Es sei ein Hilbertraum X und ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow X$, dann wird durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \nu_T(x) : \{x \in \mathcal{D}(T) \mid \|x\| = 1\} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \langle Tx, x \rangle_X \end{aligned} \tag{B.56}$$

die Menge aller Elemente aus dem Körper definiert, die der Operator T bei der Abbildung am Innenprodukt erreichen kann, falls als Urbild alle Elemente aus seinem Definitionsbereich mit einer Norm von Eins zugelassen werden. Die auf diese Art erreichbare Menge wird als numerischer Bildbereich von T bezeichnet. □

Am anschaulichsten wird die Definition des numerischen Bildbereichs für endlich-dimensionale Matrizen in Diagonalform. Weiterführende Aussagen bezüglich des numerischen Bildbereichs eines linearen Operators in einem Hilbertraum sind in [Kat95] (S. 267) zu finden.

Orthogonalprojektion

In Abschnitt B.5.2 wird durch Satz 35 die Zerlegung eines Hilbertraums X in die direkte Summe aus einem abgeschlossenen Unterraum X_1 von X und das durch Definition 60 charakterisierte zugehörige orthogonale Komplement X_1^\perp geschildert. Die besagte Zerlegung kann mittels Orthogonalprojektoren beschrieben werden. Der folgende Satz entstammt [Kre78] (S. 481) und charakterisiert Orthogonalprojektoren als Spezialfall gewöhnlicher Projektoren (Abschnitt B.4.3).

Definition 68 (Orthogonalprojektor) Es sei X ein Hilbertraum und $P \in \mathcal{L}(X)$ ein Projektor. Dann heißt P genau dann Orthogonalprojektor oder orthogonale Projektion, falls P selbstadjungiert ist und damit $P = P^*$ gilt. □

Entsprechende Ausführungen finden sich beispielsweise auch in [Heu92] (S. 172) oder in [Kat95]. Orthogonalprojektoren $P \neq 0$ verfügen stets über eine Norm von Eins (9.5-2 Theorem (Positivity, norm), [Kre78] (S. 482)).

Die orthogonale Zerlegung eines Hilbertraums lässt sich elementweise durch

$$x = x_1 + x_1^\perp \tag{B.57}$$

darstellen. Falls $P \in \mathcal{L}(X)$ ein Orthogonalprojektor ist, sodass in (B.57) $Px = x_1$ gilt, dann ist $x_1^\perp \in N(P)$ und zudem $(I - P)x = x - x_1 = x_1^\perp$. Die Zerlegung eines Hilbertraums X in eine direkte Summe lässt sich mittels des Orthogonalprojektors P analog zu Gleichung (B.21) ausdrücken. Wobei der Nullraum eines Orthogonalprojektors gerade das orthogonale Komplement zu dessen Bildbereich ist ([CZ95] (S. 607)).

Das Bild eines Orthogonalprojektors $P \in \mathcal{L}(X)$ auf dem abgeschlossenen und damit vollständigen Unterraum $\mathcal{R}(P) = X_1$ zu einem gegebenen $x \in X$ ist stets das Element $x_1 \in X_1$ mit dem geringsten Abstand zu x . Weiterführende Eigenschaften von Projektionen finden sich beispielsweise in [Kre78] (S. 480), [Kat95] (S. 54) oder [Chr03].

B.6.1 Dualer und adjungierter Operator

Dualer Operator

Im Folgenden wird die Definition des dualen Operators [Kre93] (S. 40) eingeführt, der in der Literatur verschiedentlich auch als adjungierter oder konjugierter Operator ([Gol66] (S. 50), [Yos80] (S. 193)) bezeichnet wird. Innerhalb dieser Arbeit wird die Bezeichnung des adjungierten Operators für die Hilbertraum-Adjungierte eines Operators gemäß Definition 70 verwendet, die im Allgemeinen nicht mit dem dualen Operator übereinstimmt.

Definition 69 (Dualer Operator) Es seien X, Y Hilberträume und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ dicht definiert. Dann wird der mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(T') = \{y' \in Y' \mid \exists x' \in X', \text{ sodass } \langle Tx, y' \rangle_{Y \times Y'} = \langle x, x' \rangle_{X \times X'} \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)\} \quad (\text{B.58})$$

ausgestattete und durch

$$\langle x, T' y' \rangle_{X \times X'} = \langle Tx, y' \rangle_{Y \times Y'}, \quad \forall y' \in \mathcal{D}(T'), \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), \quad (\text{B.59})$$

definierte Operator $T' : \mathcal{D}(T') \subset Y' \rightarrow X'$ als zu T dualer Operator bezeichnet. \square

Die dichte Definition von T in Definition 69 ist nicht zwingend erforderlich, wird aber zur eindeutigen Festlegung eines x' durch ein y' vorausgesetzt ([Yos80] (S. 193)). Ferner kann auf die Annahme von Hilberträumen zugunsten allgemeinerer Räume verzichtet werden ([Yos80] (S. 193)), eine derartige Verallgemeinerung ist innerhalb dieser Arbeit allerdings nicht erforderlich.

Adjungierter Operator

Dieser Abschnitt dient der Einführung des adjungierten Operators zu einem unbeschränkten, aber dicht definierten linearen Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ zwischen zwei komplexen Hilberträumen X, Y (siehe beispielsweise [DL88], [Kre78]). Neben den genannten Literaturquellen zur Einführung des adjungierten Operators findet sich in [Wei] (S. 103) eine Definition auf Basis des Graphen eines linearen Operators.

Definition 70 (Adjungierter Operator) Es seien X, Y Hilberträume und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ ein dicht definierter linearer Operator. Der abgeschlossene lineare Operator $T^* : Y \rightarrow X$ mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(T^*) = \{y \in Y \mid \exists x^* \in X \text{ sodass } \langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, x^* \rangle_X, \forall x \in \mathcal{D}(T)\},$$

definiert durch $\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, T^* y \rangle_X$; $x \in \mathcal{D}(T) \wedge y \in \mathcal{D}(T^*)$, wird als zu T adjungierter Operator bezeichnet. \square

Die Begründung für die Forderung nach der dichten Definition (Abschnitt B.4) des Operators T liegt in der Eindeutigkeit des in Definition 70 gesuchten Elements x^* . Ein entsprechender Beweis auf Basis eines Widerspruchs findet sich in [Kre78] (S. 527) und wird hier aufgrund seiner Kürze und Eingänglichkeit übernommen.

Aus der Annahme, dass der Definitionsbereich von $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow X$ nicht dicht im Hilbertraum X liege folgt $\overline{\mathcal{D}(T)} \neq X$. Ausgehend von Satz 32 muss dann ein Element aus dem orthogonalen Kom-

plement des Definitionsbereichs $x_1^\perp \in \mathcal{D}(T)^\perp$ existieren, dass nicht Null ist und dennoch senkrecht auf allen $x \in \mathcal{D}(T)$ steht. Für das Innenprodukt auf dem Hilbertraum X folgt entsprechend

$$\langle x, x_1^\perp \rangle_X = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Aus der Definition des adjungierten Operators ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle_Y &= \langle x, x^* \rangle_X + 0 \\ &= \langle x, x^* \rangle_X + \langle x, x_1^\perp \rangle_X \\ &= \langle x, x^* + x_1^\perp \rangle_X, \end{aligned}$$

und somit ein Widerspruch zur Eindeutigkeit. Unter der Annahme, dass der Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ dicht in X liegt, folgt dagegen aus Lemma 32 direkt $x_1^\perp = 0$ und damit die Eindeutigkeit. Aus der dichten Definition von T in Definition 70 folgt damit auch die Eindeutigkeit des adjungierten Operators T^* ([Kat95] (S. 167)).

Die Abgeschlossenheit des adjungierten Operators T^* wird unter der Voraussetzung der dichten Definition von T in [Kat95] (S. 168) gezeigt. Da in Definition 70 Hilberträume X, Y vorausgesetzt werden und diese stets reflexiv sind, folgt auch die dichte Definition von T^* mit $\overline{\mathcal{D}(T^*)} = Y$ ([DL88] (S. 361)). Falls ein Operator T in Definition 70 zusätzlich abgeschlossen ist, folgt $T = (T^*)^*$ ([DL88] (S. 361)).

Zahlreiche weitere Aussagen zu Zusammenhängen zwischen den in Definition 70 auftretenden Operatoren T und T^* finden sich beispielsweise in [Kat95].

Zusammenhang zwischen dualem und adjungiertem Operator

Unter Annahme zweier Hilberträume X, Y und einem Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ ist der zu T duale Operator

$$T' : \mathcal{D}(T') \subset Y' \rightarrow X' \quad \text{mit} \quad \langle x, T'y' \rangle_{X \times X'} = \langle Tx, y' \rangle_{Y \times Y'} \quad (\text{B.60})$$

$\forall x \in \mathcal{D}(T)$ und $\forall y' \in \mathcal{D}(T')$ durch Definition 69 gegeben. Ferner wird der zu T adjungierte Operator

$$T^* : \mathcal{D}(T^*) \subset Y \rightarrow X \quad \text{mit} \quad \langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, T^*y \rangle_X \quad (\text{B.61})$$

$\forall x \in \mathcal{D}(T)$ und $\forall y \in \mathcal{D}(T^*)$ mittels Definition 70 festgelegt. Allein die Ausführungen zum Dualraum eines Hilbertraums in Anhang B.5.4 und die Existenz eines isometrischen Isomorphismus zwischen beiden Räumen (Definition 66) legt eine enge Beziehung zwischen T' sowie T^* nah. In Analogie zu (B.54) und (B.55) werden die Operatoren

$$i_X : X \rightarrow X' \quad \text{definiert durch} \quad (i_X x_2)(x_1) = \langle x_1, x_2 \rangle_X, \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad (\text{B.62})$$

sowie

$$i_Y : Y \rightarrow Y' \quad \text{definiert durch} \quad (i_Y y_2)(y_1) = \langle y_1, y_2 \rangle_Y, \quad \forall y_1, y_2 \in Y \quad (\text{B.63})$$

angenommen. Die Eigenschaften der voranstehenden Operatoren werden in Anhang B.5.4 aufgeführt. Es handelt sich bei i_X und i_Y jeweils um isometrische Isomorphismen. Da i_X und i_Y ferner unitäre Operatoren sind, existiert zu jedem der beiden Operatoren auch ein beschränkter inverser Operator (Definition 66).

Durch Berücksichtigung von i_X und i_Y folgt aus (B.61)

$$\langle Tx, i_Y y \rangle_{Y \times Y'} = \langle x, i_X T^* y \rangle_{X \times X'} \quad (\text{B.64})$$

Für die linke Seite der voranstehenden Gleichung gilt gemäß (B.60)

$$\langle Tx, i_Y y \rangle_{Y \times Y'} = \langle x, T' i_Y y \rangle_{X \times X'} \quad (\text{B.65})$$

und damit

$$\langle x, i_X T^* y \rangle_{X \times X'} = \langle x, T' i_Y y \rangle_{X \times X'}. \quad (\text{B.66})$$

Entsprechend ist $i_X T^* = T' i_Y$ und aufgrund der Eigenschaften von i_X und i_Y ergibt sich abschließend der gesuchte Zusammenhang zwischen T^* und T' zu

$$T^* = i_X^{-1} T' i_Y. \quad (\text{B.67})$$

Nur falls die Hilberträume X und Y mit ihren jeweiligen Dualräumen identifiziert werden, indem keine Unterscheidung zwischen $i_X x$ und x bzw. $i_Y y$ und y getroffen wird, folgt $T^* = T'$.

B.6.2 Selbstadjungierte und symmetrische Operatoren

Definition symmetrischer und selbstadjungierter Operatoren

Auf Basis der Definition des adjungierten Operators (Definition 70), der Gleichheit zweier Operatoren (Definition 39) sowie der Einschränkung und Erweiterung von Operatoren (Definition 40) folgen verschiedene Klassifizierungen eines Operators, die weitreichende Schlüsse bezüglich seiner Eigenschaften zulassen. Die folgenden Definitionen sind an verschiedenen Stellen in der Literatur wie beispielsweise [CZ95] (S. 605) oder [Zei95] (S. 264) zu finden.

Definition 71 (Mögliche Klassifizierung linearer Operator) Es sei X ein Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ ein dicht definierter linearer Operator. Dann heißt T

KLO1) symmetrisch, falls $T \subseteq T^*$, ($\langle T x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, T x_2 \rangle, \forall x_1, \forall x_2 \in \mathcal{D}(T)$);

KLO2) selbstadjungiert, falls $T = T^*$, ($\langle T x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, T x_2 \rangle, \forall x_1, \forall x_2 \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$);

KLO3) schief-symmetrisch, falls $T \subseteq -T^*$, ($\langle T x_1, x_2 \rangle = -\langle x_1, T x_2 \rangle, \forall x_1, \forall x_2 \in \mathcal{D}(T)$);

KLO4) schief-adjungiert, falls $T = -T^*$, ($\langle T x_1, x_2 \rangle = -\langle x_1, T x_2 \rangle, \forall x_1, \forall x_2 \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(-T^*)$).

□

Jeder selbstadjungierte Operator ist damit auch symmetrisch. Die eingeführte Klasse der selbstadjungierten Operatoren spielt zum einen für die mathematische Beschreibung zahlreicher realer Vorgänge eine wichtige Rolle zum anderen lässt sich die Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren verhältnismäßig einfach unter Erhaltung wichtiger Eigenschaften auf den Fall unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren verallgemeinern. Dementsprechend finden sich zur Theorie selbstadjungierter Operatoren in zahlreichen Werken der Funktionalanalysis ([Wer11; Zei95; Alt06]) sowie der Operatortheorie ([Wei; DL90] oder [NS]) weitreichende Betrachtungen. Im Rahmen dieser Arbeit kommt den Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren in erster Linie Bedeutung bei der Betrachtung des Steifigkeitsoperators des Beispielsystems zu.

Grundlegende Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren

Einige relevante Fakten hinsichtlich der Eigenschaften symmetrischer und selbstadjungierter Operatoren sind in der folgenden Aufzählung zusammengefasst. Falls nicht explizit anders gesagt, wird dabei ein Hilbertraum X und ein dicht definierter linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow X$ vorausgesetzt. Ferner gelte $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle$ bezüglich aller $x \in \mathcal{D}(T)$. Die mathematischen Beweise zu den Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren finden sich in der jeweils genannten Literaturquelle.

ESO1) Falls T beschränkt und symmetrisch ist, ist T auch selbstadjungiert;

ESO2) Jeder selbstadjungierte Operator T ist abgeschlossen ([GGK03] (S. 210)). Dies kann direkt aus der Definition des adjungierten Operators (Definition 70) entnommen werden;

ESO3) Ein dicht definierter invertierbarer Operator ist dann und nur dann selbstadjungiert, wenn es der zu ihm inverse Operator ist ([GGK03] (S. 210));

ESO4) T ist dann und nur dann selbstadjungiert, wenn $\langle Tx, x \rangle$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ reell ist ([Kre78] (S. 534)). Vergleiche dazu auch die Definition zum numerischen Bildbereich linearer Operatoren in Abschnitt B.6.2;

ESO5) Für T mit $\mathcal{D}(T) = X$, sind entsprechend [Kre78] (S. 534) Symmetrie und Selbstadjungiertheit gleichbedeutend.

Unter den eingangs genannten Voraussetzungen an T lassen sich zudem verschiedene Aussagen über das Spektrum von T treffen. Das Spektrum des linearen selbstadjungierten Operators T ist rein reell, zu jedem Punkt x aus der Resolventenmenge $x \in \rho(T)$ gehört eine Umgebung, die ebenfalls zur Resolventenmenge gehört. Demnach ist die Resolventenmenge $\rho(T)$ offen und damit das Spektrum $\sigma(T)$ abgeschlossen ([Kre78] (S. 544)). Als Sonderfall dazu kann ein selbstadjungierter Operator mit kompakter Resolvente betrachtet werden. Die Eigenschaften des Spektrums derartiger Operatoren finden sich beispielsweise in Satz 5.20 [Wei] (S. 202). Insbesondere ist das Spektrum dieser Klasse von Operatoren reell und ein reines Punktspektrum. Das Spektrum symmetrischer Operatoren dagegen ist nicht zwingend reell, ein Gegenbeispiel ist in [Wer11] (S. 355)

gezeigt. Das Residualspektrum von T ist leer ([Kre78] (S. 546)). Besonders einfach lässt sich für die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators $T = T^*$ zeigen, dass diese reell sind. Aus

$$\langle Tv_i, v_i \rangle = \langle v_i, Tv_i \rangle \quad \text{und} \quad \langle \lambda_i v_i, v_i \rangle = \langle v_i, \lambda_i v_i \rangle$$

folgt mit den Eigenschaften des Innenprodukts auf $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ unmittelbar $\lambda_i \langle v_i, v_i \rangle = \bar{\lambda}_i \langle v_i, v_i \rangle$. Entsprechend gilt $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, was nur für reelle Eigenwerte möglich ist.

Klassifizierung selbstadjungierter Operatoren anhand des numerischen Bildbereichs

Den vorausgehenden Aussagen über die Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren und speziell **ESO4**) ist zu entnehmen, dass der numerische Bildbereich selbstadjungierter Operatoren ausschließlich reelle Zahlen umfasst. Diese Tatsache wird für eine weitreichende Klassifizierung genutzt, die innerhalb dieser Arbeit verschiedentlich eingesetzt wird.

Definition 72 (Klassifikation selbstadjungierter Operatoren anhand des numerischen Bildbereichs) Es sei X ein Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein dicht definierter selbstadjungierter Operator. Dann heißt T

SON1) nichtnegativ, falls $\langle Tx, x \rangle \geq 0 \forall x \in \mathcal{D}(T)$;

SON1) positiv, falls $\langle Tx, x \rangle > 0 \forall x \neq 0 \in \mathcal{D}(T)$;

SON1) koerziv, falls ein $c_1 > 0$ existiert, sodass $\langle Tx, x \rangle \geq c_1 \|x\|^2 = c_1 \langle x, x \rangle \forall x \in \mathcal{D}(T)$. \square

Die vorangehende Definition ist [CZ95] (S. 606) entnommen, ist aber unter anderem auch in [NS] (S. 370) zu finden. Eine ausführliche Betrachtung positiver Operatoren sowie ihrer Quadratwurzeln lässt sich zudem [Kre78] entnehmen.

Abkürzend wird $T \geq 0$ für nichtnegativ und $T > 0$ für positiv notiert. Außerdem wird $T \leq S$ für $0 \leq S - T$ geschrieben. Die kurze Schreibweise impliziert eine gewisse Ordnung in der Menge aller selbstadjungierten Operatoren, die auf der Betrachtung des numerischen Bildbereichs beruht. Insbesondere folgt bezüglich dieser Ordnung aus der Definition der Koerzitivität

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &\geq c_1 \langle Ix, x \rangle \\ \Leftrightarrow \langle (T - c_1 I)x, x \rangle &\geq 0 \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \quad (\text{B.68})$$

die Schreibweise $T \geq c_1 I$ für einen koerziven Operator T .

Eigenschaften koerziver Operatoren

Koerziven Operatoren sind sehr weitreichende und nützliche Eigenschaften zu eigen. Falls ein selbstadjungierter Operator T mit kompakter Resolvente positiv ist, enthält sein diskretes Spektrum ausschließlich positive reelle Eigenwerte, die Null dagegen ist Teil der Resolventenmenge.

Die positive Konstante $c_1 \in (0, \infty)$ aus (B.68) legt eine untere Schranke des Spektrums $\sigma_p(T)$ fest ([Bey07] (S. 85)), das somit auf der reellen Achse im Intervall $[c_1, \infty)$ liegt. Es gilt

$$\sigma_p(T) \subset [c_1, \infty). \quad (\text{B.69})$$

Als direkte Folge dieser Eigenschaft sind koerzive Operatoren stets bijektiv. Insbesondere existiert zu einem koerziven Operator $T \geq c_1 I, c_1 > 0$ eine beschränkte Inverse T^{-1} mit $\|T^{-1}\| \leq c_1^{-1}$, die ihrerseits positiv ist (Proposition 3.3.2, [TW09] (S. 84)). Eine anschauliche Interpretation der Klassifikation selbstadjungierter Operatoren auf Basis ihres numerischen Bildbereichs ergibt sich anhand von Analogiebetrachtungen zur Definitheit endlich-dimensionaler Matrizen. Insbesondere die Betrachtung einer symmetrischen Matrix in einer stets zu erreichenden Diagonalform verdeutlicht unter Berücksichtigung der Operatornorm den Zusammenhang aus (B.69).

Quadratwurzel selbstadjungierter, nichtnegativer linearer Operatoren

Der folgende Satz entspricht Lemma A.3.73 aus [CZ95] (S. 606). Die zugehörigen Beweise sind der, in der genannten Quelle, referenzierten Literatur zu entnehmen.

Satz 45 (Quadratwurzel selbstadjungierter, nichtnegativer Operatoren) *Es sei X ein Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein Operator mit $T \geq 0$. Dann besitzt T eine eindeutig bestimmte, nicht negative Quadratwurzel $T^{\frac{1}{2}}$, wobei*

$$\mathcal{D}(T^{\frac{1}{2}}) \supset \mathcal{D}(T),$$

$$T^{\frac{1}{2}}x \in \mathcal{D}(T^{\frac{1}{2}}) \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

sowie $T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}x = Tx \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$ gelten. Für $T > 0$ folgt auch $T^{\frac{1}{2}} > 0$. □

Mit einiger Vorsicht und sehr anschaulich formuliert kann ein in Lemma 45 vorausgesetzter Operator wie eine positive reelle Zahl aufgefasst werden. Dabei gilt es insbesondere in Bezug auf den Steifigkeitsoperator des Beispielsystem zu beachten, dass die Quadratwurzel eines Differentialoperators nicht zwingend wieder ein Differentialoperator sein muss.

B.6.3 Sesquilinearformen in Hilberträumen

Definition von Sesquilinearformen in Hilberträumen

Die Eigenschaften von Sesquilinearformen auf komplexen Hilberträumen sind in dieser Arbeit im Hinblick auf die Betrachtung des Steifigkeitsoperators von Bedeutung. Zunächst sei dazu auf die Ausführungen aus Abschnitt B.4 verwiesen, die ihrerseits auf Satz 1.17 aus [Wei] (S. 21f) beruhen. Für eine Sesquilinearform t auf einem komplexen Hilbertraum X ist es äquivalent, dass t hermitesch ist und dass die zugehörige quadratische Form $q(x) = t(x, x)$ reell ist. Eine Verknüpfung mit dem zu einer hermiteschen Sesquilinearform gehörigen Operator T stellt Satz 2.50 aus [Wei] (S. 105) her.

Satz 46 *Es sei X ein komplexer Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow X$ ein linearer Operator. T ist genau dann hermitesch, wenn die durch $t(x, y) = \langle x, Ty \rangle$ auf $\mathcal{D}(T)$ definierte Sesquilinearform hermitesch ist oder äquivalent die durch $q(x) = t(x, x)$ auf $\mathcal{D}(T)$ definierte quadratische Form reell ist.* \square

Erzeugender Operator einer Sesquilinearform

Der folgende Satz entspricht Satz 4.13 aus [Wei] (S. 170) und formuliert die Bedingungen, unter denen eine hermitesche Sesquilinearform (Definition 37) einen eindeutig bestimmten, selbstadjungierten erzeugenden Operator besitzt. Der Satz knüpft damit einen Zusammenhang zwischen der Operatordarstellung resultierend aus der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichungen des Beispielsystems A.2 und derjenigen aus der starken Formulierung dieser Gleichungen.

Satz 47 (Erzeugender selbstadjungierter Operator einer Sesquilinearform) *Es sei X ein Hilbertraum und t eine hermitesche Sesquilinearform, deren Definitionsbereich $\mathcal{D}(t) = X_t$ dicht in X eingebettet ist und für die $t(x, x) \geq \|x\|_X^2, \forall x \in X_t$ gilt. X_t sei mit der Norm $\|\cdot\|_t$, induziert durch das Innenprodukt*

$$\langle x_1, x_2 \rangle_t = t(x_1, x_2), \quad (\text{B.70})$$

vollständig und somit ebenfalls ein Hilbertraum. Dann existiert ein eindeutig bestimmter, selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(t) = X_t \rightarrow X$, der

$$\langle x_1, Tx_2 \rangle_X = t(x_1, x_2), \forall x_2 \in \mathcal{D}(T), \forall x_1 \in \mathcal{D}(t) = X_t \quad (\text{B.71})$$

erfüllt. Dabei gilt

$$\mathcal{D}(T) = \{x_2 \in \mathcal{D}(t) | \exists y \in X \text{ mit } t(x_1, x_2) = \langle x_1, y \rangle_X \quad \forall x_1 \in \mathcal{D}(t)\} \quad (\text{B.72})$$

mit $Tx_2 = y$ für $x_2 \in \mathcal{D}(T)$. $\mathcal{D}(T)$ liegt bezüglich der Norm $\|\cdot\|_t$ dicht in $X_t = \mathcal{D}(t)$. \square

Ein Beweis zu Satz 47 findet sich in [Wei] (S. 171f). Die Forderung in Satz 47 nach einer unteren Schranke der Sesquilinearform entspricht der Koerzitivität eines selbstadjungierten Operators gemäß Definition 72. Insbesondere impliziert diese Eigenschaft die positive Definitheit der Sesquilinearform. Nach Definition 56 erfüllt eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform die Anforderungen an ein Innenprodukt. Somit ist die Definition des Innenprodukts nach (B.70) auf dem Definitionsbereich der Sesquilinearform t durch die Sesquilinearform selber möglich.

Der Definitionsbereich (B.72) des Operators T wird durch die Elemente aus dem Definitionsbereich der Sesquilinearform gebildet, für die es einen Stellvertreter auf dem Hilbertraum $y \in X$ gibt, sodass für alle Elemente $x_1 \in \mathcal{D}(t)$ die Sesquilinearform mit dem Innenprodukt auf dem Hilbertraum

$$t(x_1, x_2) = \langle x_1, y \rangle_X$$

übereinstimmt. Der eindeutig bestimmte Operator T zeichnet sich dadurch aus, dass zu den $y \in X$ ein Element aus seinem Definitionsbereich $x_2 \in \mathcal{D}(T)$ existiert, sodass $Tx_2 = y$ gilt.

Desweiteren ist der selbstadjungierte Operator T aufgrund der verwendeten Norm $\|x\|_X^2 = \langle x, x \rangle_X$ und

$$\langle Tx, x \rangle_X \geq \langle x, x \rangle_X \Leftrightarrow \langle (T - I)x, x \rangle_X \geq 0$$

koerziv, wobei $c_1 = 1$ für die untere Schranke aus Definition 72 gilt.

B.7 Spektraltheorie

Im Folgenden werden verschiedene Begriffe aus der Spektraltheorie in einem für diese Arbeit hinreichenden Umfang eingeführt.

B.7.1 Resolventen Operator/Resolvente

Definition der Resolvente

Der vorliegende Abschnitt dient der Einführung der Resolvente eines abgeschlossenen linearen Operators T . Im Rahmen dieser Arbeit steht T beispielsweise stellvertretend für den Systemoperator eines unendlich-dimensionalen Systems. Die Einführung der Resolvente knüpft damit an die Darstellung der Lösung des abstrakten Cauchy-Problems an, wobei sich die Betrachtungen im Unterschied zu Abschnitt 2.2.2 vom Zeitbereich in den Frequenzbereich verlagern. Die Fragen zu welchen $s \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$(sI - T)x = y \tag{B.73}$$

für $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ eine eindeutige Lösung besitzt, für jedes $y \in X$ lösbar ist und wann die Lösung x stetig von der Inhomogenität y abhängt, führt auf den Begriff der Resolvente und der Resolventenmenge. Die Motivation des Begriffs der Resolvente im regelungstechnischen Kontext ergibt sich aus der Betrachtung der Zustandsgleichung eines ungezwungenen linearen Systems im Bildbereich der Laplace-Transformation gemäß (2.25). Unter der Annahme $B = 0$ sowie der Existenz aller benötigten Größen entspricht die erste Zeile von Gleichung (2.25) dem Bild des abstrakten Cauchy-Problems (2.45) unter der Laplace-Transformation. Die Frage nach der Lösbarkeit der ersten Zeile von Gleichung (2.25), also die Bestimmung eines Zustandsvektors $X(s)$, zu gegebenen x_0 und $U(s)$, in Abhängigkeit von der komplexen Variable s , führt im regelungstechnischen Kontext auf den Begriff der Resolvente sowie die Definition der Resolventenmenge in Definition 73.

Die formale Definition des Resolventen Operators oder kurz der Resolvente entstammt [CZ95] (S. 608), weitere Betrachtungen dazu werden beispielsweise in [DL90; Kat95; Kre78] angestellt. Eine Verallgemeinerung auf stetige Endomorphismen ist in [Heu92] (S. 466) zu finden.

Definition 73 (Resolvente und Resolventenmenge) Sei X ein (komplexer) Banachraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann wird der Operator $R(s, T) = T_s^{-1} = (sI - T)^{-1}$ kurz als Resolvente von T an der Stelle s bezeichnet. Die Resolventenmenge $\rho(T)$ des Operators T ist charakterisiert durch $\rho(T) = \{s \in \mathbb{C} \mid R(s, T) \in \mathcal{L}(X)\}$. $\rho(T)$ ist die offene Untermenge aller komplexen Zahlen $s \in \mathbb{C}$, für die alle folgenden Bedingungen erfüllt sind:

RM1) Die Resolvente existiert an der Stelle s ;

RM2) Die Resolvente ist an der Stelle s eine stetige Abbildung;

RM1) Die Resolvente ist dicht definiert. □

Unter der Annahme eines abgeschlossenen Operators T wird durch $R(s, T) = (sI - T)^{-1}$ die Resolvente definiert, die sich als operatorwertige Abbildung der Form

$$\begin{aligned} R(\cdot, T) : \rho(T) &\rightarrow \mathcal{L}(X) \\ s &\mapsto R(s, T) = (sI - T)^{-1} \end{aligned}$$

interpretieren lässt. Dabei werden Elemente s einer offenen Untermenge der komplexen Ebene, also der Resolventenmenge $s \in \rho(T)$, auf die Menge der beschränkten linearen Operatoren $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ abgebildet. Für jedes beliebige Element aus der Resolventenmenge $s \in \rho(T)$ ergibt sich ein Operator

$$\begin{aligned} R(s, T) : \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{D}(T) \\ x &\mapsto R(s, T)x, \end{aligned} \tag{B.74}$$

der definitionsgemäß beschränkt ist ([Kat95] (S. 173)) und dessen Definitionsbereich durch den folgenden Satz aus [Kre78] (S. 373) charakterisiert wird.

Satz 48 (Definitionsbereich der Resolvente) Es sei X ein Banachraum, $T : X \rightarrow X$ ein linearer Operator und $s \in \rho(T)$. Falls T abgeschlossen oder beschränkt ist, ist die Resolvente $R(s, T)$ auf ganz X definiert und beschränkt. □

Satz 48 folgend gilt für die Resolvente eines abgeschlossenen Operators T demnach

$$\mathcal{D}(R(s, T)) = X. \tag{B.75}$$

Weiterführende Ausführungen zum Definitionsbereich der Resolvente finden sich beispielsweise in [Kre78] (S. 373), [Kat95] (S. 173) oder [DL90] (S. 3). Die Definition der Resolventenmenge impliziert, dass der zu invertierende Operator T_s auf der Resolventenmenge keine Singularitäten aufweist. Daher ist der Resolventenoperator an jedem Punkt der Resolventenmenge analytisch (holomorph) ([CZ95] (S. 565)). Da die Resolventenmenge nicht zwingend zusammenhängend ist, wird die Resolvente als stückweise analytisch (holomorph) bezeichnet ([Kat95] (S. 174)).

Integraldarstellung der Resolvente

Neben der Darstellung der Resolvente $R(s, T)$ durch den zugehörigen Operator T ist die Laplace-Transformierte der gegebenenfalls durch T erzeugten stark stetigen Halbgruppe als Integraldarstellung der Resolvente bekannt ([EN00] (S. 55), [CZ95] (S. 24)).

Definition 74 (Integraldarstellung der Resolventen) Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger T und Wachstumsgrenze ω_0 . Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \omega > \omega_0$ gehört s zur Resolventenmenge und die Integraldarstellung der Resolvente lautet

$$R(s, T)x = \int_0^\infty e^{-s\tau} \Phi(\tau)x \, d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-s\tau} \Phi(\tau)x \, d\tau \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.76})$$

Aus Definition 74 ist ersichtlich, dass die Resolvente $R(s, T)$ der Laplace-Transformierten der durch T erzeugten stark stetigen Halbgruppe \mathcal{T}_Φ entspricht. Die in Definition 74 auftretende Bedingung $\operatorname{Re}(s) > \omega > \omega_0$ an den Realteil $s \in \mathbb{C}$ dient der Erfüllung der Existenzbedingung des uneigentlichen Integrals in (B.76). Bei Erfüllung der Konvergenzbedingung des uneigentlichen Riemann-Integrals $\operatorname{Re}(s) > \omega$ ergibt sich für die Resolvente aus ihrer Integralbedingung unmittelbar eine obere Schranke ([EN00] (S. 56)). Allgemein lässt sich der Integralkern $\tilde{\Phi}(t) = e^{-st} \Phi(t)x$ als skalierte Halbgruppe $\mathcal{T}_{\tilde{\Phi}} = \{\tilde{\Phi}(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit dem infinitesimalen Erzeuger $\tilde{T} = T - sI$ und $\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathcal{D}(T)$ auffassen. Unter der Annahme einer endlich-dimensionalen Matrix als Sonderfall eines beschränkten Operators $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ wird die Auswirkung der Skalierung der Halbgruppe durch s unmittelbar klar. Besonders anschaulich wird die Situation dann, wenn eine solche Matrix T in Diagonalform vorliegt.

Falls ein lineares unendlich-dimensionales System mit dem Systemoperator $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ durch eine stark stetige Halbgruppe \mathcal{T}_Φ repräsentiert wird, lässt sich die Lösung des zugehörigen abstrakten Cauchy-Problems aus Gleichung (2.45) im Zeitbereich zu gegebenen Anfangsbedingungen durch \mathcal{T}_Φ beschreiben, gleichsam determiniert die Resolvente $R(s, A)$ im Bildbereich der Laplace-Transformation die Lösung von (2.45).

B.7.2 Spektrum eines Operators

Definition des Spektrums eines Operators

Ausgehend von der Resolventenmenge folgt die Definition des Spektrums eines Operators.

Definition 75 (Spektrum eines Operators) Das Spektrum $\sigma(T)$ des linearen Operators T ist die komplexe Ebene ohne seine Resolventenmenge $\rho(T)$, also $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. \square

Die Zugehörigkeit eines Punktes $s \in \mathbb{C}$ der komplexen Ebene zur Resolventenmenge definiert sich durch die Bedingungen Definition 73. In Abhängigkeit davon, welche der in Definition 73 aufgeführten Bedingung **RM1)**-**RM3)** ein ausgewählter Punkt s aus der komplexen Ebene verletzt, gehört er zu einer der drei disjunkten Teilmengen des Spektrums. Die im Folgenden definierte Zerlegung des Spektrums wird beispielsweise graphisch in [NS] (S. 413) und tabellarisch in [Kre78] (S. 371) verdeutlicht und lässt sich beispielsweise auch [DS58] (S. 580) entnehmen.

Definition 76 (Disjunkte Zerlegung des Spektrums) Es gilt $\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T)$ mit $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$. Wobei die einzelnen Teilmengen des Spektrums folgendermaßen definiert sind:

DZS1) Punktspektrum $\sigma_p(T)$: T_s ist für ein $s \in \mathbb{C}$ nicht invertierbar, der Resolventenoperator existiert also für dieses s nicht $\Rightarrow s \in \sigma_p(T)$;

DZS2) Residualspektrum $\sigma_r(T)$: $R(s, T)$ existiert für ein $s \in \mathbb{C}$, ist aber nicht dicht definiert $\Rightarrow s \in \sigma_r(T)$;

DZS3) Stetiges Spektrum $\sigma_c(T)$: $R(s, T)$ existiert für ein $s \in \mathbb{C}$, ist dicht definiert, aber nicht beschränkt $\Rightarrow s \in \sigma_c(T)$; \square

Die isolierten Elemente des Punktspektrums aus Definition 76 werden als Eigenwerte des betreffenden Operators bezeichnet ([Wer11] (S. 258)). Zahlreiche Beispiele zu verschiedenen Spektren linearer Operatoren sind beispielsweise in [NS] oder [DL90] aufgeführt.

In der Literatur sind verschiedentlich insbesondere im Zusammenhang mit selbstadjungierten Operatoren weiterführende Unterteilungen des Spektrums üblich, vergleiche beispielsweise [RS80]. In der dort üblichen Nomenklatur bilden die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators dessen „pure point“ Spektrum. Eine ausführliche Abhandlung über das Spektrum selbstadjungierter Operatoren findet sich zudem beispielsweise auch in [Dav95]. Eine erweiterte Definition der Bestandteile des Spektrums abgeschlossener Operatoren findet sich zudem beispielsweise in [JMT07].

Spektralradius und Spektralschranke

Aus [Kre78] (S. 378) stammt die folgende Definition des Spektralradius eines beschränkten Operators T .

Definition 77 Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann heißt $r_\sigma(T) = \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ Spektralradius von T . \square

Der Spektralradius charakterisiert die kleinste Kreisscheibe um den Ursprung der komplexen Ebene, welche das kompakte Spektrum $\sigma(T)$ von $T \in \mathcal{L}(X)$ enthält. Alternativ findet sich in der Literatur [EN00] (S. 249) die gleichwertige Definition des Spektralradius eines beschränkten Operators auf Basis des Grenzwerts der Operatornorm $r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Weitere Eigenschaften des Spektrums beschränkter Operatoren lassen sich beispielsweise [Wer11] (S. 257ff) entnehmen. Insbesondere für endlich-dimensionale Matrizen T , als Sonderfälle beschränkter Operatoren, gilt demnach $r_\sigma(T) = \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$. Der Begriff des Spektralradius erleichtert die Verdeutlichung des Einfluss der Skalierung einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe durch die Laplace-Transformation.

Falls ein unbeschränkter Operator eine Spektralschranke besitzt, definiert diese die kleinste linke Halbebene, die das Spektrum des zugehörigen linearen Operators enthält ([EN00]). Damit kann die Spektralschranke als Erweiterung des Spektralradiuses beschränkter Operatoren auf den Fall unbeschränkter Operatoren interpretiert werden ([EN06] (S. 168)).

Definition 78 (Spektralschranke) Es sei T ein linearer Operator und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann heißt $s(T) = \sup \{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ Spektralschranke von T . \square

Für ein Paar aus einer stark stetigen Halbgruppe \mathcal{T}_Φ und ihrem infinitesimalen Erzeuger T liegt die Spektralgrenze von T niemals rechts von der Wachstumsgrenze der Halbgruppe, es gilt stets

$$-\infty \leq s(T) \leq \omega_0 < \infty. \quad (\text{B.77})$$

Während im endlich-dimensionalen Fall die Übereinstimmung von Spektralschranke und Wachstumsgrenze $s(T) = \omega_0$ gilt, kann dies im unendlich-dimensionalen Fall nicht allgemein vorausgesetzt werden. Ein ausführliches Gegenbeispiel wird in [BLX05] geschildert.

Spektrum polynomialer Funktionen linearer Operatoren

Der folgende Satz entspricht Proposition 2.2.12. aus [TW09] (S. 34) und dient der Charakterisierung des Spektrums polynomialer Funktionen linearer Operatoren.

Satz 49 (Spektrum polynomialer Funktionen linearer Operatoren) Es sei $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ ein linearer Operator und p ein Polynom. Dann gilt $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$. Falls zudem $0 \in \rho(T)$ gilt, folgt für das Spektrum des inversen Operators:

SI01) Für $\mathcal{D}(T) \neq X$: $\sigma(T^{-1}) = \{0\} \cup \frac{1}{\sigma(T)}$.

SI01) Für $\mathcal{D}(T) = X$: $\sigma(T^{-1}) = \frac{1}{\sigma(T)}$. □

Das Spektrum einer polynomialen Funktion, mit einem linearen Operator als Argument, ist demnach gleich der polynomialen Funktion des Spektrums des besagten linearen Operators. Ein schlichter Spezialfall der letztgenannten Proposition führt auf das Spektrum der Quadratwurzel des Steifigkeitsoperators $S^{\frac{1}{2}}$ des Beispielsystems, wobei gemäß Satz 49 der Zusammenhang $\sigma\left(S^{\frac{1}{2}}\right) = \sigma(S)^{\frac{1}{2}}$ gilt. Zudem lassen sich die Spektren des inversen Steifigkeitsoperators sowie des Dämpfungsoperators des Beispielsystems mittels Satz 49 unmittelbar ableiten.

Bedingungen für die Zerlegbarkeit des Spektrums

Die Zerlegung des Spektrums eines Operators in einen endlich und einen unendlichen Anteil wird für das Beispielsystem angewandt. Die Definition der Zerlegbarkeit des Spektrums eines linearen Operators entspricht Definition 5.2.5 aus [CZ95] (S. 232).

Definition 79 (Bedingungen für die Zerlegbarkeit des Spektrums) Der Operator T erfüllt an δ die Bedingungen für die Zerlegbarkeit des Spektrums in den beschränkten Teil $\sigma_{\delta}^{+}(T)$ und den davon abgetrennten Teil $\sigma_{\delta}^{-}(T)$, falls eine rektifizierbare, einfache geschlossene Kurve derart zu zeichnen ist, dass sie eine offene Menge umschließt, deren Inneres den Teil $\sigma_{\delta}^{+}(T)$ des Spektrums von T beinhaltet aber der Teil $\sigma_{\delta}^{-}(T)$ außerhalb der Kurve liegt. □

Spektrum adjungierter Operatoren

Durch den folgenden Satz aus [Kat95] (S. 184) wird der Zusammenhang zwischen dem Spektrum eines dicht definierten, abgeschlossenen Operators und dem zugehörigen adjungierten Operator charakterisiert.

Satz 50 Es sei X ein Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator. T^* bezeichnet den zu T adjungierten Operator. Dann gehen sowohl $\rho(T^*)$ als auch $\sigma(T^*)$ aus der Resolventenmenge $\rho(T)$ beziehungsweise $\sigma(T)$ durch Spiegelung an der reellen Achse hervor. Darüber hinaus gilt

$$R(s, T^*) = R(\bar{s}, T)^*, \quad \forall s \in \rho(T). \quad (\text{B.78})$$

□

Satz 50 folgend lässt sich das Spektrum von T^* durch komplexe Konjugation aus dem Spektrum von T gewinnen. Zudem entspricht für alle Elemente s der Resolventenmenge $\rho(T)$ die Resolvente des adjungierten Operators $R(s, T^*)$ der adjungierten der Resolvente von T an der Stelle \bar{s} .

B.7.3 Eigenwertproblem eines linearen Operators

Das Eigenwertproblem eines linearen Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ lautet

$$(\lambda_i I - T) v_i = 0, \quad (\text{B.79})$$

wobei im Folgenden abkürzend $(\lambda_i I - T) = T_{\lambda_i}$ gilt. Durch (B.79) sind die Eigenwerte $\lambda_i \in \sigma_p(T)$ sowie die Eigenvektoren v_i von T definiert, die gleichberechtigt auch als Rechtseigenvektoren von T bezeichnet werden. Zu einem gegebenen λ_i definiert die Lösbarkeit der voranstehenden Gleichung für nicht triviale $v_i \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X}$, $v_i \neq 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung [DL90] (S. 4) für λ_i , um zum Punktspektrum von T zu gehören.

Die Eigenvektoren eines Operators $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ sind Elemente seines Definitionsbereichs $\mathcal{D}(T)$ und damit auch Elemente von X . Die Vektordimension der Rechtseigenvektoren wird durch die Matrixdimension n von T bestimmt. Die n einzelnen Komponenten eines Rechtseigenvektors $v_i = (v_{i,1} \dots v_{i,n})^T$ sind aufgrund von $v_i \in \mathcal{D}(T)$ im Allgemeinen Funktionen in Abhängigkeit von den örtlichen Unabhängigen des zugrunde liegenden Problems.

Zu einem Eigenwert λ_i von T existiert ein nicht trivialer Nullraum $N(T_{\lambda_i}) \neq 0$, der Eigenraum $E_{\lambda_i}(T) = N(T_{\lambda_i})$ zum Eigenwert λ_i heißt. Analog zum endlich dimensionalen Fall wird die Dimension $\dim E_{\lambda_i}(T)$ eines Eigenraums $E_{\lambda_i}(T)$ zu einem Eigenwert λ_i als geometrische Ordnung von λ_i bezeichnet. Eine Definition der algebraischen Vielfachheit eines Eigenwerts eines Operators auf Basis einer Entwicklung der Resolvente in einer Laurent-Reihe findet sich in [Kat95] (S. 180). Mit $N(T_s) \neq 0$ ist die Abbildung T_s zu einem v_i nicht injektiv, demnach existiert die Resolvente nicht und es gilt $\lambda_i \in \sigma_p(T)$.

Die Bedeutung von Satz 50 für die Eigenwerte eines entsprechenden Operators T werden in Remark 6.23. ([Kat95] (S. 184)) beschrieben. Falls λ_i Eigenwert von T mit endlicher algebraischer Vielfachheit ist, ist $\bar{\lambda}_i$ Eigenwert von T^* , zudem überträgt sich sowohl die algebraische als auch die geometrische Vielfachheit.

B.7.4 Spektraleigenschaften diskreter Operatoren

Ein Klasse von Operatoren, für die weitreichende Aussagen hinsichtlich ihres Spektrums bekannt sind, sind diskrete Operatoren. Die Definition diskreter Operatoren sowie eine ausführliche Behandlung ist beispielsweise in [DS88] (S. 2291) oder [Kat95] (S. 187) enthalten.

Definition 80 (Diskreter Operator) Ein linearer Operator $T : X \rightarrow X$ heißt diskreter Operator, falls es ein Element aus der Resolventenmenge $s \in \rho(T)$ gibt, sodass die Resolvente für dieses Element $R(s, T) = (sI - T)^{-1}$ kompakt ist. □

Das Spektrum diskreter Operatoren besteht ausschließlich aus isolierten Eigenwerten mit jeweils endlicher Häufigkeit ([Kat95] (S. 187)). Die abzählbar vielen Elemente des Spektrums diskreter

Operatoren besitzen keinen endlichen Häufungspunkt ([DS88] (S. 2292), Lemma 2). Ferner ist die Resolvente $R(s, T)$ kompakt für alle s aus der Resolventenmenge ([DS88] (S. 2292), Lemma 2).

B.7.5 Spektraleigenschaften selbstadjungierter Operatoren

Aufgrund der Eigenschaften des Steifigkeitsoperators des Beispielsystem kommt den Spektraleigenschaften selbstadjungierter Operatoren innerhalb dieser Arbeit eine besondere Bedeutung zu. Einleitend trifft ein Satz aus [Wei] (S. 201) Aussagen über die Existenz des Spektrums selbstadjungierter Operatoren in Hilberträumen.

Satz 51 (Existenz des Spektrums selbstadjungierter Operatoren) *Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators egal ob in einem reellen oder komplexen Hilbertraum ist nicht leer.* \square

Lemma 2 aus [DS63] (S. 1198) sagt darüber hinaus aus, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Operators stets reell ist und verallgemeinert damit diese für beschränkte selbstadjungierte Operatoren bekannte Aussage auf unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren. Das Spektrum symmetrischer Operatoren dagegen ist nicht zwingend reell, ein Gegenbeispiel wird in [Wer11] (S. 355) gezeigt. Ferner lässt sich Lemma 2 aus [DS63] (S. 1198) entnehmen, dass die Resolvente eines selbstadjungierten Operators T stets normal ist und ferner $R(s, T)^* = R(\bar{s}, T)$ gilt. Der folgende Satz aus [Kre78] (S. 544) beinhaltet zusätzlich die Abgeschlossenheit des Spektrums selbstadjungierter Operatoren.

Satz 52 (Spektrum selbstadjungierter Operatoren) *Es sei X ein komplexer Hilbertraum und $T : X \supset \mathcal{D}(T) \rightarrow X$ selbstadjungiert. Dann ist das Spektrum von T reell und abgeschlossen.* \square

Der in Theorem 10.4-2 aus [Kre78] (S. 544) explizit geforderte dicht liegende Definitionsbereich $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ ist an dieser Stelle implizit in der Definition des selbstadjungierten Operators (Definition 71) enthalten. Aus der Abgeschlossenheit des Spektrums der in Satz 52 betrachteten Operatoren folgt, dass die zugehörige Resolventenmenge offen ist. Zu jedem Punkt s aus der Resolventenmenge $s \in \rho(T)$ gehört eine Umgebung, die ebenfalls zur Resolventenmenge gehört. Ferner lässt sich [Kre78] (S. 546) entnehmen, dass das Residualspektrum von T leer ist.

Der Nachweis, dass die Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren $T = T^*$ stets reell sind wird in Anhang B.6.2 gezeigt. Als Sonderfall zu den in Satz 51 angenommenen selbstadjungierten Operatoren $T : X \supset \mathcal{D}(T) \rightarrow X$ kann zusätzlich eine kompakte Resolvente $R(s, T)$ angenommen werden. Diese Annahme führt auf einen selbstadjungierten diskreten Operator (Definition 80). Die Eigenschaften des Spektrums derartiger Operatoren finden sich beispielsweise in Satz 5.20 aus [Wei] (S. 204). Insbesondere ist das Spektrum dieser Klasse von Operatoren reell und ein reines Punktspektrum (diskretes Spektrum). Die geeignet normierten Eigenvektoren der Resolvente eines selbstadjungierten Operators bilden in einem solchen Fall eine Orthonormalbasis von X . Die Darstellbarkeit selbstadjungierter Operatoren mittels der Summe von Projektionen findet sich zudem in Lemma 7.1.1 aus [NS] (S. 486).

B.7.6 Sektorielle Operatoren

Als Spezialfall stark stetiger Halbgruppen werden in Abschnitt D.2.1 analytische Halbgruppen eingeführt. Der infinitesimale Erzeuger einer analytischen Halbgruppe ist stets ein sektorieller Operator. Die folgende Definition sektorieller Operatoren ist angelehnt an Definition 4.1 aus [EN00] (S. 96).

Definition 81 (Sektorielle Operatoren) Es sei X ein Banachraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator. Dann wird T als sektorieller Operator hinsichtlich des Winkels β bezeichnet, falls

SO1) $\rho(T) \supset \mathbb{C}_{S_\beta} = \{s \in \mathbb{C} \mid |\arg s| < \frac{\pi}{2} + \beta\} \setminus \{0\}$ für $\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$,

SO2) Für alle $\gamma \in (0, \beta)$ existiert ein $c_\gamma > 0$, sodass $\|R(s, T)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c_\gamma}{|s|}$, $\forall 0 \neq s \in \overline{\mathbb{C}_{S_{\beta-\gamma}}}$;

gilt. □

Sektorielle Operatoren zeichnen sich dadurch aus, dass ein durch \mathbb{C}_{S_β} definierter Sektor ein Teil ihrer Resolventenmenge $\rho(T)$ ist. Darüber hinaus muss die einem sektoriellen Operator zugeordnete Resolvente für alle $s \neq 0$ aus dem Abschluss des Sektors $\mathbb{C}_{S_{\beta-\gamma}}$ auf die in **SO2)** beschriebene Weise beschränkt sein. **SO2)** korrespondiert mit dem Hille-Yosida-Theorem (Satz 5) für den Fall $\omega = 0, r = 1$. Die Auswirkungen der Voraussetzungen an sektorielle Operatoren finden sich in [EN00], weiterführende Betrachtungen zu derartigen Operatoren werden beispielsweise in [Haa06] angestellt. [EN00] (S. 97) enthält ferner eine graphische Darstellung der in Zusammenhang mit sektoriellen Operatoren verwendeten Sektoren der komplexen Ebene.

B.8 Diagonalisierbare Operatoren und Riesz-Spektraloperatoren

In diesem Abschnitt wird die Klasse der diagonalisierbaren Operatoren nach [TW09] (S. 47) und die Klasse der Riesz-Spektraloperatoren eingeführt. Im Wesentlichen lassen sich diagonalisierbare Operatoren als Obermenge der Riesz-Spektraloperatoren auffassen. Die beiden eng verwandten Operatorklassen bilden jeweils eine vergleichsweise große Klasse linearer Operatoren, deren Elemente sich zur mathematischen Beschreibung einer Vielzahl praktischer Problemstellungen eignen. Einen Nachweis darüber, dass beispielsweise durch Sturm-Liouville Operatoren beschriebene Systeme eine Unterklasse der durch Riesz-Spektraloperatoren beschriebenen Systeme sind, findet sich in [DDW03]. In der genannten Quelle finden sich zudem einige Literaturhinweise auf verschiedenen physikalischen Anwendungen, deren ungezwungene Systemdynamik durch Sturm-Liouville Operatoren und damit auch durch Riesz-Spektraloperatoren zu beschreiben ist. Die aus der Literatur

bekannten Anwendungen umfassen dabei zahlreiche Schwingungsprobleme, aber auch Diffusionsprobleme. Der recht universellen praktischen Verwendbarkeit dieser Klasse von Operatoren steht hinsichtlich der in der Regelungstechnik üblichen Methodiken eine verhältnismäßig angenehme und nicht zu umfangreiche benötigte mathematische Theorie gegenüber.

B.8.1 Diagonalisierbare Operatoren

Die nachfolgende Definition zur Charakterisierung diagonalisierbarer Operatoren entspricht Definition 2.6.1 aus [TW09] (S. 47).

Definition 82 (Diagonalisierbare Operatoren) Es sei X ein Hilbertraum. Ein Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ wird als diagonalisierbar bezeichnet, falls seine Resolventenmenge $\rho(T)$ nicht leer ist und seine Eigenvektoren eine Rieszbasis von X bilden. \square

Die Forderung einer nicht leeren Resolventenmenge in Definition 82 beinhaltet die Forderung nach der Abgeschlossenheit eines Operators. Die Menge der diagonalisierbaren Operatoren wird mit \mathcal{O}_D bezeichnet. Eine Klasse von Operatoren, die über vergleichbar angenehme Eigenschaften wie diagonalisierbare Operatoren verfügt, wird in [CZ95] unter der Bezeichnung Riesz-Spektraloperatoren eingeführt.

Definition 83 (Riesz-Spektraloperator) Es sei X ein Hilbertraum und T ein abgeschlossener Operator $T : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X, x \mapsto Tx$ dessen Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ zu seinen einfachen Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Rieszbasis von X bilden.

Falls keine zwei unterschiedlichen Elemente des Abschlusses der Menge der Eigenwerte $\overline{\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}}$ durch eine vollständig in diesem Abschluss liegende Strecke verbunden werden können, wird der Abschluss als vollständig unzusammenhängend bezeichnet und T ist ein Riesz-Spektraloperator. \square

Die Menge der Riesz-Spektraloperatoren wird mit \mathcal{O}_R bezeichnet und wird aufgrund der zusätzlichen Anforderungen als Untermenge der diagonalisierbaren Operatoren aufgefasst. Neben den voranstehend definierten Operatorklassen finden sich in der Literatur noch zahlreiche Betrachtungen zu Operatoren, deren Eigenvektoren eine Rieszbasis des zugrunde liegenden Raums bilden. Einen speziellen Bezug zum Euler-Bernoulli Balken findet sich dabei beispielsweise in [GY01; GC01; Guo02b; Guo02a]. Verallgemeinerte Betrachtungen zu Rieszbasen im Zusammenhang mit Operatoren, die Eigenwerte nicht einfacher Vielfachheit aufweisen, finden sich beispielsweise in [Wys10] und den dort genannten zahlreichen Literaturquellen. In [KZ96] wird ferner der Zusammenhang von Riesz-Spektraloperatoren und diskreten Operatoren aus [DS88] diskutiert.

B.8.2 Ausgesuchte Eigenschaften diagonalisierbarer Operatoren

Die Elemente der Operatorklasse \mathcal{O}_D weisen eine Vielzahl von Eigenschaften auf, die den Umgang mit diesen Operatoren angenehm gestalten. Einige hinsichtlich dieser Arbeit relevante Eigenschaften der Elemente aus \mathcal{O}_D , die damit auch für die Elemente aus \mathcal{O}_R gelten, sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 53 (Eigenschaften von Operatoren der Klasse \mathcal{O}_D) Es sei X ein Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ ein Operator $T \in \mathcal{O}_D$ mit den Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und den zugehörigen Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$. Der zu T adjungierte Operator T^* besitzt die Eigenvektoren $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ zu den Eigenwerten $\{\overline{\lambda_i}\}_{i \in \mathbb{I}^+}$. Dann gelten bezüglich T die Aussagen:

RSO1) Die Eigenvektoren $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von T^* zu den Eigenwerten $\{\overline{\lambda_i}\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ lassen sich so skalieren, dass $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ biorthogonal sind und damit $\langle v_i, w_j \rangle_X = \delta_{ij}$ gilt.

RSO2) Es existiert eine Darstellung

$$x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, v_i \rangle_X w_i, \quad \forall x \in X. \quad (\text{B.80})$$

RSO3) Der Definitionsbereich von T ist gegeben durch

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ x \in X \left| \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^2 |\langle x, w_i \rangle_X|^2 < \infty \right. \right\} \quad (\text{B.81})$$

und T besitzt die Darstellung

$$Tx = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \lambda_i \langle x, w_i \rangle_X v_i, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T). \quad (\text{B.82})$$

RSO4) $\rho(T) = \left\{ s \in \mathbb{C} \left| \inf_{i \in \mathbb{I}^+} |s - \lambda_i| > 0 \right. \right\}$, $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$ und für jedes Element der Resolventenmenge $\lambda \in \rho(T)$ ist die Resolvente gegeben durch

$$R(s, T) = (sI - T)^{-1} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{1}{s - \lambda_i} \langle \cdot, w_i \rangle_X v_i; \quad (\text{B.83})$$

RSO5) T ist genau dann infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe, falls $\sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) < \infty$. Die zugehörige Halbgruppe lautet dann

$$\Phi(t) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i t} \langle \cdot, w_i \rangle_X v_i \quad (\text{B.84})$$

und ihre Wachstumsgrenze ist gegeben durch

$$\omega_0 = \sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i). \quad (\text{B.85})$$

□

Die Darstellung eines $x \in X$ in einer Rieszbasis gemäß **RSO2**) ist inhaltlich durch Satz 39 abgedeckt. Die unter **RSO1**) aufgeführte Eigenschaft entspricht Proposition 2.8.6. aus [TW09] (S. 63), während **RSO3**) Proposition 2.6.3. aus [TW09] (S. 48) gleicht. Dazu ist zu beachten, dass die Norm $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ induziert durch das Innenprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^2 \langle x, w_i \rangle \langle y, w_i \rangle$ auf X wegen

$$\begin{aligned} \|x\|_1^2 &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} (1 + |\lambda_i|^2) |\langle x, w_i \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^2 |\langle x, w_i \rangle|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

äquivalent zu der Norm $\|x\|_1^2 = \langle x, x \rangle_1$ induziert durch das Innenprodukt

$$\langle x, y \rangle_1 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} (1 + |\lambda_i|^2) \langle x, w_i \rangle \langle y, w_i \rangle \quad (\text{B.87})$$

ist. Dabei entspricht die in [TW09] verwendete Norm $\|x\|_1^2 = \langle x, x \rangle_1$ auf $\mathcal{D}(T)$ der Graphennorm von T . Folglich sind die Charakterisierungen des Definitionsbereichs von T durch $\mathcal{D}(T)$

$$\left\{ x \in X \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i |\langle x, w_i \rangle| < \infty \right\} \quad (\text{B.88})$$

mit $\gamma_i = |\lambda_i|^2$ oder $\gamma_i = 1 + |\lambda_i|^2$ für alle $i \in \mathbb{I}^+$ gleichwertig. Für weitere Details über diese Form der Definition von Räumen sei auf die Ausführungen über Interpolationsräume in Abschnitt B.9.3 verwiesen. Insbesondere gilt $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}_1$. Die Eigenschaft **RSO4**) ergibt sich aus der Kombination von Proposition 2.6.2. aus [TW09] (S. 47) und Remark 2.6.4. aus [TW09] (S. 49). Die Eigenschaft **RSO5**) entspricht inhaltlich Proposition 2.6.5. aus [TW09] (S. 49). Theorem 2.3.5 und die zugehörigen Beweise aus [CZ95] (S. 41ff) zeigen, dass die aufgeführten Eigenschaften tatsächlich auch für alle Riesz-Spektraloperatoren gelten. Die Operatoren beider Operatorklassen sind dicht definiert und abgeschlossen [TW09] (S. 32) (Remark 2.2.4.).

Im Hinblick auf die Dynamik linearer Systeme ist insbesondere festzuhalten, dass die gegebenenfalls von einem der in Satz 53 zugelassenen Operatoren erzeugte stark stetige Halbgruppe eine durch das Spektrum des infinitesimalen Erzeugers festgelegte Wachstumsgrenze besitzt (**RSO4**). Der Nachweis für die Einhaltung der in [Tri75] (S. 387) eingeführten sogenannten „Spectrum determined growth assumption“ durch eine, von einem diagonalisierbaren Operator erzeugte, stark stetige Halbgruppe, findet sich im Beweis zu Theorem 2.3.5 aus [CZ95]. In [Mon07] (S. 19ff) werden die Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen in Verbindung mit einem infinitesimalen Erzeuger betrachtet, dessen Eigenvektoren eine Orthonormalbasis des zugrunde liegenden Raumes bilden. Die entsprechenden Betrachtungen lassen sich unter Ausnutzung der Äquivalenz von Rieszbasen zu Orthonormalbasen auf diagonalisierbare Operatoren verallgemeinern. Dieses Vorgehen unter Verwendung einer äquivalenten Norm bietet sich insbesondere für den Beweis der Beschränktheit einer Halbgruppe $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ sowie ihrer Stetigkeitseigenschaften für $t=0$ an. Die beiden in Definition 1 aufgeführten Eigenschaften lassen sich unter der Annahme eines Operators entsprechend

Satz 53 als infinitesimalen Erzeuger unmittelbar zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(0)x &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i 0} \langle x, w_i \rangle v_i = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \\ &= x\end{aligned}\tag{B.89}$$

und

$$\begin{aligned}\Phi(t_1)(\Phi(t_2)x) &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i t_1} \left\langle \sum_{j \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_j t_2} \langle x, w_j \rangle v_j, w_i \right\rangle v_i = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i t_1} e^{\lambda_i t_2} \langle x, w_i \rangle v_i \\ &= \Phi(t_1 + t_2)x.\end{aligned}\tag{B.90}$$

B.8.3 Zu diagonalisierbaren Operatoren adjungierte Operatoren

Der vorliegende Abschnitt enthält einige im Kontext dieser Arbeit relevante Informationen über zu diagonalisierbaren Operatoren adjungierte Operatoren.

Satz 54 *Es sei X ein Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ ein diagonalisierbarer Operator oder eine Riesz-Spektraloperator. Die Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von T gegeben durch die nichttrivialen Lösungen von*

$$(\lambda_i I - T) v_i = 0, \forall i \in \mathbb{I}^+,$$

bilden eine Rieszbasis von X . Dann ist der zu T adjungierte Operator T^ ebenfalls ein diagonalisierbarer Operator beziehungsweise ein Riesz-Spektraloperator und seine Eigenvektoren, gegeben durch*

$$(\overline{\lambda}_i I - T^*) w_i = 0,\tag{B.91}$$

lassen sich derart skalieren, dass sie eine zu $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ biorthogonale Menge bilden. \square

Für die Elemente der beiden betrachteten Operatorklassen geht das Spektrum des adjungierten Operators durch konjugiert komplexen Bildung, die einer Spiegelung an der reellen Achse entspricht, aus dem Spektrum des ursprünglichen Operators hervor. Das Spektrum eines Riesz-Spektraloperators T ist per Definition 83 vollständig unzusammenhängend, diese Eigenschaft wird durch die beschriebene Operation nicht beeinflusst.

Die Eigenvektoren eines in Satz 54 vorausgesetzten Operators T bilden per Definition eine Rieszbasis des Hilbertraums X . Laut Satz 39 gibt es in einem derartigen Fall genau eine biorthogonale Menge zu den $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$. Aus Satz 53 **RSO1**) ist bekannt, dass die passend skalierten Eigenvektoren $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von T^* biorthogonal zu den Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von T sind. Es handelt sich also bei den $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ um die in Satz 39 beschriebene biorthogonale Menge, die ebenfalls eine Basis von X bildet. Entsprechend Satz 40 handelt es sich damit bei $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ebenfalls um eine Rieszbasis von X . Entsprechend gilt (B.49).

Somit genügt der zu einem diagonalisierbaren Operator T adjungierte Operator T^* seinerseits den in Definition 83 aufgeführten Anforderungen an die jeweilige Operatorklasse, d.h. für T^* gelten die Aussagen aus Satz 53. Insbesondere lautet eine Darstellung von T^*

$$T^*x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \bar{\lambda}_i \langle x, v_i \rangle w_i \quad \forall x \in \mathcal{D}(T^*). \quad (\text{B.92})$$

Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(T^*)$ ist in Anlehnung an $\mathcal{D}(T)$ gemäß Satz 53 von Seite 291 durch

$$\mathcal{D}(T^*) = \left\{ x \in X \left| \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^2 |\langle x, v_i \rangle_X|^2 < \infty \right. \right\} \quad (\text{B.93})$$

gegeben. Damit sind der Definitionsbereich eines Operators $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ aus \mathcal{O}_D oder \mathcal{O}_R und des zu ihm adjungierten Operators T^* identisch

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*). \quad (\text{B.94})$$

Diese Behauptung folgt aus den Eigenschaften von Rieszbasen (Anhang B.5.3 **RB3**) und der Beziehung zwischen dem Spektrum eines dicht definierten, abgeschlossenen Operators zum Spektrum des zugehörigen adjungierten Operators gemäß Satz 50.

B.8.4 Eigenprojektionen im Fall diagonalisierbarer Operatoren

Im Folgenden sei $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ diagonalisierbar, die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von T werden mit $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bezeichnet, die Eigenvektoren von T^* heißen $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$. Die durch

$$\begin{aligned} P_{e,i} : X &\rightarrow E_i = \mathcal{R}(P_{e,i}) \subset X \\ x &\mapsto P_{e,i}x = \langle x, w_i \rangle_X v_i \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

für alle $i \in \mathbb{I}^+$ definierte, beschränkte Abbildung ist aufgrund von

$$\begin{aligned} P_{e,i}P_{e,j}x &= \langle \langle x, w_i \rangle_X v_i, w_j \rangle_X v_j \\ &= \delta_{ij} P_{e,i}x \end{aligned} \quad (\text{B.96})$$

für alle $i, j \in \mathbb{I}^+$ idempotent und damit eine Projektion. $P_{e,i} \in \mathcal{L}(X)$ wird als Eigenprojektion von T bezeichnet. Die zu $P_{e,i}$ adjungierte Eigenprojektion $P_{e,i}^*$ ergibt sich ausgehend von $\langle P_{e,i}x, y \rangle_X = \langle x, P_{e,i}^*y \rangle_X$ unter Berücksichtigung von $\langle P_{e,i}x, y \rangle_X = \langle x, \langle y, v_i \rangle_X w_i \rangle_X$ zu $P_{e,i}^*x = \langle y, v_i \rangle_X w_i$. Da eine Eigenprojektion im Allgemeinen nicht mit der zugehörigen adjungierten Eigenprojektion übereinstimmt $P_{e,i} \neq P_{e,i}^*$, handelt es sich bei $P_{e,i}$ nicht um eine orthogonale Projektion. Aufgrund von $TP_{e,i}x = \lambda_i P_{e,i}v_i$ sowie $P_{e,j}TP_{e,i}x = \delta_{ij}\lambda_i P_{e,i}x$ gilt $P_{e,j}TP_{e,i}x = TP_{e,i}x$. Folglich ist der durch $E_i = P_{e,i}X$ definierte Unterraum T -invariant ([GK69] (S. 2)). Die Menge aller Eigenprojektionen $P_{e,i}$, $i \in \mathbb{I}^+$ erlaubt eine Zerlegung von X . Durch

$$P_{e,N}x = \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} \langle x, w_i \rangle_X v_i, \quad N < \infty \quad (\text{B.97})$$

wird die Projektion von $x \in X$ auf den endlich-dimensionalen Unterraum

$$X_N = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}^{N+}} E_i \subset X \quad (\text{B.98})$$

definiert. Ferner gilt $X_N = \text{span}(v_1, \dots, v_N)$. Da für die Eigenvektoren $v_i \in \mathcal{D}(T)$, $\forall i \in \mathbb{I}^{N+}$ gilt, liegt auch jede Linearkombination der $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^{N+}}$ im Definitionsbereich von T und somit gilt $X_N \subset \mathcal{D}(T)$. Die durch (B.97) definierten Projektionen erfüllen für $N < \infty$ die Zusammenhänge aus (4.6), wobei speziell

$$I - P_{e,N} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{N+1}^+} \langle x, w_i \rangle_X v_i \quad (\text{B.99})$$

gilt.

B.9 Raumskalen

B.9.1 Allgemeine Einführung Gelfandscher Dreier

Der vorliegende Abschnitt beinhaltet eine kurze Einführung einer Anordnung von Räumen, die in der Literatur als Gelfandscher Dreier ([Wlo82]) bezeichnet wird. Mit einer derartigen Raumskala der Form

$$Y \underset{\text{d}}{\hookrightarrow} X = X' \underset{\text{d}}{\hookrightarrow} Y' \quad (\text{B.100})$$

wird die Grundlage zur Behandlung von in Bezug auf den Zustandsraum unbeschränkten Ein- und Ausgangsoperatoren gelegt. Die in (B.100) definierte Anordnung wird in der Literatur auch als Evolutions- oder Raumtripel bezeichnet und es besteht im Allgemeinen die Möglichkeit einer Erweiterung auf eine umfangreichere Raumskala ([Wlo82]). Im Folgenden werden als Bestandteile von (B.100) ausschließlich Hilberträume angenommen. Die Verallgemeinerung für den Fall, dass der Pivotraum ein Hilbertraum, die anderen auftretenden Räume lediglich reflexive Banachräume sind, wird zusammen mit einer weitreichenderen Betrachtung von Raumskalen in [Wlo82] durchgeführt. Betrachtungen im regelungstechnischen Kontext in Verbindung mit ausführlichen Überlegungen zur Dualität sowie Beispielen werden beispielsweise in [Keu93] und [TW09] angestellt.

Aufbauend auf den Ausführungen zum Dualraum eines Hilbertraums X in Abschnitt B.5.4 erfolgt eine Identifizierung von X mit dem zugehörigen Dualraum X' durch die in Abschnitt B.5.4 für alle $x \in X$ beschriebene Identifizierung $i_R x \in X'$. Die Konstruktion der Raumskala (B.100) erfordert im Folgenden die Betrachtung der Dualität der verbleibenden Räume im Sinne des Pivotraums $X = X'$. Dazu wird zunächst als weiterer Bestandteil der angestrebten Raumskala der Hilbertraum Y eingeführt, dessen stetige dichte Einbettung (Definition 44)

$$i_X : Y \rightarrow X, x \mapsto i_X x \quad (\text{B.101})$$

mit $\|i_X x\|_X \leq c_1 \|x\|_Y \forall x \in Y$ in den Pivotraum, kennzeichnet die abkürzende Schreibweise $Y \hookrightarrow_d X$. Die Abbildung von Elementen des Hilbertraums Y in den Pivotraum X ist für alle Elemente aus Y definiert, erreicht aber nicht den gesamten Pivotraum, sondern nur eine dichte Teilmenge.

Im Folgenden gilt es eine Darstellung für stetige Funktionale, definiert auf Y , zu finden. Das Vorgehen dazu entstammt [TW09]. Der allgemeinere Formalismus mit einer konsequenten Unterscheidung zwischen dem Dualraum und seiner Repräsentation aus [Keu93] wird innerhalb dieser Arbeit nicht zwingend benötigt, daher wird auf den komplexeren Formalismus zugunsten der übersichtlicheren Darstellung aus [TW09] verzichtet.

Zunächst ist der Hilbertraum Y^* zu definieren, der die Rolle der Repräsentation des Dualraums, wie sie in [Keu93] eingeführt wird, übernimmt. Dazu wird der Raum X mit einer neuen Norm ausgestattet. Deren Definition liegt die Idee zugrunde, dass jedes $x \in X$ mittels der durch (B.101) definierten stetigen Einbettung als gegebenenfalls antilineares stetiges Funktional auf Y zu interpretieren ist ([Wlo82] (S. 255)). Entsprechend wird X mit der Funktionalnorm

$$\|x\|_{Y^*} = \sup_{y \in Y, \|y\|_Y \leq 1} |\langle x, i_X y \rangle_X| \quad \forall x \in X, \quad (\text{B.102})$$

ausgestattet. Der Index der voranstehenden Norm beruht auf der Tatsache, dass Y^* eben als Vervollständigung von X in dieser neuen Norm definiert wird.

Um einen Zusammenhang zwischen Y^* und Y' herzustellen erfolgt unter der Annahme einer in Y^* konvergenten Folge, deren Folgeglieder in X liegen

$$X \ni x_i \rightarrow x \in Y^* \quad \text{für} \quad i \rightarrow \infty$$

die Definition der Abbildung $i_{Y'} : Y^* \rightarrow Y'$ durch

$$\langle y, i_{Y'} x \rangle_{Y \times Y'} = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle x_i, i_X y \rangle_X, \forall y \in Y. \quad (\text{B.103})$$

Laut [TW09] (S. 65) handelt es sich bei $i_{Y'}$ um einen Isomorphismus zwischen der Vervollständigung von X in der Norm $\|(\cdot)\|_{Y^*}$ bezeichnet durch Y^* und Y' . Die durch $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle x_i, i_X y \rangle_X$ für alle $y \in Y$ definierte stetige Fortsetzung des auf X verwendeten Innenprodukts auf das Dualitätsprodukt auf $Y \times Y'$ kann als die gesuchte Repräsentation der Elemente von Y' , d.h. stetiger linearer Funktionale auf Y , angesehen werden ([Wlo82] (S. 255)).

Erfüllen $x \in Y'$ zusätzlich die strengere Annahme $x \in X$ folgt aus (B.103) für die Einschränkung

$$\langle y, i_{Y'} x \rangle_{Y \times Y'} = \langle x, i_X y \rangle_X \forall y \in Y. \quad (\text{B.104})$$

Zudem genügt der Isomorphismus $i_{Y'}$ den Eigenschaften einer Isometrie zwischen Y^* und Y' gemäß Definition 66, d.h. es gilt $\|i_{Y'} x\|_{Y'} = \|x\|_{Y^*}$ für alle $x \in Y^*$ ([TW09] (S. 65)).

In Analogie zu dem in Abschnitt B.5.4 geschilderten Vorgehen, bei der Identifizierung eines Hilbertraums mit seinem Dualraum, wird im Folgenden Y^* mit Y' identifiziert. Die Identifizierung

erfolgt indem für alle $x \in Y^*$ keine Unterscheidung der über den isometrischen Isomorphismus $i_{Y'}$ zusammenhängenden Größen $x \in Y^*$ und $i_{Y'}x \in Y'$ vorgenommen wird ([TW09] (S. 65)). In diesem Fall wird Y' als Dualraum zu Y unter Berücksichtigung des Pivotraums $X = X'$ bezeichnet und es resultiert die eingangs bereits aufgeführte Raumskala

$$Y \underset{d}{\hookrightarrow} X = X' \underset{d}{\hookrightarrow} Y'. \quad (\text{B.105})$$

Eine Schilderung des Mechanismus nach dem die eindeutige Festlegung von Y durch Y' erfolgt sowie weiterführende Betrachtungen finden sich in [TW09].

B.9.2 Definition von Raumskalen anhand positiver Operatoren

Definition von Raumskalen mittels positiver Operatoren

Aufbauend auf den Ausführungen in Abschnitt B.9.1 folgt die Einführung von Raumskalen auf Basis positiver Operatoren. Diese Methodik wird im Hinblick auf den Steifigkeitsoperator des Beispielsystems vorgestellt und kann für diesen Fall als systemspezifische Konstruktion einer Raumskala angesehen werden. Eine ausführliche Beschreibung des Vorgehens findet sich in [TW03a; TW09]. Angenommen wird ein Hilbertraum H sowie ein positiver Operator

$$\begin{aligned} S : \mathcal{D}(S) \subset H &\rightarrow H, \\ x &\mapsto Sx. \end{aligned} \quad (\text{B.106})$$

Gemäß den Betrachtungen aus Anhang B.6 besitzt ein solcher Operator eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel

$$\begin{aligned} S^{\frac{1}{2}} : \mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}}) \subset H &\rightarrow H \\ x &\mapsto S^{\frac{1}{2}}x \end{aligned} \quad (\text{B.107})$$

mit $\mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}}) \supset \mathcal{D}(S)$. Die Positivität von S und der zugehörigen Quadratwurzel $S^{\frac{1}{2}}$ ermöglicht es, eine Abbildung auf den jeweiligen Definitionsbereichen unter Nutzung der Operatoren einzuführen, die den Eigenschaften eines Innenprodukts genügt. Ferner induzieren diese Innenprodukte jeweils eine Norm auf dem zugehörigen Definitionsbereich. Auf diese Weise werden mit $\alpha = \{\frac{1}{2}, 1\}$ die Räume

$$H_\alpha = \mathcal{D}(S^\alpha), \quad (\text{B.108})$$

ausgestattet mit den Innenprodukten

$$\langle x_1, x_2 \rangle_{H_\alpha} = \langle S^\alpha x_1, S^\alpha x_2 \rangle \quad \forall x_1, x_2 \in H_\alpha \quad (\text{B.109})$$

und den durch die jeweiligen Innenprodukte induzierten Normen

$$\|x_1\|_{H_\alpha} = \|S^\alpha x_1\| \quad (\text{B.110})$$

eingeführt. Laut [TW09] (S. 88) sind die induzierten Normen $\|\cdot\|_{H_\alpha}$ auf den jeweiligen Definitionsbereichen zur Graphennorm von S^α äquivalent. Die Graphennorm wird dabei durch

$$\|x\|_{\text{Gr}, S^{\frac{1}{2}}} = \left\| S^{\frac{1}{2}} x \right\|_H + \|x\|_H \quad (\text{B.111})$$

definiert. Diese Normäquivalenz impliziert die Isomorphie von $\mathcal{D}(S^\alpha)$ zum einen ausgestattet mit der eingeführten Norm $\|\cdot\|_{H_\alpha}$ und zum anderen versehen mit der entsprechenden Graphennorm ([Wer11] (S. 83)).

Für den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ lässt sich unter Ausnutzung der Selbstadjungiertheit von $S^{\frac{1}{2}}$ das Innenprodukt aus (B.109) umschreiben. Der Raum $H_{\frac{1}{2}}$ kann dann als Vervollständigung von $\mathcal{D}(S)$ versehen mit der Norm

$$\|x\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 = \langle Sx, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(S) \quad (\text{B.112})$$

interpretiert werden. Diese Interpretation ermöglicht insbesondere für diagonalisierbare Operatoren S eine direkte Charakterisierung des Definitionsbereichs $\mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}})$, vergleiche [TW09] (S. 90).

Auf Basis der Eigenschaften von $S^{\frac{1}{2}}$ folgt ein Teil der gesuchten Raumskala mit jeweils stetigen und dichten Einbettungen zwischen den Räumen zu

$$H_1 \hookrightarrow_d H_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow_d H. \quad (\text{B.113})$$

Die zugehörigen Beweise finden sich in [TW09] (S. 88). Eine Abbildung $S^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(H_1, H_{\frac{1}{2}})$ lässt sich anhand der Definition der Normen aus (B.110)

$$\|S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} x_1\| = \left\| S^{\frac{1}{2}} x \right\|_{H_{\frac{1}{2}}} \leq \|x\|_{H_1} = \|Sx_1\| \quad (\text{B.114})$$

unmittelbar als Isometrie erkennen. Insgesamt sind sowohl $S^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(H_1, H_{\frac{1}{2}})$ als auch $S^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(H_{\frac{1}{2}}, H)$ isometrische Isomorphismen mit einem Bildbereich, der dem gesamten Raum $H_{\frac{1}{2}}$ bzw. H entspricht, folglich sind sie unitär ([TW09]).

Das Vorgehen zur Einführung der Repräsentation des Dualraums unter Berücksichtigung eines Pivotraums H aus Anhang B.9.1 lässt sich auf den vorliegenden Fall übertragen. Ein Dualraum $H_{-\alpha}$ zu einem Hilbertraum H_α wird jeweils mit seiner Repräsentation identifiziert $H_{-\alpha} = H'_\alpha$ ([TW03a]). Die gesamte Raumskala mit stetigen und dichten Einbettungen zwischen den Räumen lautet somit

$$H_1 \hookrightarrow_d H_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow_d H \hookrightarrow_d H_{-\frac{1}{2}} \hookrightarrow_d H_{-1}. \quad (\text{B.115})$$

Mit einem explizitem Verweis auf [TW09] und ohne weiteren Hintergrund werden die folgenden Zusammenhänge zur Definition der Normen auf den Dualräumen angegeben. Für die in (B.106) bzw. (B.107) eingeführten Operatoren existieren für $\alpha = \{\frac{1}{2}, 1\}$ eindeutige stetige Erweiterungen zu

$$S^\alpha \in \mathcal{L}(H, H_{-\alpha}) \quad (\text{B.116})$$

deren Inverse durch

$$\|x\|_{H_{-\alpha}} = \|S^{-\alpha}x\| \quad (\text{B.117})$$

eine Möglichkeit zur Formulierung der Norm auf den Dualräumen bietet. Die derartige Definition der Norm führt dazu, dass die Erweiterungen aus (B.116) unitäre sind.

Zudem existiert zu dem ursprünglich eingeführten Operator $S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$ eine eindeutige stetige Erweiterung zu einem unitären Operator. Bei gleicher Nomenklatur des ursprünglichen Operators und dessen Erweiterung gilt

$$S = \mathcal{L}\left(H_{\frac{1}{2}}, H_{-\frac{1}{2}}\right). \quad (\text{B.118})$$

Analog zum ursprünglichen Operator ist die Erweiterung ein positiver Operator, allerdings nicht auf H sondern auf der Vervollständigung $H_{-\frac{1}{2}}$ ([TW09]).

Aus den in (B.115) auftretenden Räumen lassen sich mittels der externen direkten Summe (Definition B.1) unter Verwendung der Produkttopologie (Satz 16) komplexere Räume, wie beispielsweise der Zustandsraum konstruieren.

Definitionsbereiche positiver diagonalisierbarer Operatoren

Die vorangehenden Betrachtungen zeigen, wie sich auf Basis positiver Operatoren Raumskalen der Form (B.115) erzeugen lassen. Im Folgenden wird zusätzlich vorausgesetzt, dass die Eigenvektoren $\{\tilde{\psi}_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_{S,i}\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ der betrachteten positiven Operatoren $S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$ eine Orthonormalbasis von H bilden. Unter dieser Annahme erfolgt die Charakterisierung der innerhalb der Raumskala (B.115) auftretenden Räume auf Basis der Reihendarstellung der Operatoren S^α , $\alpha \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$. Die Nomenklatur ist an dieser Stelle an den Steifigkeitsoperator des Beispielsystems angepasst, die Lösung des Eigenwertproblems von S erfolgt in Abschnitt D.1.3 und S erfüllt alle Annahmen des vorliegenden Abschnitts.

Falls ein Operator S die genannten Voraussetzungen erfüllt, lässt sich S als Spezialfall eines diagonalisierbaren Operators entsprechend Abschnitt B.8 auffassen. Analog zum Fall allgemeiner diagonalisierbarer Operatoren lautet die Reihendarstellung formal

$$S^\alpha x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \lambda_{S,i}^\alpha \langle x, \tilde{\psi}_i \rangle \tilde{\psi}_i \quad (\text{B.119})$$

für $\alpha \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$. Die Eigenwerte verschiedener Potenzen des Steifigkeitsoperators lassen sich durch die Anwendung von Satz 49 angeben, für S^α , $\alpha \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$ lauten die Eigenwerte damit $\{\lambda_{S,i}^\alpha\}_{i \in \mathbb{I}^+}$. Neben den Eigenwerten von S sind auch die Eigenwerte von S^α reell und positiv (Abschnitt B.7.4).

Entsprechend der Ausführungen des vorangehenden Abschnitts wird der Definitionsbereich $\mathcal{D}(S)$ ausgestattet mit der Norm (B.110) definiert durch das Innenprodukt aus (B.109) betrachtet. Daraus

ergibt sich die Charakterisierung der Definitionsbereiche der zulässigen Operatoren zu

$$H_\alpha = \mathcal{D}(S^\alpha) = \left\{ x \in H \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \lambda_{S,i}^{2\alpha} \left| \langle x, \tilde{\psi}_i \rangle \right|^2 < \infty \right\} \quad (\text{B.120})$$

für $\alpha \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$. Die mittels (B.120) definierten Räume $H_\alpha = \mathcal{D}(S^\alpha)$ sind die Vervollständigung von $\mathcal{D}(S)$ in der Norm nach (B.110). Die spezielle Wahl von $\alpha = 1$ führt auf $H_1 = \mathcal{D}(S)$. Aus der Wahl $\alpha = 0$ ergibt sich die Darstellung der Elemente von H in der Orthonormalbasis $\{\tilde{\psi}_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und damit gerade H .

Zur Veranschaulichung von $\mathcal{D}(S)$ sei angenommen, dass $x \in H$ in Reihendarstellung vorliegt und dabei nur endlich viele seiner Entwicklungskoeffizienten Null sind. Für die Eigenwerte des Steifigkeitsoperators gilt $\lambda_{S,i} = \left(\frac{k_i}{L}\right)^4 \in \mathcal{O}(4)$. Die von Null verschiedenen Entwicklungskoeffizienten eines $x \in H$ müssen ausreichend schnell gegen Null konvergieren, um trotz der Gewichtung mittels der wachsenden Eigenwerte $\lambda_{S,i} = \left(\frac{k_i}{L}\right)^4 \in \mathcal{O}(4)$, die Konvergenz der Reihenentwicklung zu gewährleisten. Im Vergleich zu den Entwicklungskoeffizienten der Elemente des Pivotraums, sind an die Summierbarkeit der Entwicklungskoeffizienten eines $x \in H_{-\frac{1}{2}}$ weniger strenge Anforderungen gestellt. Diese Behauptung wird für das Beispielsystem anschaulich durch die Nullfolge $\lambda_{S,i}^{-1} \in \mathcal{O}(-4)$ deutlich.

Eine Darstellung der Elemente eines Raums der Raumskala (B.115) mit $\alpha \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ kann gemäß [TW09] auf Basis der üblichen Reihendarstellung

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \langle x, \tilde{\psi}_i \rangle_{H_\alpha \times H_{-\alpha}} \tilde{\psi}_i \quad (\text{B.121})$$

für alle $x \in H_\alpha$ erfolgen.

B.9.3 Interpolationsräume

Dieser Abschnitt dient der Einführung der sogenannten Interpolationsräume und zeigt damit eine weitere Möglichkeit zur Definition von Raumskalen für die Behandlung unendlich-dimensionaler Systeme mit unbeschränkten Ein-/ und Ausgangsoperatoren. Die Interpolationsräume finden verschiedentlich bei der Darstellung unendlich-dimensionaler System Verwendung, siehe beispielsweise [RW00] oder [JP06]. Mit Bezug auf die Approximation unendlich-dimensionaler Systeme, die durch eine analytische Halbgruppe repräsentiert werden, werden die Interpolationsräume in [Sas01; Sas02; SC02] eingesetzt. Die mathematischen Grundlagen der Interpolationsräume finden sich beispielsweise in [Tri78]. Das Beispielsystem wird zum einen durch eine analytische Halbgruppe (Abschnitt 3.2.3) repräsentiert und zum anderen ist die bei der Formulierung des Beispielsystems innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse verwendete Norm äquivalent zu der auf den Interpolationsräumen verwendeten Norm (Abschnitt 2.3.3).

Im Folgenden sei $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ der Erzeuger einer exponentiell stabilen stark stetigen Halbgruppe auf \mathcal{X} . Falls $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ lediglich eine stark stetige Halbgruppe erzeugt,

kann vorab entsprechend [RW00] eine Verschiebung des Spektrums von A vorgenommen werden. Die Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ von A zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bilden eine Rieszbasis von \mathcal{X} . Außerdem sei $0 \in \rho(A)$. Der Zustandsraum ist mit der Norm $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ ein Hilbertraum. Dann wird die Vervollständigung von \mathcal{X} in der Norm $\|x\|_{-\alpha} = \|A^{-\alpha}x\|$ mit $\alpha \geq 0$ durch $\mathcal{X}_{-\alpha}$ bezeichnet und $\mathcal{X}_{-\alpha}$ besitzt im Sinne von [RW00] (S. 218) eine Interpretation als Interpolationsraum. Falls $0 \in \rho(A)$ nicht gilt, findet sich eine Verallgemeinerung auf Basis eines verschobenen Spektrums beispielsweise in [JZ02] (S. 2) oder [TW00] (S. 1409).

Entsprechend der Ausführungen aus [JP06] (S. 321f) kann die Norm auf einem Interpolationsraum durch ein Innenprodukt induziert werden. Zu Herleitung des entsprechenden Innenprodukts sei $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{X} und T eine Abbildung mit den in Abschnitt B.5.3 beschriebenen Eigenschaften, sodass (B.40) und insbesondere $T^{-1}v_i = u_i, \forall i \in \mathbb{I}^+$ gilt. Zur Herleitung des Innenprodukts sei

$$\|x\|_{-\alpha,1}^2 = \langle x, x \rangle_{-\alpha,1} = \|T^{-1}A^{-\alpha}x\|^2 = \langle T^{-1}A^{-\alpha}x, T^{-1}A^{-\alpha}x \rangle \quad (\text{B.122})$$

mit $\alpha \geq 0$. Unter Berücksichtigung einer Darstellung der Elemente von $\mathcal{X}_{-\alpha}$ in der Rieszbasis gilt damit $\langle T^{-1}A^{-\alpha}x, T^{-1}A^{-\alpha}y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{-2\alpha} \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle}$ und $\|x\|_{-\alpha,1}^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{-2\alpha} |\langle x, w_i \rangle|^2$. Da $\|x\|_{-\alpha,1}$ äquivalent zu $\|x\|_{-\alpha}$ ist, wird im Folgenden

$$\|x\|_{-\alpha}^2 = \langle x, x \rangle_{-\alpha} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{-2\alpha} |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad (\text{B.123})$$

mit

$$\langle x, y \rangle_{-\alpha} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{-2\alpha} \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{X}_{-\alpha}, \forall y \in \mathcal{X}_{-\alpha} \quad (\text{B.124})$$

gesetzt. Die als Vervollständigung von \mathcal{X} in der Norm (B.123) definierten Räume sind Hilberträume ([JP06] (S. 321f)) und werden mit $\mathcal{H}_{-\alpha}$ benannt. Eine Charakterisierung von $\mathcal{H}_{-\alpha}$ ist durch

$$\mathcal{H}_{-\alpha} = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{-2\alpha} |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (\text{B.125})$$

gegeben. Für die Behandlung unbeschränkter Ein-/Ausgangsoperatoren ist die Möglichkeit relevant, die von A auf \mathcal{X} erzeugte stark stetige Halbgruppe auf eine stark stetige Halbgruppe auf $\mathcal{H}_{-\alpha}$ zu erweitern, die ihrerseits durch eine Erweiterung von A erzeugt wird. Detaillierte Ausführungen dazu finden sich beispielsweise in [JP06] (S. 322).

Relativ zu \mathcal{X} als Pivotraum lassen sich zu den Räumen $\mathcal{H}_{-\alpha}, \alpha > 0$ eindeutig die Dualräume $\mathcal{H}_{\alpha}, \alpha > 0$ definieren. Die dabei verwendete Norm

$$\|x\|_{\alpha}^2 = \langle x, x \rangle_{\alpha} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{2\alpha} |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad (\text{B.126})$$

wird durch das Innenprodukt

$$\langle x, y \rangle_{\alpha} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{2\alpha} \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{X}_{\alpha}, \forall y \in \mathcal{X}_{\alpha} \quad (\text{B.127})$$

induziert. Eine Charakterisierung der Räume $\mathcal{H}_{\alpha}, \alpha \geq 0$ lautet

$$\mathcal{H}_{\alpha} = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\lambda_i|^{2\alpha} |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\}. \quad (\text{B.128})$$

Für ein festes $\alpha > 0$ folgt eine Raumskala der Form $\mathcal{H}_{\alpha} \xhookrightarrow{\text{d}} \mathcal{X} \xhookrightarrow{\text{d}} \mathcal{H}_{-\alpha}$. Für die Wahl $\alpha = 0$ ergibt sich der Pivotraum \mathcal{X} . Aus der Wahl $\alpha = 1$ resultiert der Raum \mathcal{H}_1 , der identisch mit $\mathcal{D}(A)$ entsprechend (B.81) aus Satz 53 ist. Die durch $\alpha = 1$ aus (B.126) hervorgehende Norm ist äquivalent zur Graphennorm. Diese Aussage geht beispielsweise aus [TW03a] (S. 7) für den Fall $0 \in \rho(A)$ aus der dort verwendeten Norm hervor. Weitere in diesem Kontext relevante Aussagen finden sich beispielsweise in [JZ02] (S. 2), wobei eine dort definierte Norm eine zusätzlich Möglichkeit zur Verschiebung des Spektrums des definierenden Operators beinhaltet.

B.10 Begriffe aus der Integrations-/ Differentiationstheorie

Einleitend wird im Folgenden der Begriff des Lebesgue-Integrals eingeführt, basierend auf diesem Integrationsbegriff erfolgt anschließend die Definition verschiedener relevanter Vektorräume. Die Verallgemeinerten Integralbegriffe nach Pettis und Bochner bieten hiernach eine Möglichkeit zur Integration allgemeiner vektor- und operator-wertiger Funktionen und somit die Möglichkeit zur Definition von Vektorräumen zur Klassifizierung von Signalen und Systemen im Zeit- und Frequenzbereich. Kausale energetisch beschränkte Signale und Systeme die die Kausalität und Beschränktheit hinsichtlich der Energie derartiger Signale erhalten, lassen sich als Elemente spezieller Hardy-Räume interpretieren. An die Definition der in diesem Zusammenhang interessanten Hardy-Räume schließt sich eine Bewertung der Bedeutung dieser Räume aus systemtheoretischer Sicht an. Dabei kann insbesondere Satz B.150 als Basis für die Definition der Ein-/Ausgangsstabilität des geschlossenen Regelkreises in Definition 11 angesehen werden.

B.10.1 Lebesgue-Integral und einige zugehörige Funktionenräume

Dieser Abschnitt führt zunächst den in dieser Arbeit vielfach genutzten Begriff des Lebesgue-Integrals ein und darauf aufbauend verschiedene in dieser Arbeit relevante Vektorräume von Funktionen die gewisse Integrationseigenschaften im Sinne der Lebesgue-Integration aufweisen.

Das Lebesgue-Integral

Im Rahmen dieser Arbeit wird für komplex-wertige Funktionen soweit möglich und nicht anders gekennzeichnet der Integrationsbegriff im Sinne des Lebesgue-Integrals verstanden. Eine kurze Einführung dazu, inklusive eines Vergleichs zum Riemannintegral, findet sich beispielsweise in [Wer11] (S. 505ff) oder [Alt06] (S. 71).

Der Definition des Lebesgue-Integrals liegt die Menge der meßbaren Funktionen $f : \mathcal{I} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zugrunde. Diese wird an dieser Stelle nicht explizit eingeführt, sondern im Sinne von Definition

A.1.4 aus [Wer11] (S. 509) verstanden. Die meßbaren Funktionen bilden einen Vektorraum, jedes Element dieses Vektorraums ist punktweise das Limit einer Folge von Treppenfunktionen $\{f_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ (Satz A.1.5, [Wer11] (S. 510)).

Definition 84 (Lebesgue-Integral) Es sei $f : \mathcal{I} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Funktion. Falls das durch

$$\int_{\mathcal{I}} f \, d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{I}} f_i \, d\mu \quad (\text{B.129})$$

definierte Integral endlich ist, heißt f Lebesgue-integrierbar und das in (B.129) auftretende Integral wird als Lebesgue-Integral von f bezeichnet. \square

Die Definition der in Definition 84 auftretenden Treppenfunktionen findet sich beispielsweise in [Alt06] (S. 74) oder [Wer11] (S. 510) und besagt im Wesentlichen, dass die Treppenfunktionen ihrerseits als Linearkombinationen charakteristischer Funktionen darstellbar sind.

Einige der in Definition 84 getroffenen Voraussetzungen können für eine Vielzahl der Anwendungen innerhalb dieser Arbeit konkretisiert werden, das Folgende gilt insbesondere in Bezug auf die örtliche Unabhängige des Beispielsystems. Das Intervall \mathcal{I} stimmt nicht selten mit dem örtlichen Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ überein. Als Maß wird das Lebesgue-Maß ([Wer11] (S. 513)) verwendet $\mu = \lambda$, dass mittels

$$\lambda([a, b]) = b - a \quad (\text{B.130})$$

jedem ein-dimensionalen örtlichen Intervall eine Länge zuweist. Als Bildbereich der betrachteten Funktionen kommen beispielsweise die reellen Zahlen in Frage $X = \mathbb{R}$. Die Annahme eines komplexen Bildbereichs bewirkt keine wesentlichen Änderungen in der Definition des Lebesgue-Integrals. Die Integration einer Funktion mit komplexem Bildbereich setzt sich aus der Integration des Real- und Imaginärteils zusammen (Definition A.1.6, [Wer11] (S. 511)).

Für das Integral sind verschiedene äquivalente Schreibweisen üblich ([Wer11] (S. 511)). Bezogen auf das Beispielsystem wird mit $\Omega = (a, b)$

$$\int_{\mathcal{I}} f \, d\mu = \int_{\Omega} f(y) \, d\lambda(y) = \int_{\Omega} f(y) \, dy = \int_a^b f(y) \, dy \quad (\text{B.131})$$

gleichwertig verwendet.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral

Der folgenden Satz stellt hinsichtlich des Lebesgue-Integrals das Äquivalent zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bezogen auf das Riemann-Integral dar und ist in der aufgeführten Form inklusive eines zugehörigen Beweises in [Els05] (S. 304) zu finden. Neben seiner

fundamentalen mathematischen Bedeutung trägt der Satz zum Verständnis in Bezug auf die Wahl von Definitionsbereichen von Differentialoperatoren bei.

Satz 55 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bezüglich des Lebesgue-Integrals)

a) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ Lebesgue-integrierbar, dann ist

$$F(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau \quad (a \leq x \leq b) \quad (\text{B.132})$$

absolut stetig, mit $F' = f$ λ -f.ü.

b) Es sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ absolut stetig und zudem $F'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, in denen F nicht differenzierbar ist. Dann ist F' Lebesgue-integrierbar über $[a, b]$ mit

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(\tau) d\tau \quad (a \leq x \leq b). \quad (\text{B.133})$$

\mathcal{L}^p -Räume

Jede Lebesgue-integrierbare Funktion ist auch Lebesgue-messbar und absolut Lebesgue-integrierbar ([Els05] (S. 130)). Da Lebesgue-messbare Funktionen, die in gewissen Potenzen absolut integrierbar sind, eine große Bedeutung zukommt, werden die Mengen dieser Funktionen mit einer Bezeichnung ausgestattet. Die nachfolgende Definition orientiert sich an [Els05] (S. 229).

Definition 85 (\mathcal{L}^p -Räume) Die Menge aller meßbaren Funktionen $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{K}$ für die mit reellem $0 < p \leq \infty$ gerade $|f|^p$ μ -integrierbar ist und für $0 < p \leq \infty$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathcal{I}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty & \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{I}, \mu), \quad 0 < p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in \mathcal{I}} |f(x)| < \infty & \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{I}, \mu), \quad p = \infty \end{cases} \quad (\text{B.134})$$

gilt, heißt $\mathcal{L}^p(\mathcal{I}, \mu)$. □

Das im Fall $p = \infty$ in Definition 85 verwendete essentielle Supremum stellt eine Erweiterung des Supremums zur Handhabbarkeit von Funktionen dar, die sich nur hinsichtlich Nullmengen voneinander unterscheiden. Für messbare Funktionen $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{K}$ ist das essentielle Supremums durch

$$\text{ess sup}_{x \in \mathcal{I}} |f(x)| = \inf \{ \alpha \geq 0 \mid \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0 \} \quad (\text{B.135})$$

gegeben ([Wer06] (S. 251)). Die innerhalb von Definition 85 eingeführten Abbildungen genügen den in Anhang B.3 aufgeführten Bedingungen einer Halbnorm. Abweichend von einer Norm gilt lediglich

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu \text{ f.ü.}$$

Unter der Halbnorm ergibt das Bild aller Funktionen Null, solange sich diese nur auf μ -Nullmengen von Null unterscheiden ([Els05] (S. 230)). Die Halbnorm induziert auf den \mathcal{L}^p -Räumen eine Halbmetrik.

Solange das Lebesgue-Maß Anwendung findet, wird die abkürzende Schreibweise $\mathcal{L}^p(\mathcal{I}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mathcal{I})$ benutzt.

L^p - und L^p_{lok} -Räume

Auf Basis der halbmétrischen \mathcal{L}^p -Räume werden mittels geeigneter Faktorräume metrische Räume definiert die angenehmere topologische Eigenschaften aufweisen. Unter den Annahmen gemäß Definition 85 folgt die Definition der L^p -Räume.

Definition 86 (L^p -Räume) Es sei $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^p \mid \|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0\}$. Dann werden die Quotientenräume $L^p = \mathcal{L}^p / \mathcal{N}$, $0 < p \leq \infty$ als L^p -Räume bezeichnet. □

Die Räume L^p enthalten ihrer Definition folgend Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf einem Lebesgue-Nullmaß voneinander unterscheiden, also im mathematischen Sinne bezüglich dieses Maßes fast überall gleich sind. Demnach werden beispielsweise Funktionen, die auf einem eindimensionalen Intervall definiert sind und lediglich an endlich vielen diskreten Punkten voneinander verschieden sind, als Elemente der L^p -Räume nicht mehr unterschieden. Dies hat zur Konsequenz, dass die Elemente der L^p nicht mehr sinnvoll punktweise zu interpretieren sind.

Dem üblichen Sprachgebrauch folgend, werden die Elemente der L^p -Räume als Funktionen bezeichnet. Auf den L^p -Räumen genügen die Abbildungen aus Definition 85 den Anforderungen an eine Norm und werden als L^p -Normen bezeichnet. Die L^p -Räume sind somit normiert und darüber hinaus Banachräume. Im Spezialfall $p = 2$ wird die L^2 -Norm durch ein Innenprodukt induziert, der L^2 -Raum ist ein Hilbertraum. Mit $\mathcal{I} = \Omega$ gilt

$$\|x\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle x, x \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} x^T \bar{x} \, dy = \int_{\Omega} |x|^2 \, dy \quad \forall x \in L^2(\Omega).$$

Der Begriff der lokalen Lebesgue-Integrierbarkeit wird beispielsweise für die Einführung verschiedener Differentiationsbegriffe im folgenden Abschnitt benötigt.

Definition 87 (Lokal Lebesgue-integrierbare Funktionen) Eine messbare Funktion $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{K}$ wird als p -fach mit $0 < p < \infty$ lokal Lebesgue-integrierbar bezeichnet, falls für alle kompakten Teilintervalle $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}$

$$\int_{\mathcal{I}_k} |f|^p d\mu < \infty$$

gilt. □

Aus dem Vektorraum der p -fach lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}_{\text{lok}}^p(\mathcal{I})$ erhält man analog zu Definition 86 mittels der Identifikation f.ü. gleicher Elemente den Raum der Äquivalenzklassen $L_{\text{lok}}^p(\mathcal{I})$ ([Wer11] (S. 432)).

Der folgende Satz entspricht Corollary 2.15 aus [AF03] (S. 29).

Satz 56 Für jedes Gebiet Ω und beliebige $1 \leq p \leq \infty$ gilt $L^p(\Omega) \subset L_{\text{lok}}^1(\Omega)$.

Inhaltlich zeigt Satz 56 beispielsweise, dass die in Definition 94 eingeführte Definition des schwachen Ableitungsbegriffs auch auf Basis von Funktionen aus $L^p(\Omega)$ möglich ist.

l^p -Folgenräume

Die Folgenräume stellen geeignete Konstrukte dar, um die Entwicklungskoeffizienten von Reihendarstellungen zu handhaben. Betrachtet werden Folgen $\{x_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ deren Folgenglieder jeweils Elemente von \mathbb{K} sind. Mit $x = \{x_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ werden durch

$$\|x\|_{l^p} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i^*|, & p = \infty \end{cases} \quad (\text{B.136})$$

Normen definiert. Darauf aufbauend heißen die, für $1 \leq p \leq \infty$ durch

$$l^p = \{x = \{x_i^*\}_{i \in \mathbb{N}} \mid \|x\|_{l^p} < \infty\} \quad (\text{B.137})$$

gegebenen Mengen, Folgenräume p -fach summierbarer Folgen oder kurz l^p -Räume ([Wer11] (S. 9)). Die l^p -Räume sind für $1 \leq p \leq \infty$ vollständig ([Heu92] (S. 59f)) und damit Banachräume. Die p -Norm wird im Fall $p = 2$ für alle $l^2 \ni x = \{x_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $l^2 \ni y = \{y_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ durch das Innenprodukt

$$\langle x, y \rangle_{l^2} = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^* \overline{y_i^*}$$

induziert, sodass $\|x\|_{l^2}^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i^*|^2$. Folglich ist l^2 ein Hilbertraum. An dem Hilbertraum l^2 lässt sich die Gleichartigkeit aller separablen unendlich-dimensionalen Hilberträume festmachen. Der folgende Satz entstammt [Heu92] (S. 182).

Satz 57 Jeder separable unendlich-dimensionale Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu l^2 . □

B.10.2 Räume integrierbarer vektor- und operator-wertiger Funktionen

Bochner- und Pettis-integrierbare Funktionen

Die Definition zur Klassifizierung von Signalen und Systemen geeigneter Funktionenräume erfordert den Umgang mit der Intergration vektor- oder operatorwertiger Funktionen und folglich eine Verallgemeinerung des Begriffs der Lebesgue-Integrierbarkeit hinsichtlich derartiger Funktionen. Auf eine detaillierte Einführung der in diesem Zusammenhang verwendeten Bochner-Integrale („Dunford’s first integral“, „Dunford and Schwartz integral“) oder Pettis-Integrale („Dunford’s second integral“) für den Fall lediglich schwach messbarer Funktionen wird an dieser Stelle verzichtet, entsprechende Ausführungen und eine Betrachtung der Unterschiede zum Lebesgue-Integral finden sich beispielsweise in [DU77] (S. 41ff) oder [Nik02]. Die folgenden Definitionen der Integrierbarkeit im Bochner- und Pettis-Sinne dienen lediglich der Orientierung und Einführung verschiedener Funktionenräume, die darin verwendeten Begriffe hinsichtlich der verschiedenen Ausprägungen der Meßbarkeit von Funktionen finden sich unter anderem in [CZ95].

Definition 88 (Bochner-Integral) Es sei $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ und X ein Banachraum, ferner sei $f : \mathcal{I} \rightarrow X$ stark messbar und $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen. Falls

$$\int_{\mathcal{I}} \|f(s)\| ds < \infty, \quad (\text{B.138})$$

heißt f Bochner-integrierbar und das Bochner-Integral von f ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{I}} f(s) ds = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{I}} f_i(s) ds. \quad (\text{B.139})$$

□

Im Unterschied zur Lebesgue-Integrierbarkeit hängt die Bochner-Integrierbarkeit einer Funktion f von der Integrierbarkeit von $\|f\|$ ab. Für Bochner-integrierbare Funktionen ist das Integral durch den Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen gegeben. Die Definition der einfachen Funktionen findet sich beispielsweise in Definition A.5.1 aus [CZ95] (S. 621). Eine Erläuterung zu der Grenzwertbildung in (B.139) ist ebenfalls der letztgenannten Quelle zu entnehmen. Verschiedene Eigenschaften des Bochner-Integrals werden beispielsweise in [DU77], [EN00], [Nik02] oder [CZ95] diskutiert. Eine weitere Verallgemeinerung des Integral auf lediglich schwach messbare Funktionen, deren Norm im Allgemeinen nicht integrierbar sein muss ([DU77] (S. 52)), stellt das Pettis-Integral dar. Ausführungen zu verschiedenen Ausprägungen der Meßbarkeit von Funktionen sind beispielsweise in [HP57] (S. 71ff) enthalten. Die Folgende Definition bezieht sich insbesondere auf operatorwertige Funktionen und stammt in dieser Form aus [CZ95].

Definition 89 (Pettis-Integrierbarkeit) Es seien X, Y separable Hilberträume und $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$. Falls

$$\langle y, F(s)x \rangle_Y \in L^1(\mathcal{I}), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad (\text{B.140})$$

heißt $F(\cdot)$ Pettis-integrierbar. \square

Die Pettis-Integrierbarkeit von F hängt von der Integrierbarkeit von $\langle y, F(s)x \rangle_Y$ hinsichtlich aller Elemente $x \in X$ und aller $y \in Y$ ab und lässt sich somit in einem gewissen Sinne als punktweise Eigenschaft hinsichtlich aller $x \in X$ und aller $y \in Y$ auffassen.

Die detaillierte Definition des Pettis-Integrals findet sich beispielsweise in [DU77] (S. 53) oder [CZ95] (S. 624) und wird an dieser Stelle nicht wiederholt. Die genannten Quellen bieten darüber hinaus Beispiele Pettis-Integrierbarer Funktionen, die nicht im Sinne der anderen hier aufgeführten Integralbegriffe integrierbar sind.

Einige Funktionenräume zur Klassifizierung von Signalen und Systemen im Zeitbereich

Die anschließende Definition einer Verallgemeinerung der Lebesgue-Räume auf vektor- und operatorwertiger Funktionen ermöglicht insbesondere die Klassifizierung von Signalen und Systemen im Zeitbereich und folgt [CZ95] (S. 626). Eine ähnliche Auflistung hier relevanter Räume wird in [Oos99] (S. 8) aufgeführt. Darüber hinaus sei als Quelle auf [KK75] verwiesen. Im Unterschied zu [CZ95] wird im Folgenden keine differenzierende Nomenklatur zur Bezeichnung der Räume Pettis-integrierbarer operator-wertiger Funktionen eingeführt, statt dessen wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Integrale jeweils im passenden Sinne aufgefasst werden.

Definition 90 (Vektor-und operatorwertige Räume) Es seien X, X_1 und X_2 separable Hilberträume und $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$L^p(\mathcal{I}, \mathcal{L}(X_1, X_2)) = \{F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_2) \mid F \text{ ist schwach messbar,} \\ \|F\|_p^p = \int_{\mathcal{I}} \|F(s)\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)}^p ds < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(\mathcal{I}, \mathcal{L}(X_1, X_2)) = \{F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_2) \mid F \text{ ist schwach messbar,} \\ \|F\|_\infty = \text{ess sup}_{\mathcal{I}} \|F(s)\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)} < \infty\}$$

und

$$L^p(\mathcal{I}, X) = \{f : \mathcal{I} \rightarrow X \mid f \text{ ist schwach messbar, } \|f\|_p^p = \int_{\mathcal{I}} \|f(s)\|_X^p ds < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(\mathcal{I}, X) = \{f : \mathcal{I} \rightarrow X \mid f \text{ ist schwach messbar, } \|f\|_\infty = \text{ess sup}_{\mathcal{I}} \|f(s)\|_X < \infty\}.$$

\square

Werden jene Elemente der in Definition 90 eingeführten Räume miteinander identifiziert, die μ -f.ü. gleich sind, so ist jeder der in Definition 90 definierten Räume mit der jeweils korrespondierenden $\|\cdot\|_p$ -Norm vollständig und damit ein Banachraum ([DS58] (S. 146)). Unter den in Definition 90 getroffenen Annahmen sowie $f_1, f_2 : \mathcal{I} \rightarrow X$, erfüllt $L^2(\mathcal{I}, X)$ unter Verwendung des Innenprodukts $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathcal{I}} \langle f_1(s), f_2(s) \rangle_X ds$ und der daraus induzierten Norm die Kriterien eines Hilbertraums ([CZ95] (S. 626)).

Als wiederholt auftretender Spezialfall eines vektorwertigen Lebesgue-Raumes sei der, durch $L^2(\theta, X)$ bezeichnete Raum der auf einem Zeitintervall θ quadratisch integrierbaren X -wertigen messbaren Funktionen genannt. Unter der Annahme, dass $\mathcal{I} = \theta = (-\infty, \infty)$ ein Zeitintervall beschreibt und das die Elemente von X als Signale aufgefasst werden können, handelt es sich bei den Elementen aus $L^2((-\infty, \infty), X)$ um Signale endlicher Energie. Für jedes $x \in L^2((-\infty, \infty), X)$ wird durch eine Projektion der Form

$$P : L^2((-\infty, \infty), X) \rightarrow L^2([0, \infty), X) \\ x(t) \mapsto Px(t) \quad (\text{B.141})$$

mit

$$Px(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (\text{B.142})$$

ein kausales Signal endlicher Energie $Px \in L^2([0, \infty), X)$ erzeugt. Demnach lässt sich $L^2([0, \infty), X)$ als Raum der kausalen Signale mit endlicher Energie interpretieren.

Unter der Annahme, dass der Raum der Eingangssignale \mathcal{U} sowie der Raum der Ausgangssignale separable Hilberträume sind, definiert $L^2([0, \infty), \mathcal{U})$ den Raum der kausalen Eingangssignale endlicher Energie und $L^2([0, \infty), \mathcal{Y})$ den Raum der kausalen Ausgangssignale endlicher Energie. Die beiden Räume besitzen eine besondere Bedeutung hinsichtlich der Stabilitätsdefinition entsprechend Definition 11, die im wesentlichen auf Satz 60 beruht.

Einige Funktionenräume zur Klassifizierung von Signalen und Systemen im Frequenzbereich

Die nachfolgende Definition vektor- und operatorwertiger Lebesgue-Räume wird im Hinblick auf die Betrachtung von Signalen und Systemen im Frequenzbereich eingeführt und orientiert sich an [CZ95] (S. 639). Gegenüber der genannten Quelle werden vereinfachend sowohl endlich-dimensionale Eingangsräume \mathcal{U} als auch endlich-dimensionale Ausgangsräume \mathcal{Y} angenommen.

Definition 91 Es sei X ein separabler Hilbertraum und \mathcal{U}, \mathcal{Y} Hilberträume endlicher Dimension. Dann gilt

$$L^\infty(i\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})) = \{G : i\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}) \mid G \text{ ist schwach messbar und wesentlich beschränkt auf der imaginären Achse}\}$$

und

$$L^2(\mathbb{i}\mathbb{R}, X) = \{x : \mathbb{i}\mathbb{R} \rightarrow X \mid x \text{ ist schwach messbar und } \int_{\mathbb{R}} \|x(\mathrm{i}\omega)\|_X^2 d\omega < \infty\}.$$

□

Die Forderungen der schwachen Messbarkeit von G entspricht der Formulierung $\langle y, Gu \rangle$ ist messbar für alle $y \in \mathcal{Y}$ und für alle $u \in \mathcal{U}$ ([Nik02] (S. 46)). Die Annahme der wesentlichen Beschränktheit von G auf der imaginären Achse lässt sich auch mittels $\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(\mathrm{i}\omega)\|_\infty < \infty$ ausdrücken. Die schwache Messbarkeit von x , kann äquivalent durch $\langle x, y \rangle$ ist messbar für alle $y \in X$ eingefordert werden. Der nachfolgende Satz setzt sich aus Lemma A.6.9 und Lemma A.6.10 aus [CZ95] (S. 639f) zusammen. Die zugehörigen Beweise finden sich in der genannten Quelle.

Satz 58 *Es gelten die in Definition 91 getroffenen Annahmen, dann ist $L^\infty(\mathbb{i}\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ mit der Norm*

$$\begin{aligned} \|G\|_\infty &= \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(\mathrm{i}\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \overline{\sigma}(G(\mathrm{i}\omega)) = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{\max}(G(\mathrm{i}\omega)^* G(\mathrm{i}\omega))^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.143})$$

ein Banachraum und $L^2(\mathbb{i}\mathbb{R}, X)$ hinsichtlich der durch das Innenprodukt

$$\langle x_1, x_2 \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle x_1(\mathrm{i}\omega), x_2(\mathrm{i}\omega) \rangle_X d\omega \quad (\text{B.144})$$

induzierten Norm vollständig und damit ein Hilbertraum.

□

Hardy-Räume über der rechten und linken komplexen Halbebene

Innerhalb dieses Abschnitts werden ausgewählte Hardy-Räume eingeführt, deren Elemente analytisch oder äquivalent holomorph in der rechten oder linken komplexen Halbebene sind. Ihre Bedeutung erlangen einige spezielle Hardy-Räume dadurch, dass ihre Elemente aus Sicht der Systemtheorie als Frequenzbereichsdarstellung von Signalen endlicher Energie oder als Übertragungsfunktionen mit endlicher Verstärkung hinsichtlich Eingangssignalen mit endlicher Energie zu interpretieren sind. Derartige Hardy-Räume bilden die Basis für zahlreiche Betrachtungen im Bereich der normoptimalen und robusten Regelung.

Die folgende Definition führt zwei bedeutsame Hardy-Räume ein und orientiert sich an [CZ95] (S. 644). Weitere in diesem Zusammenhang relevante Betrachtungen finden sich beispielsweise in [RR85]. Eine allgemeinere Definition von Hardy-Räumen über der rechten s-Halbebene für $0 < p \leq \infty$ wird in [Nik02] (S. 145) eingeführt. Zudem seien als weitere Literaturquellen zu diesem Themenkomplex [Dur70], [Koo98] und [Fuh12] genannt.

Definition 92 (Hardy-Räume) Es sei X ein Banachraum und Y ein separabler Hilbertraum, dann definieren

$$\mathcal{H}_2(Y) = \{f : \mathbb{C}_0^+ \rightarrow Y \mid f \text{ ist holomorph,} \\ \|f\|_2^2 = \sup_{\zeta > 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|f(\zeta + i\omega)\|^2 d\omega \right) < \infty\} \quad (\text{B.145})$$

und

$$\mathcal{H}_\infty(X) = \{G : \mathbb{C}_0^+ \rightarrow X \mid G \text{ ist holomorph, } \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \|G(s)\| < \infty\} \quad (\text{B.146})$$

Hardy-Räume. □

Die Annahme von $X = \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ in Definition 92, wobei \mathcal{U} und \mathcal{Y} endlich-dimensionale Hilberträume der Ein-/Ausgangssignale seien, führt auf den wichtigen Spezialfall des Hardy-Raums $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$. Es existiert eine Abbildung, die jedem Element G aus $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ eindeutig ein $\tilde{G} \in L^\infty(i\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ gemäß Definition 91 zuordnet, sodass

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0^+} G(\zeta + i\omega) u = \tilde{G}(i\omega) u, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \text{ f.f.a. } \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.147})$$

Daraus lässt sich schließen, dass jedes $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ eine korrekt gestellte Erweiterung auf den Rand besitzt ([CZ95] (S. 644)). Ferner ermöglicht die Existenz einer linearen, injektiven und normerhaltenden Abbildung von $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ nach $\tilde{G} \in L^\infty(i\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$, sodass

$$\sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \|G(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})} = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \|\tilde{G}(i\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})}, \quad (\text{B.148})$$

die Identifikation von $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ mit $\tilde{G} \in L^\infty(i\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ und damit die Interpretation von $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ als abgeschlossenen Unterraum von $L^\infty(i\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ und es gilt

$$\sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} \|G(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})} = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \|\tilde{G}(i\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})}. \quad (\text{B.149})$$

Darüber hinaus gelten die in (B.143) aufgeführten Gleichungen für die Norm von Elementen aus $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$. Eine ausführliche Darstellung hinsichtlich verschiedener Unterräume von $L^\infty(i\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ und $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$, die speziell hinsichtlich der Theorie endlich-dimensionaler Systeme Relevanz besitzen findet sich in [ZDG95]. Abkürzend wird für $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ verschiedentlich auch \mathcal{H}_∞ geschrieben.

Einige Zusammenhänge zwischen Funktionenräumen im Zeit- und Frequenzbereich

Unter der Annahme eines separablen Hilbertraums X , verdeutlicht der folgende Satz aus [CZ95] (S. 645) den auf der Laplace-Transformation beruhenden Zusammenhang zwischen den Räumen $L^2([0, \infty), X)$ und $\mathcal{H}_2(X)$.

Satz 59 (Satz von Paley-Wiener) *Es sei X ein separabler Hilbertraum. Dann ist $L^2([0, \infty), X)$ unter der Laplace-Transformation isometrisch isomorph zu $\mathcal{H}_2(X)$.* \square

Ein Literaturverweis zum Beweis des voranstehenden Satzes wird in [CZ95] (S. 645) aufgeführt. Da in Zeitbereichsdarstellung gegebene kausale Signale endlicher Energie Elemente aus $L^2([0, \infty), X)$ sind, existiert Satz 59 folgend für derartige Signale eine eindeutige Zuordnung im Frequenzbereich in $\mathcal{H}_2(Y)$. $\mathcal{H}_2(Y)$ kann somit als Raum der im Frequenzbereich dargestellten kausalen Signale mit endlicher Energie aufgefasst werden. Siehe auch [Dur70] (S. 196) und [Nik02] (S. 146). Die in [CZ95] (S. 645) aufgeführte Formulierung von Satz 59 beinhaltet die Erhaltung des Innenprodukts durch die Laplace-Transformation.

Systemtheoretische Sicht auf $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$

Der folgende Satz, der sich zusammen mit einem zugehörigen Beweis in [CZ95] (S. 648) findet, ordnet Elementen aus $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ interessante Eigenschaften hinsichtlich der Abbildung kausaler, energiebeschränkter Signale zu.

Satz 60 *Es sei $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$, $u \in \mathcal{H}_2(\mathcal{U})$ und $\|\cdot\|_\infty$ die Norm auf $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$. Dann folgt $Gu \in \mathcal{H}_2(\mathcal{Y})$ und für die multiplikative Abbildung $M_G : u \mapsto Gu$ gilt zudem $M_G \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2(\mathcal{U}), \mathcal{H}_2(\mathcal{Y}))$ mit*

$$\|M_G u\|_{\mathcal{H}_2(\mathcal{Y})} \leq \|G\|_\infty \|u\|_{\mathcal{H}_2(\mathcal{U})} \quad (\text{B.150})$$

sowie

$$\|M_G\| = \|G\|_\infty = \sup_{u \in \mathcal{U}, \|u\|_{\mathcal{H}_2(\mathcal{U})}=1} \frac{\|M_G u\|_{\mathcal{H}_2(\mathcal{Y})}}{\|u\|_{\mathcal{H}_2(\mathcal{U})}}. \quad (\text{B.151})$$

\square

Eine Interpretation aus systemtheoretischer Sicht lässt die Aussage zu, dass Übertragungsfunktionen $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ kausale Signale endlicher Energie mit endlicher Verstärkung auf ebenfalls kausale Signale abbilden. Für eine Übertragungsfunktionen eines unendlich-dimensionalen Systems G wird die Äquivalenz von $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ und der Ein-/Ausgangsstabilität des Systems durch Definition 11 erklärt. Auf Basis von Satz 10 kann unter den dort aufgeführten Voraussetzungen die exponentielle Stabilität des Systems gefolgert werden. Weitere Literaturhinweise zur Äquivalenz von Ein-/Ausgangsstabilität und exponentieller Stabilität unendlich-dimensionaler Systeme finden sich in Abschnitt E.2.5.

Zu einer im Frequenzbereich gegebenen Übertragungsfunktion $G \in L^\infty(i\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$ eines Systems existiert eine mittels der Fourier- oder Laplace-Transformation verknüpfte Ein-/Ausgangsabbildung des Systems im Zeitbereich \mathcal{G} , wobei die Äquivalenzrelation

$$G \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})) \Leftrightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), \mathcal{U}), L^2([0, \infty), \mathcal{Y})) \quad (\text{B.152})$$

gilt ([CZ95] (S. 648)).

B.10.3 Differentiationstheorie

Falls eine Funktion im klassischen Sinne nicht differenzierbar ist, besteht gegebenenfalls die Möglichkeit eine Differentiation der betreffenden Funktion in einem schwächeren Sinn vorzunehmen. Der vorliegende Abschnitt dient der Einführung verschiedener Differentiationsbegriffe. Eine anschauliche Einführung in diesen Themenkomplex findet sich beispielsweise in [Rud91] (S. 149ff).

Menge der Testfunktionen

Beide folgenden Differentiationsbegriffe basieren auf der Verwendung von Testfunktionen bezüglich derer zunächst die notwendigen Begrifflichkeiten erläutert werden. Die Idee, die der Einführung der Testfunktionen vorangeht, wird durch die eingänglichen Ausführungen in [Rud91] (S. 149ff) fassbar. Ausgangspunkt dazu ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$ die gegebenenfalls nicht differenzierbar ist, aber als lokal integrierbar angenommen wird und für die in einem gewissen Sinn eine Ableitung gesucht wird. Aufgrund der lokalen Integrierbarkeit von f und unter der Annahme geeigneten Funktionen ϕ ist

$$\phi \mapsto \int_{\Omega} f \phi \, dz \in \mathbb{R} \quad (\text{B.153})$$

eine korrekt gestellte Abbildung. Ursprünglich bildet f reelle Zahlen $z \in \mathbb{R}$ auf reelle Zahlen $f(z) \in \mathbb{R}$ ab. Diese ursprüngliche Abbildung wird in (B.153) durch ein Integral $\int_{\Omega} f(\cdot) \, dz$ mit dem Kern f ersetzt. Damit erfährt f eine neue Interpretation als Abbildung aller geeignet gewählten Funktionen ϕ auf eine durch $\int_{\Omega} f \phi \, dz$ gegebene reelle Zahl ([Rud91] (S. 150)). Im Zuge der schwachen Ableitung muss die Funktion f statt Anforderungen an die Differenzierbarkeit Anforderungen an die Integrierbarkeit erfüllen, f nimmt die Rolle des Kerns eines Integrals an. Die dabei außerdem zu berücksichtigenden Funktionen ϕ werden als Testfunktionen bezeichnet und im Folgenden gilt es die Eigenschaften dieser Menge von Funktionen zu definieren. Essentiell für die Definition der sogenannten Testfunktionen ist der Begriff des kompakten Trägers.

Definition 93 (Kompakter Träger) Eine Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen kompakten Träger $\text{supp}(\phi)$ auf dem Intervall $\overline{\Omega} = [v_1, v_2]$ mit $v_1, v_2 \in \mathbb{R} \wedge v_1 < v_2$ falls $f(v) = 0, \forall v \notin [v_1, v_2]$ gilt. \square

Anschaulich gesprochen sind Funktionen mit einem kompakten Träger abseits eines kompakten Intervalls identisch Null. Mit $C_0^n(\Omega)$ wird die Menge der n -fach stetig differenzierbaren Funktionen benannt, deren Träger eine kompakte Untermenge von Ω ist. Gemäß [Rud91] (S. 151) gehört eine Funktion $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann zur Menge der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$, wenn zum einen $\phi \in C^\infty(\Omega)$ und darüber hinaus der Träger der Funktion $\text{supp}(\phi)$ eine kompakte Untermenge von Ω ist. Damit gilt $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$. Ausführliche Betrachtungen zur Menge der Testfunktionen finden sich in [Yos80] oder [Rud91]. Die Annahme eines kompakten Trägers im beidseitig offenen

Intervall Ω führt dazu, dass die Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht erst exakt am Rand, sondern bereits in einer Umgebung vor jedem der Randpunkte identisch Null werden. Die Randbedingungen des Beispielsystems erfordern die Annahme von Testfunktionen die zwar in einer Umgebung um den linken Rand identisch Null sind, aber am rechten Rand beliebige Funktionswerte zulassen. Zu diesem Zweck wird die Menge der beliebig oft stetigen differenzierbaren Funktionen eingeführt, deren Träger eine kompakte Untermenge von $(\Omega]$ ist. Die Menge dieser Funktionen wird mit

$$\tilde{\mathcal{D}}(\Omega) = C_0^\infty((\Omega]) \quad (\text{B.154})$$

bezeichnet.

Im Folgenden werden die Differentiation im schwachen sowie im distributiven Sinne eingeführt, in beiden Fällen beinhaltet die Definition des jeweiligen Differentiationsbegriffs die Einhaltung einer Gleichung unter Berücksichtigung jeglicher Elemente eines Raumes von Testfunktionen.

Anstelle der voranstehend definierten Räume der Testfunktionen lassen sich zur Durchführung der schwachen oder distributiven Differentiation gegebenenfalls auch deren Abschlüsse in fallspezifisch zu definierenden Sobolew-Räumen heranziehen. Diese Möglichkeit wird beispielsweise in [Alt06] (S. 168f.) beschrieben und für das Beispielsystem umgesetzt.

Schwache Differentiation

Die schwache Differentiation stellt eine Verallgemeinerung der starken Differentiation für Funktionen dar, die im starken Sinne nicht differenzierbar sind. Im Allgemeinen wird die schwache Differentiation für lokal integrierbare Funktionen definiert ([Eva98] (S. 242), [AT81] (S. 12) oder [DL88] (S. 332)).

Anwendung findet die schwache Differentiation beispielsweise bei der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichungen des ungezwungenen trimorphen Biegewandlers in Abschnitt A.2. Formal kann die Vorschrift der schwachen Differentiation mittels partieller Integration und unter Berücksichtigung des kompakten Trägers der Testfunktionen ausgehend von der starken Differentiation hergeleitet werden.

Definition 94 (Schwache Differentiation) Falls zu einer lokal integrierbaren Funktion $x \in L_{\text{lok}}^1(\Omega)$ eine ebenfalls lokal integrierbare Funktion $y \in L_{\text{lok}}^1(\Omega)$ existiert, sodass

$$\int_{\Omega} y \phi \, dv = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} x D^\alpha \phi \, dv, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (\text{B.155})$$

gilt, dann heißt $y = D^\alpha x, y \in L_{\text{lok}}^1(\Omega)$ schwache oder verallgemeinerte Ableitung von x zum Multiindex α . □

Innerhalb der voranstehenden Definition gewährleistet die Forderung nach lokaler Integrierbarkeit, dass die auftretenden Integrale sinnvoll definiert sind. Die Definition der schwachen Differentiation

lässt sich ebenfalls anhand der stärkeren Forderung von p -facher Lebesgue-Integrierbarkeit der beteiligten Funktionen festmachen ([Sau05] (S. 180)). Aus der Definition der schwachen Ableitung lässt sich entnehmen, dass die schwache Differenzierbarkeit nicht punktweise definiert ist, sondern vielmehr für eine Funktion über einem Intervall. Für jede beliebige Testfunktion $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ führt die durch die schwache Ableitung $y \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ gewichtete Integration in (B.155) auf einen identischen Wert, wie die durch die abzuleitende Funktion $x \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ gewichtete Integration der abgeleiteten Testfunktion $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Falls die schwache Ableitung einer Funktion existiert, ist sie bis auf Mengen vom Maß Null, also im Sinne der Äquivalenzklassen Lebesgue-messbarer Funktionen, eindeutig ([AF03] (S. 21)). Falls zu einer Funktion eine starke Ableitung existiert, existiert auch eine schwache Ableitung und beide stimmen überein ([Sau05] (S. 181)). Bezüglich der Notation wird daher zwischen starker und schwacher Ableitung oftmals keine Unterscheidung getroffen. Aufgrund der Eigenschaften der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ gilt $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ für $0 < \alpha < \infty$, zudem existieren für jede Testfunktion starke Ableitungen beliebiger Ordnung.

Distributive Ableitung

Die distributive Ableitung verallgemeinert die schwache Ableitung für den Fall, dass keine lokal integrierbare Funktion y existiert, die die Gleichung aus Definition 94 erfüllt. Dieser Fall tritt beispielsweise bei der Behandlung des inhomogenen Terms des Beispielsystems in Anhang A.2.2 auf. Als Distribution wird ein lineares Funktional auf dem Raum der Testfunktionen

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{K} \\ \phi &\mapsto \psi(\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.156})$$

bezeichnet. Eine Distribution kann also als Element des Dualraums zu $\mathcal{D}(\Omega)$ angesehen werden. Mit $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ gilt dann $\psi \in (\mathcal{D}(\Omega))' = (C_0^\infty(\Omega))'$. Die übliche Notation mittels eines Dualitätsprodukts lautet

$$\psi(\phi) = \langle \psi, \phi \rangle_{(\mathcal{D}(\Omega))', \mathcal{D}(\Omega)}. \quad (\text{B.157})$$

Ausführliche Betrachtungen zum Dualraum der Testfunktionen sind in [AF03] (S. 20) zu finden. Weiterführende Betrachtungen zu Distributionen werden beispielsweise in [Yos80], [Rud91] oder [Alt06] angestellt.

Für reguläre Distributionen ψ_f existiert eine lokal integrierbare Funktion $f \in L^1_{\text{lok}}$, sodass eine Integraldarstellung

$$\psi_f(\phi) = \int_{\Omega} f(v) \phi(v) \, dv$$

möglich ist ([AF03] (S. 20)). Eine singuläre Distribution aus der Ingenieurspraxis ist die Delta-Distribution δ_{v_1} für die mit $v_1 \in \Omega$ durch

$$\phi \mapsto \langle \delta_{v_1}, \phi \rangle = \phi(v_1), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

der Testfunktion $\phi(v)$ ihr Funktionswert an der Stelle v_1 zugeordnet wird. Die Definition der distributiven Ableitung folgt der in [AF03] (S. 21) eingeführten Definition.

Definition 95 (Distributive Ableitung) Es sei $(\mathcal{D}(\Omega))' \ni x : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ eine Distribution. Dann heißt die Distribution $\psi = \partial_d^\alpha x \in (\mathcal{D}(\Omega))'$ mit

$$\psi(\phi) = (-1)^{|\alpha|} x(\partial_d^\alpha \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (\text{B.158})$$

distributive Ableitung (Distributionsableitung) der Ordnung $|\alpha|$ von $x \in (\mathcal{D}(\Omega))'$. \square

Gemäß [AF03] (S. 21) ist $\partial_d^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, immer wenn $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Die Definitionsgleichung der distributiven Ableitung lässt sich ebenfalls mittels eines Dualitätsprodukts entsprechend (B.157) ausdrücken, es gilt

$$(-1)^{|\alpha|} x(\partial_d^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \langle x, \partial_d^\alpha \phi \rangle_{(\mathcal{D}(\Omega))' \times \mathcal{D}(\Omega)}. \quad (\text{B.159})$$

In [AF03] (S. 22) finden sich die Bedingungen, unter denen die distributive Ableitung mit der schwachen Ableitung übereinstimmt. Für $x \in L_{\text{lok}}^1$ wird eine gegebenenfalls existierende Funktion $y \in L_{\text{lok}}^1$ mit $\int_{\Omega} y(\cdot) dv = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} x D^\alpha(\cdot) dv$ in $(\mathcal{D}(\Omega))'$ als schwache oder distributionelle Ableitung von x bezeichnet. In einem derartigen Fall gilt $\partial_d^\alpha x = D^\alpha x = y$ und in Analogie zu den Gleichungen aus Definition 94 folgt aus (95) direkt

$$\int_{\Omega} y \phi dv = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} x D^\alpha \phi dv, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (\text{B.160})$$

Darin bezeichnet $y = D^\alpha x$ die schwache Ableitung von x zum Multiindex α . Für den Fall, dass die abzuleitende Funktion ausreichend oft stetig differenzierbar ist, stimmen die schwache und starke Ableitung ebenfalls überein. Dieser Zusammenhang trifft in der Regel vor allem in Bezug auf die Testfunktionen zu, sodass $\partial_d \phi = \partial \phi$.

In Anlehnung an das Beispiel des trimorphen Biegewandlers wird die distributive Ableitung ψ der Sprungfunktion

$$h(v) = \begin{cases} 0 & \text{für } v < 0 \\ 1 & \text{für } v \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.161})$$

betrachtet. Die Sprungfunktion ist verallgemeinernd als reguläre Distribution zu interpretieren, gemäß der Definition der distributiven Ableitung (Definition 95) gilt mit $|\alpha| = 1$ und $\Omega = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_d h(\phi) &= -\langle h, \partial_d \phi \rangle_{(\mathcal{D}(\Omega))' \times \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &= -\int_0^\infty 1 \partial_d \phi(v) dv = -[\phi(v)]_0^\infty = \phi(0) - \phi(\infty). \end{aligned}$$

Aufgrund ihrer Regularität stimmen für die Testfunktionen $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Ableitungsbegriffe an dieser Stelle überein. Unter Beachtung des kompakten Trägers der Testfunktionen folgt

$$\partial_d h(\phi) = \phi(0) = \delta_0(\phi).$$

Zu jeder Distribution existieren distributive Ableitungen beliebiger Ordnung. Diese Aussage ist insbesondere für die erneute distributive Ableitung der Delta-Distribution hilfreich. Mit $x = \delta_{v_1}$ folgt aus (95)

$$\partial_d^\alpha \delta_{v_1}(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \delta_{v_1}(\partial^\alpha \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (\text{B.162})$$

Demzufolge ist die distributive Ableitung ψ der Ordnung $|\alpha|$ der Delta-Distribution δ_{v_1} eine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial_d^\alpha \phi|_{v_1}, \end{aligned} \quad (\text{B.163})$$

die einer Testfunktion ϕ den Funktionswert ihrer Ableitung an der Stelle v_1 zuordnet.

Bemerkung zur Handhabung der Nomenklatur

Im Verlauf dieser Arbeit wird auf eine strikte Verwendung der Nomenklatur zur Differenzierung zwischen den unterschiedlichen Ableitungsbegriffen weitestgehend verzichtet. Falls eine Fallunterscheidung erforderlich ist, wird explizite auf die Verwendung der schwachen beziehungsweise distributiven Differentiation hingewiesen.

B.10.4 Sobolew-Räume

Für ganzzahlige $1 \leq p \leq \infty$ werden durch

$$\|x\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha x\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha x\|_p, & p = \infty \end{cases} \quad (\text{B.164})$$

lineare Funktionale definiert, die auf den im Folgenden eingeführten Räumen die Eigenschaften einer Norm aufweisen und dann als Sobolew-Normen bezeichnet werden. Die Definition der Sobolew-Räume ist [AF03] (S. 60) entnommen.

Definition 96 (Sobolew-Räume) Für beliebige $m > 0$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt:

SR1) $H^{m,p}(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $\left\{ x \in C^m(\Omega) \mid \|x\|_p^m < \infty \right\}$ unter Berücksichtigung der Sobolew-Norm $\|x\|_{m,p}$;

SR2) $W^{m,p}(\Omega) = \{x \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha x \in L^p(\Omega) \forall 0 \leq |\alpha| < m\}$. Banachraum der p -fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen, deren schwache (oder distributive) Ableitung bis zum Grad m noch immer p -fach Lebesgue-integrierbar ist;

SR3) $W_0^{m,p}(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ im Raum $W^{m,p}(\Omega)$. □

Im Fall von **SR1)** müssen alle Cauchy-Folgen von Elementen aus $C^m(\Omega)$ im Sinne der Sobolew-Norm $\|x\|_p^m$ konvergieren und einen Grenzwert in $H^{m,p}(\Omega)$ besitzen.

Die erstgenannte Interpretation der Sobolew-Räume bietet einen Zugang zur Überführung einer linearen partiellen Differentialgleichung in die Darstellung mittels linearer Operatoren auf Banach- oder Hilberträumen. Die Elemente des vollständigen Raums $H^{m,p}(\Omega)$ sind als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $C_p^m(\Omega)$ bezüglich der entsprechenden Sobolew-Norm interpretierbar. Zudem sind die Räume $H^{m,p}(\Omega)$ als Basis für die Definition der starken Differentiation bezüglich der L^p -Räume anzusehen.

Für die Wahl $p = 2$ wird die Sobolew-Norm durch ein geeignetes Innenprodukt induziert, die $H^{m,2}(\Omega)$ -Räume sind daher Hilberträume. Für diese Hilberträume wird abkürzend die Schreibweise $H^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ genutzt.

Verbindungen zwischen den Definitionen der Sobolew-Räume

Zwischen den Varianten zur Definition der Sobolew-Räume entsprechend Definition 96 existieren verschiedene Beziehungen, eine besonders hilfreicher Zusammenhang wird im Folgenden aufgeführt. Um eine Unterscheidung zwischen den beiden erstgenannten Varianten der Sobolew-Räume in Definition 96 unnötig zu machen, wird der Satz von Meyer und Serrin [MS64] eingeführt, der unabhängig vom betrachteten örtlichen Gebiet Ω und den Glattheitseigenschaften des Randes gilt. Weitere Ausführungen dazu finden sich in [AF03] (S. 67).

Satz 61 (Satz von Meyer und Serrin) Für alle $1 \leq p < \infty$ gilt $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. □

Weitere Zusammenhänge zwischen der zweiten und dritten Variante zur Definition von Sobolew-Räumen gemäß Definition 96 finden sich in [AF03] (S. 183).

Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung

Die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung wird innerhalb dieser Arbeit angewandt, um die Norm der j -ten Ableitung eines Elements eines geeigneten Sobolew-Raums mittels der Norm des Elements selber und der Norm einer höheren Ableitung $m > j$ des Elements abzuschätzen.

Satz 62 Seien q, r natürliche Zahlen mit $1 \leq q, r \leq \infty$ und j, m natürliche Zahlen, die

$$0 \leq j < m \quad (\text{B.165})$$

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-a) \frac{1}{q}, \quad \frac{j}{m} \leq a \leq 1 \quad (\text{B.166})$$

erfüllen, wobei $n - j - \frac{n}{r} < 0$ ist.

Dann existiert eine Konstante $c > 0$ in Abhängigkeit von n, m, j, q, r, a , sodass

$$\|D^j x\|_{L^p(\Omega)} \leq c_1 \|D^m x\|_{L^r(\Omega)}^a \|x\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \quad \forall x \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega). \quad (\text{B.167})$$

□

C Anhang zur Darstellung unendlich-dimensionaler Systeme

Der vorliegende Anhang enthält ergänzende Inhalte zur mathematischen Realisierung unendlich-dimensionaler Systeme aus Kapitel 2. Einleitend wird in Abschnitt C.1 das inhomogene abstrakte Cauchy-Problem als Grundlage für die Zustandsraumdarstellung unendlich-dimensionaler Systeme eingeführt. Daran schließen sich die Definition verschiedener Lösungsbegriffe zu diesem Problem an. Ferner enthält Abschnitt C.1 ausgesuchte hilfreiche Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen und ihrer infinitesimalen Erzeuger. Abschnitt C.2 beinhaltet für Systeme mit diagonalisierbarem Systemoperator die Herleitung von Kriterien für die Beschränktheit von Ein-/Ausgangsoperatoren als Abbildung in den Zustandsraum beziehungsweise vom Zustandsraum in den Ausgangsraum. Darüber hinaus werden in Abschnitt C.2 die Steuer- und Beobachtbarkeitsoperatoren bezüglich eines endlichen und eines unendlichen Zeithorizonts eingeführt.

Abschnitt C.3 enthält zusätzliche Ausführungen zu Pritchard-Salamon-Systemen. In Abschnitt C.4 werden für den Fall eines diagonalisierbaren Systemoperators Kriterien für die Zulässigkeit von Ein-/Ausgangsoperatoren im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse und zur Klassifizierung des dem System zugeordneten Hankel-Operators hergeleitet.

Den Abschluss des vorliegenden Abschnitts bildet die Herleitung der geschlossenen Übertragungsfunktion des Beispielsystems.

C.1 Inhomogenes abstraktes Cauchy-Problem

Die Formulierung des inhomogenen abstrakten Cauchy-Problems und die daran anschließende Definition verschiedener Lösungsbegriffe beruht auf den Ausführungen in [HP57], [Paz83], [CZ95], [EN00] und [EN06].

C.1.1 Problemstellung

Es sei ein Banachraum X , dann wird das durch den Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ sowie die Funktion $f(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ definierte inhomogene Anfangswertproblem der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t)}{\partial t} &= A x(t) + f(t) \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{C.1}$$

mit Anfangswerten $x_0 \in X$ synonym als inhomogenes abstrakte Cauchy-Probleme [EN00] (S. 436), abstrakte Evolutionsgleichung oder abstrakte Differentialgleichung [CZ95] (S. 101) bezeichnet. Die Betrachtungen des inhomogenen abstrakten Cauchy-Problems setzen gemäß [EN00] die

Korrektgestelltheit des unter Annahme von $f(t) = 0, \forall t \geq 0$ zugeordneten homogenen abstrakten Cauchy-Problems voraus. In Abschnitt 2.2.2 findet sich eine kurze Erläuterung hinsichtlich des Begriffs der Korrektgestelltheit des homogenen abstrakten Cauchy-Problems sowie weiterführende Literaturquelle zu diesem Thema. Insbesondere sei in diesem Zusammenhang auf die Diskussion der Prinzipien der Korrektgestelltheit nach Hadamard in [HP57] (S. 617f) hingewiesen. Zudem ist die Knüpfung der Korrektgestelltheit des abstrakten Cauchy-Problems an die Eigenschaften von A zu beachten (Satz 1).

C.1.2 Lösungsbegriffe

Für das durch (C.1) definierte inhomogene abstrakte Cauchy-Probleme existieren in der Literatur unterschiedliche Lösungsbegriffe, die sich beispielsweise hinsichtlich ihrer Regularität voneinander unterscheiden. Bekannte Abstufungen des Lösungsbegriffs sind die starke (klassische), die milde sowie die schwache Lösung. Die im Folgenden eingeführten Definition umfassen die Konzepte der starken und der milden Lösung und orientieren sich dabei an [CZ95] und [Paz83]. Für die Definition der schwachen Lösung und ihren Zusammenhang zur milden Lösung sei auf die Ausführungen in [CZ95] (S. 106ff) (Definition 3.1.6 und Theorem 3.1.7) verwiesen. Weitere detaillierte Herleitungen zu den Lösungsbegriffen finden sich zudem beispielsweise in [HP57] oder [EN00]. Darüber hinaus enthält beispielsweise [Eva98] (S. 7) einige grundsätzliche, dennoch physikalisch motivierte Überlegungen zur Lösung partieller Differentialgleichungen.

Starke (Klassische) Lösung

Für den inhomogenen Anteil von (C.1) wird zunächst die Stetigkeit auf dem zeitlichen Intervall sowie Werte aus X , also $f \in C(\theta, X)$, vorausgesetzt. Die Folgende Definition entspricht Definition 3.1.1 aus [CZ95] (S. 101).

Definition 97 (Starke (Klassische) Lösung) Es sei ein inhomogenes abstraktes Cauchy Problem gemäß (C.1) auf X und $x : \theta \rightarrow X$ eine auf $\theta = [0, t_e]$ definierte Funktion. Falls $x \in C^1(\theta, X)$, $x(t) \in \mathcal{D}(A) \forall t \in \theta$ zudem (C.1) erfüllt, heißt $x(t)$ starke (klassische) Lösung von (C.1) auf θ .

Falls $x(t)$ den Eigenschaften der starken Lösung auf jedem kompakten, durch beliebige Endzeitpunkte $t_e \geq 0$ definierten, Zeitintervall $[0, t_e]$ genügt, ist $x(t)$ starke Lösung von (C.1) auf $[0, \infty)$. \square

Der Begriff der starken Lösung erlaubt also stetige inhomogene Terme und beinhaltet einen nicht nur stetigen sondern auch stetig differenzierbaren zeitlichen Verlauf der Lösung. Zu jedem diskreten Zeitpunkt aus θ ist die klassische Lösung ein Element von $\mathcal{D}(A) \subset X$. Der durch Definition 97 gegebene Begriff der starken Lösung beinhaltet unmittelbar keine Aussage über die Korrektgestelltheit des zugrunde liegenden Cauchy-Problems. Unter Berücksichtigung von Satz 1 ist dazu zusätz-

lich erforderlich, dass A der infinitesimale Erzeuger eine stark stetigen Halbgruppe $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X ist. In einem derartigen Fall ergibt sich entsprechend Lemma 3.1.2 und Theorem 3.1.3 aus [CZ95] (S. 102f) und unter den Annahmen aus Definition 97, $f \in C(\theta, X)$ sowie $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ die Existenz und Eindeutigkeit einer starken Lösung $x(t)$ von (C.1) auf θ , wobei der Verlauf von $x(t)$ durch

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{\theta} \Phi(t - \tau) f(\tau) \, d\tau \quad (\text{C.2})$$

gegeben ist. Weitere Sätze, die Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen des inhomogenen abstrakten Cauchy-Problems treffen, finden sich in [Paz83] (S. 105ff).

Milde Lösung

In der Regelungstechnik gebräuchliche Testsignale, wie beispielsweise sprungförmige Eingangssignale, genügen nicht den Annahmen bezüglich des inhomogenen Terms des inhomogenen abstrakten Cauchy-Problems, wie sie zur Definition der starken Lösung von (C.1) getroffen werden. Da der Begriff der starken Lösung zu (C.1) für derartige Signale nicht definiert ist, ist eine Generalisierung des Lösungsbegriffs erforderlich.

Eine erste Verallgemeinerung des Lösungsbegriff erfolgt durch das Zulassen eines allgemeineren inhomogenen Terms, also im regelungstechnischen Kontext allgemeinerer Eingangssignale. Die Regularität der Lösung wird zudem durch den Verzicht auf die Forderung nach stetiger Differenzierbarkeit verringert und darüber hinaus sind Anfangsbedingungen in X statt lediglich in $\mathcal{D}(A)$ zulässig. Definitionen zur milden Lösungen finden sich beispielsweise in [Paz83] (S. 106) oder [CZ95] (S. 104), wobei die folgende Definition der letztgenannten Quelle entspricht.

Definition 98 (Milde Lösung) Es sei ein inhomogenes abstraktes Cauchy Problem gemäß (C.1) auf X und $x : \theta \rightarrow X$ eine auf $\theta = [0, t_e]$ definierte Funktion. Ferner sei $f \in L^p(\theta, X)$, $p \geq 1$ und $x_0 \in X$. Dann wird eine Funktion $x(t) \in C(\theta, X)$ gegeben durch (C.2) als milde Lösung (C.1) auf θ bezeichnet. □

Die Stetigkeit der milden Lösung ergibt sich unter den in Definition 98 getroffenen Annahmen aus [CZ95] (S. 104) (Lemma 3.1.5). Im Vergleich zu der Definition der milden Lösung in [Paz83] werden in [CZ95] mittels $p \geq 1$ Eingangssignale aus X mit p -facher Lebesgue-Integrierbarkeit über dem Zeitintervall zugelassen. Wobei $f(t) \in L^p(\theta, X)$, $p \geq 1$ für alle p auch $f(t) \in L^1(\theta, X)$ einschließt. Falls A der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf X ist, entspricht Definition 98 mit $p = 1$ der Definition der milden Lösung aus [Paz83] (S. 106) (Definition 2.3). In einem derartigen Fall ist die milde Lösung per Definition existent und eindeutig ([Paz83] (S. 106)). Weitere ausführliche Betrachtungen bezüglich der milden Lösung, insbesondere unter welchen zusätzlichen Forderungen die milde Lösung mit der klassischen Lösung übereinstimmt, finden sich

in [Paz83]. Spezielle Betrachtungen der milden Lösungen für den Fall, dass A der infinitesimale Erzeuger einer analytischen Halbgruppe ist, werden in [Paz83] (S. 110ff) angestellt.

C.1.3 Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen und ihrer Erzeuger

Ausgehend von den in Abschnitt 2.2.2 genannten Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen lassen sich u.a. die folgenden Zusammenhänge für den zugehörigen infinitesimalen Erzeuger A herleiten ([DS58] (S. 619ff), [DL92] (S. 316), [EN00] (S. 50), [CZ95] (S. 21)). Weitere Eigenschaften sind in den genannten Literaturstellen zu finden.

Satz 63 Für eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ sowie ihren infinitesimalen Erzeuger A mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ gelten die folgenden Aussagen:

$$\textbf{SHG1)} \quad \mathcal{X} \ni x \mapsto \int_0^t \Phi(s) x \, ds \in \mathcal{D}(A);$$

$$\textbf{SHG2)} \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(s) x \, ds = x, \forall x \in \mathcal{X};$$

$$\textbf{SHG3)} \quad \Phi(t)x - x = A \int_0^t \Phi(s) x \, ds, \forall x \in \mathcal{X} \text{ und}$$

$$\Phi(t)x - x = A \int_0^t \Phi(s) x \, ds = \int_0^t \Phi(s) A x \, ds, \forall x \in \mathcal{D}(A);$$

$$\textbf{SHG4)} \quad \frac{d\Phi(t)x}{dt} = A \Phi(t)x = \Phi(t) A x;$$

$$\textbf{SHG5)} \quad \text{Für } x \in \mathcal{D}(A) \text{ gilt } \Phi(t)x \in \mathcal{D}(A), \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0};$$

□

Die zeitliche Integration der Zustandstrajektorie in **SHG1)** kann anschaulich als Glättung verstanden werden, deren Bild, ausgehend von einem Urbild $x \in \mathcal{X}$, stets im Definitionsbereich des infinitesimalen Erzeugers liegt. **SHG2)** folgt aus der Kombination von **SHG1)** mit der starken Stetigkeit der Halbgruppe $\lim_{t \rightarrow 0+} \Phi(t)x = x$ für $x \in \mathcal{X}$. Aus **SHG3)** lässt sich entnehmen, dass die Anwendung des infinitesimalen Erzeugers mit der Integralbildung und der Anwendung der stark stetigen Halbgruppe kommutiert, falls x bereits im Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}$ von A ist. **SHG4)** besagt, dass die zeitliche Ableitung der Abbildung $t \mapsto \Phi(t)x$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $x \in \mathcal{D}(A)$ der Anwendung des infinitesimalen Erzeugers auf die Halbgruppe entspricht, wobei die Operation kommutiert. **SHG5)** zeigt die Invarianz von $\mathcal{D}(A)$ gegenüber der Abbildung an der Halbgruppe $\Phi(t)x$, $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Demnach verweilt jede Zustandstrajektorie eines ungezwungenen Systems für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ im Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$, falls sie dort gestartet ist.

C.2 Betrachtungen zur Zustandsraumdarstellung unendlich-dimensionaler Systeme

Dieser Abschnitt beinhaltet verschiedene Betrachtungen und Definitionen im Zusammenhang mit der allgemeinen Zustandsraumdarstellung unendlich-dimensionaler Systeme.

C.2.1 Beschränktheit von Eingangsoperatoren

Die folgenden Betrachtungen dienen der Einführung eines Kriteriums zur Überprüfung der Beschränktheit eines Eingangsoperators $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}, u \mapsto Bu$ als Abbildung in den Zustandsraum. Aus den äquivalenten Aussagen bezüglich der Stetigkeit eines linearen Operators (Satz 18) folgt für den Nachweis der Stetigkeit des Eingangsoperators bezüglich des Zustandsraums, dass eine positive Konstante c existieren muss, sodass die Bedingung

$$\|Bu\|_{\mathcal{X}} \leq c \|u\|_{\mathcal{U}} \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad (\text{C.3})$$

erfüllt wird. Eine zu (C.3) äquivalente Bedingung kann zudem mittels jeder zur Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ äquivalenten Norm gleichwertig formuliert werden. Unter der Annahme einer zu $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ äquivalenten Norm $\|\cdot\|_1$ existieren positive Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass

$$c_1 \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_{\mathcal{X}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{c_2} \|x\|_1 \leq \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{c_1} \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (\text{C.4})$$

gilt. Die Stetigkeit des Eingangsoperators lässt sich damit äquivalent zu (C.3) auch auf Basis von

$$c_1 \|Bu\|_{\mathcal{X}} \leq \|Bu\|_1 \leq c \|u\|_{\mathcal{U}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{c_2} \|Bu\|_1 \leq \|Bu\|_{\mathcal{X}} \leq c \|u\|_{\mathcal{U}} \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad (\text{C.5})$$

nachweisen.

Mit dem Hauptziel ein einfach zu überprüfendes Kriterium für die Beschränktheit des Eingangsoperators des Beispielsystems zu formulieren, fokussieren sich die Betrachtungen im Folgenden auf Fälle, in denen der Systemoperator diagonalisierbar ist und seine Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ damit eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden. Dazu wird eine zur Norm des Zustandsraum äquivalente Norm, definiert in Anhang B.5.3, angenommen. Es sei $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Orthonormalbasis des Zustandsraums und $T \in \mathcal{L}(X)$ bijektiv und damit beschränkt invertierbar (Korollar IV.3.4, [Wer11] (S. 155)). Die unter Verwendung der Transformationsvorschrift (B.40) gewonnenen Folgen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bilden eine Rieszbasis von \mathcal{X} beziehungsweise die zu der Rieszbasis biorthogonale Menge. Zu der Norm auf \mathcal{X} wird durch (B.45) eine äquivalente Norm definiert, sodass (B.47) gilt. Die Darstellung der Elemente des Zustandsraums in der Rieszbasis lautet $x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}} v_i$, zusammen mit (B.40) gilt

$$\begin{aligned} \|x\|_1^2 &= \langle x, x \rangle_1 = \langle T^{-1}x, T^{-1}x \rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle x, w_i \rangle_{\mathcal{X}}|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |x_i^*|^2 \quad \forall x \in X. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Anstelle der Betrachtung einer äquivalenten Norm kann der Zustandsraum auch gleichwertig mittels der durch das Innenprodukt aus (C.64) induzierten Norm (C.63) ausgestattet werden. Damit entspricht \mathcal{X} dann $\mathcal{H}_{\alpha, \alpha} = 0$ aus (C.66).

Unter Verwendung der Substitution $x = B u$ lautet das Quadrat der linken Seite der eingangs formulierten Gleichung bezüglich der Stetigkeit (C.3) in der neu eingeführten Norm formal

$$\|B u\|_1^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}}|^2. \quad (\text{C.7})$$

Die rechte Seite der voranstehenden Gleichung basiert auf der Reihendarstellung des Eingangsoperators aus Abschnitt 2.1.3, dabei ist die auftretende Reihe als Grenzwertbildung aufzufassen. Eine Abschätzung mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung führt im Allgemeinen auf

$$\|B u\|_1^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \|b_i^*\|_{\mathcal{U}}^2 \|u\|_{\mathcal{U}}^2. \quad (\text{C.8})$$

Aus dem Umschreiben unter Berücksichtigung eines endlich-dimensionalen Eingangsraums $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ ergibt sich mit $\|b_i^*\|_{\mathcal{U}}^2 = \langle b_i^*, b_i^* \rangle_{\mathcal{U}} = |b_i^*|^2$ die Ungleichung

$$\|B u\|_1^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |b_i^*|^2 \|u\|_{\mathcal{U}}^2. \quad (\text{C.9})$$

Die Annahme von $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$, mit l^2 gemäß (B.137), und damit

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} |b_i^*|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{I}^{N+}} |b_i^*|^2 < \infty \quad (\text{C.10})$$

garantiert die Einhaltung von Gleichung (C.3) mit einer festen Konstanten für alle $u \in \mathcal{U}$. Damit ist $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ beziehungsweise äquivalent die Ungleichung (C.10) eine hinreichende Bedingung für die Beschränktheit eines Eingangsoperators.

Für den Spezialfall eines einzelnen skalaren Eingangs $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ ergibt sich aus Gleichung (C.7) aufgrund von $|\langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}}|^2 = |b_i^* u|^2 = |b_i^*|^2 |u|^2$ die Gleichung

$$\|B u\|_1^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |b_i^*|^2 |u|^2. \quad (\text{C.11})$$

Damit folgt aus $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \notin l^2$, dass B nicht beschränkt ist. In einem derartigen Fall ist $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ notwendig und hinreichend für die Beschränktheit von B in der angenommenen und zu der angenommenen Norm äquivalenten Normen. Letztere Aussage basiert auf der Verwendung von Ungleichung (C.5).

Ein Eingangsoperator als Abbildung $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ ist also dann beschränkt, falls seine Fourier-Koeffizienten bezüglich einer, zu einer Orthonormalbasis zumindest äquivalenten Basis, quadratisch summierbar sind. Äquivalent zu $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ ist die Gültigkeit der Ungleichung (C.10). Die Summierbarkeitsbedingung schließt ein endliches Supremum der Entwicklungskoeffizienten ein. Für die Anwendung des eingeführten Kriteriums ist lediglich die Kenntnis der $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ erforderlich.

C.2.2 Beschränktheit von Ausgangsoperatoren

Die Betrachtungen zur Beschränktheit des Ausgangsoperators C eines Systems $\Sigma(A, B, C, D)$ beruhen auf einer Untersuchung des Eingangsoperators C' des dualen Systems $\Sigma(A', C', B', D')$. Ein für das duale System $\Sigma(A', C', B', D')$ beschränkter Eingangsoperator C' entspricht einem im ursprünglichen System $\Sigma(A, B, C, D)$ beschränkten Ausgangsoperator C . Im Folgenden wird der Zustandsraum \mathcal{X} als Hilbertraum angenommen und mit seinem Dualraum \mathcal{X}' identifiziert, sodass $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$. Bei dem Ausgangsraum \mathcal{Y} handelt es sich aufgrund von $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ ebenfalls um einen Hilbertraum, der gleichsam mit seinem Dualraum identifiziert wird $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'$. Gemäß der Ausführungen aus Abschnitt B.6.1 stimmen unter diesen Voraussetzungen der zu dem Ausgangsoperator $C : \mathcal{D}(C) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ duale Operator $C' : \mathcal{D}(C') \subset \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X}'$ und der zugehörige adjungierte Ausgangsoperator $C^* : \mathcal{D}(C^*) \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ überein.

Die Betrachtungen zur Beschränktheit des Ausgangsoperators auf Basis des dualen Systems lassen sich damit anhand des adjungierten Ausgangsoperators durchführen. Im Folgenden sei dazu $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{X} und T ein linearer Operator mit den in Abschnitt B.5.3 definierten Eigenschaften, sodass die Zusammenhänge aus (B.40) gelten. Dabei ist $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+} = \{Tu_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Rieszbasis von \mathcal{X} und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}^+} = \{(T^*)^{-1}u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ die zugehörige biorthogonale Menge. Damit besitzen alle $x = TT^{-1}x \in \mathcal{X}$ eine Darstellung $TT^{-1}x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle u_i$. Die Bestimmung des adjungierten Ausgangsoperators erfolgt formal unter Verwendung der Definition des adjungierten Operators (Definition 70) durch den Zusammenhang $\langle Cx, y \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle x, C^*y \rangle_{\mathcal{X}}$, wobei $y \in \mathcal{D}(C^*) \subset \mathcal{Y}$. Unter Verwendung der Darstellung aller $x \in \mathcal{X}$ folgt aus der rechten Seite der letztgenannten Gleichung

$$\begin{aligned} \langle x, C^*y \rangle_{\mathcal{X}} &= \left\langle \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle_{\mathcal{X}} u_i, \sum_{j \in \mathbb{I}^+} \langle C^*y, u_j \rangle_{\mathcal{X}} u_j \right\rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \left\langle \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle_{\mathcal{X}} u_i, \sum_{j \in \mathbb{I}^+} \langle y, Cu_j \rangle_{\mathcal{Y}} u_j \right\rangle_{\mathcal{X}} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle_{\mathcal{X}} \overline{\langle y, Cu_i \rangle_{\mathcal{Y}}} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle_{\mathcal{X}} (Cu_i)^T \bar{y} \\ &= \langle Cx, y \rangle_{\mathcal{Y}} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Aus Gleichung (C.12) lässt sich der adjungierte Ausgangsoperator entnehmen, die Anwendung von $x = T^{-1}Tx$ führt auf

$$\begin{aligned} C^*(\cdot) &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle \cdot, Cu_i \rangle_{\mathcal{Y}} u_i \\ &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle \cdot, Cw_i \rangle_{\mathcal{Y}} v_i. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Die Stetigkeit von $C^* : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, y \mapsto C^*y$ ergibt sich aus der Existenz einer positiven Konstanten c , mit der $\|C^*y\|_{\mathcal{X}} \leq c \|y\|_{\mathcal{Y}}$ für alle $y \in \mathcal{Y}$ gilt. Wobei die voranstehende Ungleichung auch

gleichwertig unter Verwendung jeder zu $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ äquivalenten Norm formuliert werden kann. Auf Basis von (C.14) führt die Verwendung der zur Norm des Zustandsraums äquivalenten Norm aus (C.6) auf

$$\|C^*y\|_1 = \langle T^{-1}C^*y, T^{-1}C^*y \rangle_{\mathcal{X}} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle y, Cw_i \rangle_{\mathcal{Y}} u_i, \sum_{j \in \mathbb{I}^+} \langle y, Cw_j \rangle_{\mathcal{Y}} u_j \right\rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |\langle y, Cw_i \rangle_{\mathcal{Y}}|^2 \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \|Cw_i\|_{\mathcal{Y}} \|y\|_{\mathcal{Y}}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Unter Annahme von $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ und $c_i^* = \left(C_1 w_i, \dots, C_q w_i\right)^T$ gilt zudem $\|c_i^*\|_{\mathcal{Y}} = |c_i^*|^2$ und $\|y\|_{\mathcal{Y}} = |y|^2$. Für $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ ist C^* also beschränkt, falls

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} |c_i^*|^2 < \infty. \quad (\text{C.17})$$

Für den Spezialfall einer skalaren Ausgangsgröße $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ wird die Ungleichung (C.16) zu einer Gleichung und die Bedingung (C.17) ist notwendig und hinreichend für die Beschränktheit von C^* . Da ein im dualen System beschränkter Eingangsoperator einem im ursprünglichen System beschränkten Ausgangsoperator entspricht, ist (C.17) für $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ hinreichende Bedingung für $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und im Fall von $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ ist (C.17) notwendige und hinreichende Bedingung für $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

C.2.3 Steuer-/Beobachtbarkeitsoperatoren

Ausgehend von der Zeitbereichslösung der innerhalb dieser Arbeit berücksichtigten dynamischen Systeme wird die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{t_1} : L^2([0, t_1], \mathcal{U}) &\rightarrow \mathcal{V} \\ u &\mapsto \int_0^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) B u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

als Steuerbarkeitsabbildung oder Steuerbarkeitsoperator bezüglich eines endlichen Zeithorizonts bezeichnet ([Cur+94] (S. 10)). Eine analoge Definition kann für $u \in L^2([0, \infty), \mathcal{U})$ bzw. $u \in L^2_{\text{lok}}([0, \infty), \mathcal{U})$ erfolgen. Falls einem System eine exponentiell stabile stark stetige Halbgruppe zugeordnet ist, wird der Steuerbarkeitsoperator bezüglich eines unendlichen Zeithorizonts durch

$$\mathcal{B}_{\infty} u = \int_0^{\infty} \Phi(\tau) B u(\tau) d\tau \quad (\text{C.19})$$

definiert ([JP06]).

Die Definition des Beobachtbarkeitsoperators bezüglich eines endlichen Zeithorizonts beruht auf dem Ein-/Ausgangsverhalten dynamischer Systeme im Zeitbereich. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{t_1} : \mathcal{W} &\rightarrow L^2([0, t_1], \mathcal{V}) \\ x &\mapsto C\Phi(\cdot)x \quad \forall t \in [0, t_1] \quad \forall x \in \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Im Falle exponentiell stabiler stark stetiger Halbgruppen ist der Beobachtbarkeitsoperator bezüglich eines unendlichen Zeithorizonts ferner durch

$$\mathcal{C}_\infty x = C\Phi(\cdot)x \quad \forall x \in \mathcal{W} \quad (\text{C.21})$$

gegeben.

C.3 Anhang zur Pritchard-Salamon-Klasse

Dieser Abschnitt beinhaltet ausgesuchte Betrachtungen zu Pritchard-Salamon-Systemen. Die Ausführungen verdeutlichen dabei an verschiedenen Stellen die Analogien zwischen dieser Systemklasse und endlich-dimensionalen Systemen. Einleitend werden verschiedene Eigenschaften der Steuer-/Beobachtbarkeitsoperatoren dieser Systemklasse aufgeführt. Daran schließt sich eine Betrachtung zur Dualität im Falle derartiger Systeme an. Ferner werden die Impulsantwort, Steuer- und Beobachtbarkeits-Gravsschen sowie Hankel-Operatoren von Pritchard-Salamon-Systemen eingeführt. Im Hinblick auf verschiedene weiterführende systemtheoretische Konzepte werden nachfolgend für Pritchard-Salamon-Systeme die exponentielle Stabilisierbarkeit und exponentielle Detektierbarkeit definiert. Anschließend wird die kopprime Faktorisierung für die betrachtete Systemklasse vorgestellt, diese Ausführungen sind insbesondere im Hinblick auf die Verwendung der Gap-Metrik als Abstandsmaß von Bedeutung.

C.3.1 Ausgesuchte Aussagen über Steuer-/ und Beobachtbarkeitsoperatoren

Die allgemeine Definition der Steuer-/Beobachtbarkeitsoperatoren wird in Abschnitt C.2.3 eingeführt. Bezüglich der Steuerbarkeitsoperatoren von Pritchard-Salamon-Systemen sind aus [PS87b], [Cur85], [Cur+94] sowie [Sas01; Sas02] die Folgenden Aussagen bekannt:

B1) Unter Annahme eines zulässigen Eingangsoperator (Definition 8) ist die Abbildung

$$u \mapsto \int_0^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) B u(\tau) d\tau$$

für alle $u(t) \in L^2([0, t_1], \mathcal{U})$ stetig auf dem Zeitintervall $[0, t_1]$;

B2) Für zulässige Eingangsoperatoren (Definition 8, 70) gilt $\mathcal{R}(\mathcal{B}_{t_1}) \subset \mathcal{W}$ sowie

$$\mathcal{B}_{t_1} \in \mathcal{L}(L^2([0, t_1], \mathcal{U}), \mathcal{W});$$

- B3)** Falls der Steuerbarkeitsoperator für einen beliebigen Zeitpunkt t_1 eine beschränkte Abbildung gemäß (2.117) von den Eingangssignalen $u(t) \in L^2([0, t_1], \mathcal{U})$ in den Raum \mathcal{W} darstellt, dann ist er für alle $t_1 > 0$ eine solche beschränkte Abbildung;
- B4)** Im Allgemeinen hängt in (2.117) die Konstante c_1 vom gewählten Zeitpunkt t_1 und damit von der Größe des betrachteten Zeitintervalls ab. Lediglich wenn $\Phi(t)$ exponentiell stabil auf dem kleinen Raum \mathcal{W} ist, hängt c_1 nicht von t_1 ab. Darüber hinaus gilt (2.117) dann für Eingangssignale auf einem unendlich ausgedehnten Zeitintervall $u(t) \in L^2([0, \infty), \mathcal{U})$;
- B5)** Unter der Annahme einer exponentiell stabilen stark stetigen Halbgruppe und eines im Sinne von Definition 8 dazu zulässigen Ausgangsoperators gilt für den Steuerbarkeitsoperator bezüglich eines unendlichen Zeithorizonts $\mathcal{B}_\infty \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), \mathcal{U}), \mathcal{W})$.

Bezüglich eines Ausgangsoperators gelten gemäß [PS87b], [Cur+94] sowie [Sas01] die folgenden Aussagen:

- C1)** Die Stetigkeit des Beobachtbarkeitsoperators als Abbildung in die über dem Zeitintervall quadratisch Lebesgue-integrierbaren \mathcal{Y} -wertigen Signale entscheidet über die Zulässigkeit eines Ausgangsoperators, d.h. ein Ausgangsoperator ist zulässig falls

$$\mathcal{C}_{t_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, L^2([0, t_1], \mathcal{Y})). \quad (\text{C.22})$$

Dabei gilt es zu beachten, dass die Stetigkeit des Beobachtbarkeitsoperators auf Basis der Norm von \mathcal{V} unter der Annahme von $x \in \mathcal{W}$ betrachtet wird;

- C2)** Für einen beschränkten Beobachtbarkeitsoperator existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung (B.4.1) zu einem ebenfalls beschränkten Operator $\mathcal{C}_{t_1}^\mathcal{V} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, L^2([0, t_1], \mathcal{Y}))$;
- C3)** Die Aussage **B3)** gilt in analoger Form für (2.118);
- C4)** Die Aussage **B4)** gilt in analoger Form für (2.118);
- C5)** Unter der Annahme einer exponentiell stabilen stark stetigen Halbgruppe und eines im Sinne von Definition 8 dazu zulässigen Ausgangsoperators gilt für den durch (C.21) für alle $x \in \mathcal{W}$ definierten Beobachtbarkeitsoperator bezüglich eines unendlichen Zeithorizonts $\mathcal{C}_\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, L^2([0, \infty), \mathcal{Y}))$.

C.3.2 Dualität im Falle von Pritchard-Salamon-Systemen

Der folgende Abschnitt beinhaltet die Formulierung eines zu einem Pritchard-Salamon-System dualen Systems und bietet damit eine Verallgemeinerung der aus der endlich-dimensionalen Systemtheorie bekannten Dualitäts-Konzepte auf die Pritchard-Salamon-Klasse. Die an dieser Stelle gezeigten Dualitätseigenschaften der Pritchard-Salamon-Klasse entsprechen im Wesentlichen den Ergebnissen aus [PS87b], weitere Betrachtungen zur Dualität finden sich beispielsweise in [PW78]

oder [Cur86]. Für die folgenden Überlegungen werden eine Raumskala entsprechend (2.110) sowie komplexe Hilberträume bezüglich der Ein- und Ausgangssignale gemäß (2.105) vorausgesetzt. Ferner sei $\Sigma(A, B, C, D)$ ein Pritchard-Salamon-System, dass Definition 7 folgend in Zustandsraumdarstellung durch (2.102) sowie (2.108) repräsentiert wird.

Zur Bestimmung des zu $\Sigma(A, B, C, D)$ dualen Systems werden neben dem Pivotraum der Raumskala auch die Räume der Ein- und Ausgangssignale mit ihren jeweiligen Dualräumen identifiziert, im Sinne der Ausführungen in Anhang B.5.4 gilt

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}', \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}', \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}'. \quad (\text{C.23})$$

Unter Verwendung der Dualräume aller verbleibenden Hilberträume der ursprünglichen Raumskala (2.110) lautet die dem dualen System zugrunde liegende Raumskala

$$\mathcal{V}' \xrightarrow[\text{d}]{\hookrightarrow} \mathcal{X} = \mathcal{X}' \xrightarrow[\text{d}]{\hookrightarrow} \mathcal{W}'. \quad (\text{C.24})$$

Für den dualen Systemoperator gilt

$$\langle Ax, x' \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}'} = \langle x, A'x' \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}'} = A'x'(x). \quad (\text{C.25})$$

Der Zusammenhang zwischen dem adjungierten Systemoperator A^* und dem dualen Systemoperator A' wird durch (B.67) beschrieben. Zudem gilt unter den in Anhang B.6.1 angenommenen Voraussetzungen $A' = A^*$. Für die verbleibenden Operatoren des dualen Systems gilt $C' \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{W}')$, $B' \in \mathcal{L}(\mathcal{V}', \mathcal{U})$ und $D' \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{U})$.

Bei dem resultierenden dualen System $\Sigma(A', C', B', D')$ handelt es sich ebenfalls um ein Pritchard-Salamon-System, aus dessen Definition sich die Analogien zur Dualität im Endlich-dimensionalen unmittelbar ableiten lassen.

Duale Steuer- und Beobachtbarkeitsoperatoren

Unter der Annahme von $x \in \mathcal{V}'$ sowie eines zu einem exponentiell stabilen Pritchard-Salamon-System zulässigen Eingangsooperators gilt $\mathcal{B}_\infty \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), \mathcal{U}), \mathcal{W})$ und demnach ohne explizite Nennung der stetigen Einbettungen

$$\langle \mathcal{B}_\infty u, x \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} = \langle x, \mathcal{B}_\infty u \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \mathcal{B}_\infty u, x \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}'}. \quad (\text{C.26})$$

Ausgehend von dem Innenprodukt auf dem Zustandsraum und der Vertauschbarkeit einiger auftretenden Operationen gilt formal

$$\langle x, \mathcal{B}_\infty u \rangle_{\mathcal{X}} = \int_0^\infty \langle x, \Phi(t) B u(t) \rangle_{\mathcal{X}} dt \quad (\text{C.27})$$

$$= \int_0^\infty \langle \Phi(t) B u(t), x \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}'} dt. \quad (\text{C.28})$$

Das Ausnutzen der Definition dualer Operatoren führt auf

$$\int_0^\infty \langle \Phi(t)Bu(t), x \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}'} dt = \int_0^\infty \langle u, B'\Phi'(t)x \rangle_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}'} dt \quad (\text{C.29})$$

$$= \int_0^\infty \langle B'\Phi'(t)x, u(t) \rangle_{\mathcal{U}} dt. \quad (\text{C.30})$$

Aus der Definition des Innenprodukts auf $L^2([0, \infty), \mathcal{U})$ ergibt sich zusammen mit (C.26) letztendlich

$$\langle \mathcal{B}_\infty u, x \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} = \langle x, \mathcal{B}_\infty u \rangle_X = \langle B'\Phi'(\cdot)x, u \rangle_{L^2([0, \infty), \mathcal{U})} \quad (\text{C.31})$$

für $x \in \mathcal{V}'$ sowie $u \in L^2([0, \infty), \mathcal{U})$ und damit eine Analogie für den Fall exponentiell stabiler Pritchard-Salamon-Systeme zu dem aus [PS87b] (S. 123) bekannten Resultat. Unter der Annahme $L^2([0, \infty), \mathcal{U})' = L^2([0, \infty), \mathcal{U}')$ und $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ gilt für den dualen Steuerbarkeitsoperator $\mathcal{B}_\infty' \in \mathcal{L}(\mathcal{W}', L^2([0, \infty), \mathcal{U}))$, siehe [PS87b] (S. 123) oder [CS01].

Unter Ausnutzung der Dualität lässt sich der duale Beobachtbarkeitsoperator bestimmen, es gilt $\mathcal{C}_\infty' \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), \mathcal{Y}), \mathcal{V}')$ mit

$$\mathcal{C}_\infty' y = \int_0^\infty \Phi'(\tau) C' y(\tau) d\tau, \quad \forall y(\cdot) \in L^2([0, \infty), \mathcal{Y}). \quad (\text{C.32})$$

Duale Formulierung der Zulässigkeit

Die Verwendung des dualen Systems erlaubt eine zu Definition 8 äquivalente Formulierung der Zulässigkeit von Ein-/Ausgangsoperatoren ([PS87b] (S. 123)). Die zu (2.117) duale Formulierung für die Zulässigkeit eines Eingangsoperators lautet entsprechend [PS87b]

$$\|B'\Phi'(t_1 - \cdot)x\|_{L^2([0, t_1], \mathcal{U})} \leq c_3 \|x\|_{\mathcal{V}'}, \quad x \in \mathcal{V}'. \quad (\text{C.33})$$

Bezogen auf das duale System lautet die zu (2.118) äquivalente Bedingung für die Zulässigkeit eines Ausgangsoperators

$$\left\| \int_0^{t_1} \Phi'(\tau) C' y(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{V}'} \leq c_4 \|y\|_{L^2([0, t_1], \mathcal{Y})} \quad \forall y \in L^2([0, t_1], \mathcal{Y}). \quad (\text{C.34})$$

C.3.3 Impulsantwort von Pritchard-Salamon-Systemen

Gemäß den Ausführungen aus [Cur+94] wird für Pritchard-Salamon-Systeme mit endlich-dimensionalem Eingangsraum $\dim \mathcal{U} = p < \infty$ der Ausdruck

$$g(\cdot) = C\Phi(\cdot)B \quad (\text{C.35})$$

als Impulsantwort, im Sinne von Definition 3.4 ([Cur+94] (S. 17)), interpretiert. Formal weisen Pritchard-Salamon-Systeme damit eine Impulsantwort auf, wie sie auch aus dem Endlich-dimensionalen bekannt ist. Für die vorausgesetzten Systeme stimmt die Laplace-Transformation der Impulsantwort hinsichtlich einer rechten Halbebene mit der Übertragungsfunktion überein. Der folgende Satz entspricht dem in [Cur+94] (S. 15) aufgeführten und bewiesenen Corollary 3.6.

Satz 64 *Es sei ein Pritchard-Salamon-System gemäß Definition 7 mit $\dim \mathcal{U} = p < \infty$. Dann gilt*

$$\textbf{PSE1)} \quad C \int_0^t \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau = \int_0^t C \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau, \forall u \in L_{lok}^2([0, \infty); \mathcal{U}), t \geq 0.$$

$$\textbf{PSE2)} \quad \mathcal{L}(g(\cdot))(s) = C(sI - A^\nu)^{-1} B \quad \forall s \in \mathbb{C}_{\max(\omega_0^{\mathcal{W}}, \omega_0^{\mathcal{V}})}.$$

□

Die Gültigkeit von **PSE1)** aus Satz 64 wird, als Generalisierung der Aussagen aus [PS87b], in [Cur+94] (S. 15) (Theorem 3.3) für alle Pritchard-Salamon-Systeme festgestellt.

C.3.4 Steuer- und Beobachtbarkeits-Gramsche von Pritchard-Salamon-Systemen

Für exponentiell stabile Pritchard-Salamon-Systeme werden die Steuerbarkeits-Gramsche und die Beobachtbarkeits-Gramsche analog zum Fall endlich-dimensionaler Systeme gebildet. Für die Steuerbarkeits-Gramsche

$$\mathcal{W}_C = \mathcal{B}_\infty \mathcal{B}_\infty' \tag{C.36}$$

$$= \int_0^\infty \Phi(t) B B' \Phi'(t) dt \tag{C.37}$$

gilt aufgrund von $\mathcal{B}_\infty \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), \mathcal{U}), \mathcal{W})$ und $\mathcal{B}_\infty' \in \mathcal{L}(\mathcal{W}', L^2([0, \infty), \mathcal{U}))$ direkt $\mathcal{W}_C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}', \mathcal{W})$. Gleichsam folgt für die durch

$$\mathcal{W}_C = \mathcal{C}_\infty' \mathcal{C}_\infty \tag{C.38}$$

$$= \int_0^\infty \Phi'(t) C' C \Phi(t) dt \tag{C.39}$$

gegebene Beobachtbarkeits-Gramsche $\mathcal{W}_C \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$.

C.3.5 Hankel-Operatoren von Pritchard-Salamon-Systemen

Analog zur Definition der Hankel-Operatoren von Halbgruppen-Regelsystemen mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren aus Abschnitt 2.1.2 werden im folgenden Hankel-Operatoren für Pritchard-Salamon-Systeme mit Ein- und Ausgangsräumen endlicher Dimension gemäß (2.105) eingeführt. Die aufgeführte Definition orientiert sich an den Ausführungen in [SC00] (S. 1).

Definition 99 (Hankel-Operatoren von Pritchard-Salamon-Systemen) Es sei ein Pritchard-Salamon-System mit $\dim \mathcal{U} = p < \infty$ und $\dim \mathcal{Y} = q < \infty$, dann besitzt ein derartiges System eine Impulsantwort gemäß (C.35) und $\Gamma : L^2([0, \infty), \mathcal{U}) \rightarrow L^2([0, \infty), \mathcal{Y})$ mit

$$(\Gamma u)(t) = \int_0^\infty g(t + \tau) u(\tau) \, d\tau, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{C.40})$$

wird als Hankel-Operator des Systems bezeichnet. \square

Gleichung (C.40) verdeutlicht, dass es sich bei dem Hankel-Operator um einen Integraloperator handelt, dessen Kern auf der Impulsantwort $g(t + \tau) = C\Phi(t + \tau)B$ des zugehörigen Pritchard-Salamon-Systems beruht. Die Impulsantwort ist in diesem Zusammenhang als Abbildung der Form

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{C}^{q \times p} \\ (t, \tau) &\mapsto g(t + \tau) = C\Phi(t + \tau)B \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

aufzufassen. Eine anschauliche Interpretation des Hankel-Operators wird durch eine beispielsweise in [Sas02] (S. 7) gezeigte Überführung der hier aufgeführten Definition in die endlich-dimensionalen Systemen zugeordnete Definition des Hankel-Operators aus [ZDG95] (S. 170) ersichtlich.

Ausschließlich auf der negativen Zeitachse definierte Eingangssignale $u^- \in L^2((-\infty, 0], \mathcal{U})$ lassen sich durch eine Spiegelung an einer Achse, die orthogonal zur Zeitachse durch den Zeitpunkt $t = 0$ verläuft, in auf der positiven Zeitachse erklärte Eingangssignale $u \in L^2([0, \infty), \mathcal{U})$ überführen. Gleichsam gilt die Umkehrung und damit $u^-(\cdot) = u(-\cdot) \in L^2((-\infty, 0], \mathcal{U})$. Eine Änderung des Vorzeichens der Integrationsvariable in (C.40) führt somit auf

$$(\Gamma u)(t) = \int_0^\infty g(t + s) u(\tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^0 g(t - \tau) u^-(\tau) \, d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{C.42})$$

Damit liegt eine Interpretation des Hankel-Operators als sequentielle Ausführung zweier Abbildungen nah. Auf ein anfangs unausgelenktes System wirkt zunächst von $-\infty$ bis 0 die Eingangsgröße u^- , dadurch erfährt das System die Überführung in einen Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$. Ab diesem Zeitpunkt wird gleichzeitig die Eingangsgröße identisch Null gesetzt, dass System kann somit als ungezwungen angesehen werden und die Ausgänge für $t \geq 0$ hängen lediglich von dem zum Zeitpunkt $t = 0$ erreichten Zustand ab. Die Repräsentation des Hankel-Operators auf Basis einer sukzessiven Anwendung von Steuer- und Beobachtbarkeitsoperator lautet

$$(\Gamma u)(t) = (\mathcal{C}_\infty(\mathcal{B}_\infty u))(t) = C\Phi(t) \int_0^\infty \Phi(\tau) B u(\tau) \, d\tau \quad (\text{C.43})$$

Für Pritchard-Salamon-Systeme ist die Vertauschbarkeit von Integralbildung und Anwendung des Beobachtbarkeitsoperators stets gesichert, es gilt

$$(\Gamma u)(t) = (\mathcal{C}_\infty(\mathcal{B}_\infty u))(t) \int_0^\infty C\Phi(t+\tau)Bu(\tau) d\tau. \quad (\text{C.44})$$

Weitere Details zu dieser Darstellung finden sich beispielsweise in [ZDG95] (S. 173), [DP05] (S. 145), [SC00] oder [CS01]. Weiterführende Betrachtungen zu Hankel-Operatoren lassen sich für den Fall unendlich-dimensionaler Systeme [Sas01], [Sas02] oder allgemein [Pel03] und [Par07] entnehmen.

In [GCP88] wird ein Verfahren zur endlich-dimensionalen Approximation bestimmter unendlich-dimensionaler Systeme zusammen mit einer Betrachtung des Konvergenzverhaltens und der Bestimmung von Fehlerschranken dieses Verfahrens gezeigt. Die im Rahmen des Verfahrens zulässigen unendlich-dimensionalen Systeme müssen einen nuklearen Hankel-Operator aufweisen. Im Hinblick auf die endlich-dimensionale Approximation des Beispielsystems in Abschnitt 4.2 werden im Folgenden einige weiterführende Eigenschaften der Hankel-Operatoren von Pritchard-Salamon-Systemen betrachtet. Aus der Beschränktheit der Steuer- und Beobachtbarkeitsabbildung von Pritchard-Salamon-Systemen folgt unmittelbar

$$\Gamma = \mathcal{C}_\infty \mathcal{B}_\infty \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), \mathcal{U}), L^2([0, \infty), \mathcal{Y})), \quad (\text{C.45})$$

beziehungsweise

$$\Gamma' = (\mathcal{C}_\infty \mathcal{B}_\infty)' = \mathcal{B}_\infty' \mathcal{C}_\infty' \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), \mathcal{Y}), L^2([0, \infty), \mathcal{U})). \quad (\text{C.46})$$

Der folgende Satz ist aus [Sas02] (S. 23) abgeleitet.

Satz 65 *Ein exponentiell stabiles Pritchard-Salamon-System mit $\dim \mathcal{U} = p < \infty$ und $\dim \mathcal{Y} = q < \infty$ besitzt einen kompakten Hankel-Operator.* \square

Im wesentlichen beruht die Aussage aus [Sas02] (S. 23) auf Lemma 3.5 aus [Cur+94], dort wird eine Aussage über die Integrierbarkeit des Kerns des Hankel-Operators getroffen. Falls der Kern aus (C.41) die Bedingung

$$\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} |C\Phi(t+\tau)B|^2 d\tau dt < \infty \quad (\text{C.47})$$

erfüllt, ist dieser Hilbert-Schmidt ([Wei] (S. 144)) und nach Lemma 8.20 und Theorem 8.83 aus [RR04] der zugeordnete Hankel-Operator beschränkt und kompakt. Wobei die Kompaktheit von Hilbert-Schmidt-Operatoren beziehungsweise Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren auch Satz 3.18 in Kombination mit Satz 3.19 aus [Wei] zu entnehmen ist. In [GCP88] (S. 864) werden detaillierte Betrachtungen der Räume, in deren Sinne die Kompaktheit zu verstehen ist, angestellt. Ein Beweis, der Kompaktheit des Hankel-Operators für den Fall exponentiell stabiler Pritchard-Salamon-Systeme mit $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p, \mathcal{Y} = \mathbb{C}^q, p, q < \infty$ und einer Rieszbasis des Zustandsraums aus den Eigenvektoren des Systemoperators findet sich in Abschnitt C.4.5.

Falls die Kompaktheit des Hankel-Operators bekannt ist, folgt aus den in Satz 25 aufgeführten Eigenschaften der Eigenwerte kompakter Operatoren unmittelbar, dass die Menge der als Quadratwurzel der Eigenwerte des positiven Operators $\Gamma^*\Gamma$ gegebenen Singulärwerte von Γ abzählbar ist. Anhand von Summierbarkeitsbedingungen bezüglich dieser sogenannten Hankel-Singulärwerte, kann eine weiterführende Klassifizierung des Hankel-Operators eines durch Satz 65 erfassten Systems erfolgen. Ein kompakter Hankel-Operator ist genau dann Hilbert-Schmidt, falls die stets nicht negativen Singulärwerte des Hankel-Operators quadratisch summierbar sind

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \sigma_i(\Gamma)^2 < \infty. \quad (\text{C.48})$$

Diese Aussage entstammt Satz 3.18 aus [Wei] und die Operatornorm eines derartigen Operators ist durch $\|\Gamma\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \sigma_i(\Gamma)^2$ gegeben. Die Verallgemeinerung der voranstehenden Summierbarkeitsbedingungen auf beliebige $p > 0$ bildet die Basis für die Schatten-Klassen kompakter Operatoren $\mathcal{L}_{S,p}(X,Y)$, $p > 0$, zu der im Anhang B.4.5 und der dort aufgeführten Literatur weiter Details zu finden sind. Falls die Hankel-Singulärwerte eines Hankel-Operators die gegenüber (C.48) strengere Bedingung der Summierbarkeit

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \sigma_i(\Gamma) < \infty \quad (\text{C.49})$$

erfüllen und somit $\Gamma \in \mathcal{L}_{S,1}(L^2([0,\infty), \mathcal{U}), L^2([0,\infty), \mathcal{Y}))$ gilt, wird der Hankel-Operator als nuklear ([Wer11] (S. 286)) oder Operator der Spurklasse ([Wer11] (S. 296)) bezeichnet.

C.3.6 Exponentielle Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit

Als Voraussetzung für verschiedene weiterführende systemtheoretische Konzepte werden im Folgenden für Pritchard-Salamon-Systeme die exponentielle Stabilisierbarkeit und exponentielle Detektierbarkeit definiert. Im Fall der Pritchard-Salamon-Klasse und zum Teil auch bei allgemeineren Systemklassen treten die beiden Eigenschaften als Voraussetzung für die Äquivalenz zwischen exponentieller Stabilität und Ein-/Ausgangsstabilität, für die Existenz endlich-dimensionaler stabilisierender Regler (Corollary 22, [Log92] (S. 124)) und die Existenz koprimen Faktorisierungen der Übertragungsfunktion auf. Damit weisen exponentiell stabilisierbare und exponentiell detektierbare Pritchard-Salamon-Systeme hinsichtlich der genannten Eigenschaften unmittelbare Analogien zu endlich-dimensionalen Systemen auf.

Die Ausführungen zur exponentiellen Stabilisierbarkeit und exponentiellen Detektierbarkeit setzen die Erkenntnisse zur Abgeschlossenheit der Pritchard-Salamon-Klasse gegenüber zulässiger Ausgangsrückführung voraus. Dazu sei an dieser Stelle auf Lemma 2.13 aus [Keu93] (S. 31) oder spezieller die Aussagen zu regulären Pritchard-Salamon-Systemen mit Ein-/Ausgangsoperatoren endlichen Rangs gemäß Lemma 5.3.1 aus [Cur92b] (S. 185) verwiesen. Ein allgemeiner Nachweis der Abgeschlossenheit der Pritchard-Salamon-Klasse gegenüber dynamischer Ausgangsrückführung findet sich beispielsweise in [Log92] (S. 119f) oder [Keu93] (S. 56ff).

Die folgende Definition entspricht Definition 5.1 aus [Cur+94] (S. 30), äquivalent dazu ist beispielsweise die Definition 2.18 aus [Kou93] (S. 48). Eine entsprechende Definition für endlich-dimensionale Systeme findet sich beispielsweise in [ZDG95] (S. 50).

Definition 100 (Stabilisierbarkeit/Detektierbarkeit) Es sei $\Sigma(A, B, C, D)$ beziehungsweise $\Sigma(\Phi(\cdot), B, C, D)$ ein Pritchard-Salamon-System.

AS) Das Paar (A, B) bzw. $(\Phi(\cdot), B)$ heißt zulässig (beschränkt) stabilisierbar, falls ein zulässiger Ausgangsoperator $F \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{U})$ (ein $F \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$) existiert, sodass die durch

$$\Phi_{BF}(t)x_0 = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)BF\Phi_{BF}(\tau)x_0 d\tau \quad (\text{C.50})$$

gegebene Halbgruppe auf \mathcal{W} und \mathcal{V} exponentiell stabil ist.

AD) Das Paar (A, C) bzw. $(\Phi(\cdot), C)$ heißt zulässig (beschränkt) detektierbar, falls ein zulässiger Eingangoperator $H \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{V})$ (ein $H \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{W})$) existiert, sodass die durch

$$\Phi_{HC}(t)x_0 = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi_{HC}(t-\tau)HC\Phi(\tau)x_0 d\tau \quad (\text{C.51})$$

gegebene Halbgruppe auf \mathcal{W} und \mathcal{V} exponentiell stabil ist. □

Für weiterführende Betrachtungen sei auf die in diesem Zusammenhang bereits genannten Arbeiten verwiesen. Insbesondere für reguläre Pritchard-Salamon-Systeme in Kombination mit $F \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{U})$ benennt Proposition 4.8 aus [Cur+94] (S. 28) $A_{BF}^\mathcal{V}x = (A + BF)x, \forall x \in \mathcal{D}(A^\mathcal{V})$ als infinitesimalen Erzeuger von $\Phi_{BF}(\cdot)$. Dabei ist auch $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{U})$ ([Cur+94] (S. 30)) zu beachten.

Verschiedene Eigenschaften exponentiell stabilisierbarer und exponentiell detektierbarer Pritchard-Salamon-Systeme finden sich beispielsweise in [Cur90b]. Jedes Pritchard-Salamon-System, dass über die beiden hier betrachteten Struktureigenschaften verfügt, ist auch Element der Callier-Desoer-Klasse (Remark 13, [Cur90b] (S. 1178) oder auch [Log91]) und besitzt damit auch die Eigenschaften dieser Algebra von Übertragungsfunktionen.

Für die folgenden Aussagen wird die exponentielle Stabilisierbarkeit und die exponentielle Detektierbarkeit der betrachteten Pritchard-Salamon-Systeme vorausgesetzt. Für System dieser Unterklasse der Pritchard-Salamon-Systeme folgt die Zerlegbarkeit des Spektrum des Systemoperators in zwei Teile. Ein Teil besteht dabei höchstens aus endlich-vielen Eigenwerten mit nicht-negativem Realteil, während der verbleibende Teil des Spektrums in der offenen linken s-Halbebene liegt (Property PS5, [Cur90b] (S. 1176)). Als direkte Konsequenz besitzt eine derartigen Systemen zu-

geordnete Übertragungsfunktion lediglich endlich viele instabile Pole (Remark 13, [Cur90b] (S. 1178)).

Die Existenz einer koprime Zerlegung der Übertragungsfunktion eines Pritchard-Salamon-Systems (Abschnitt C.3.7) ist wie auch im Endlich-dimensionalen ([ZDG95]) an die beiden hier vorausgesetzten Eigenschaften geknüpft. Zudem gilt für die angenommene Unterklasse der Pritchard-Salamon-Systeme gemäß Satz 10 die Äquivalenz von exponentieller Stabilität und Ein-/Ausgangsstabilität. Entsprechend Definition 11 ist die Ein-/Ausgangsstabilität der hier betrachteten Systeme gleichbedeutend mit der Zugehörigkeit ihrer Übertragungsfunktion zu $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$.

Die letztgenannten Aussagen sind hinsichtlich des Schlusses auf die exponentielle Stabilität eines geschlossenen Regelkreises bedeutsam, insbesondere falls Regler verwendet werden, die zunächst lediglich die Zugehörigkeit der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises zu \mathcal{H}_∞ gewährleisten.

Für die betrachteten Systeme ist gemäß Corollary 22. aus [Log92] (S. 124) die Existenz stabilisierender endlich-dimensionaler Regler gewährleistet.

Speziell für die im Hinblick auf das Beispielsystem relevante Klasse der regulären Pritchard-Salamon-Systeme mit endlich-dimensionalen Ein-/Ausgangsräumen finden sich verschiedene im Hinblick auf die Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit relevante Aussagen in [Cur92b]. In diesem Zusammenhang ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die exponentielle Stabilisierbarkeit dieser Unterklasse allgemeiner Pritchard-Salamon-Systeme gemäß Lemma 5.3.4 aus [Cur92b] (S. 187) zu nennen. Wobei letzteres Lemma unter Ausnutzung der Dualität auch im Hinblick auf die Überprüfung der exponentiellen Detektierbarkeit genutzt werden kann.

C.3.7 Koprime Faktorisierung

Der folgende Abschnitt dient der Einführung einer teilerfremden oder koprime Faktorisierung einer Untermenge von Systemen der Pritchard-Salamon-Klasse und beinhaltet damit eine direkte Erweiterung der aus dem Endlich-dimensionalen bekannten Zusammenhänge. Die koprime Zerlegung findet insbesondere bei der Approximation instabiler unendlich-dimensionaler Systeme im Sinne der Gap-Metrik Verwendung. Ausführungen zur koprime Zerlegungen stabilisierbarer und detektierbarer rationaler Übertragungsfunktionen über den stabilen rationalen Übertragungsfunktionen findet sich beispielsweise in [Vid87]. Frühe Ansätze zur teilerfremden Zerlegung irrationaler Übertragungsfunktionen werden in [Vid75] eingeführt. Umfangreiche Betrachtung der teilerfremden Zerlegung exponentiell stabilisierbarer und exponentiell detektierbarer Pritchard-Salamon-Systeme werden in [Cur90b] angestellt. Einen besonderen Bezug zu den algebraischen Eigenschaften und zur teilerfremden Zerlegung der Pritchard-Salamon-Klasse beinhaltet [Log92]. Die explizite Lösung des Problems der teilerfremden Zerlegung sowie des Problems der robusten Stabilisierung ausgedrückt durch die Lösung zweier Riccati-Gleichungen für zulässig exponentiell stabilisierbare sowie zulässig exponentiell detektierbare Pritchard-Salamon-Systeme wird in [CP94] gegeben. Die Formulierung der teilerfremden Zerlegung durch die Operatoren einer Zu-

standsraumdarstellung für exponentiell stabilisierbare und exponentiell detektierbare Systeme aus der sehr allgemeinen Systemklasse der korrekt gestellten Systeme findet sich in [Mor94b]. Eine Betrachtung nicht zwingend exponentiell stabilisierbarer aber dissipativer Systeme mit kolloklieren Aktoren und Sensoren findet sich in [CO97]. Allgemeinere Aussagen hinsichtlich einer doppelt teilerfremden Zerlegung korrekt gestellter Systeme enthält [Sta98a] oder ausführlicher [Sta98b]. Für alle echten Unterklassen der betrachteten Unterklasse der korrekt gestellten Systeme gelten die dort zutreffenden Aussagen ebenfalls, dazu zählen die entsprechenden Unterklassen der regulären Systeme und damit auch insbesondere der Pritchard-Salamon-Systeme. Im Folgenden wird die koprime Faktorisierung über \mathcal{H}_∞ für Pritchard-Salamon-Systeme unter der einschränkenden Annahme der exponentiellen Stabilisierbarkeit und exponentiellen Detektierbarkeit der eingeschlossenen Systeme eingeführt. In Anlehnung an [CP94] (S. 439) gilt dazu die folgende Definition.

Definition 101 (Koprime Faktorisierung) Es seien $M \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}))$, $\tilde{M} \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ und $N, \tilde{N} \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$.

KF1) M, N sind genau dann rechts-koprim, falls $\tilde{X} \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}))$ sowie $\tilde{Y} \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{U}))$ existieren, sodass für alle $s \in \mathbb{C}_0^+$ die Bezout-Identität

$$\tilde{X}(s)M(s) + \tilde{Y}(s)N(s) = I \quad (\text{C.52})$$

gilt.

KF2) \tilde{M}, \tilde{N} sind genau dann links-koprim, falls $X \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ sowie $Y \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{U}))$ existieren, sodass die Bezout-Identität

$$\tilde{M}(s)X(s) + \tilde{N}(s)Y(s) = I \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+ \quad (\text{C.53})$$

gilt. □

In Anlehnung an [Sta98a] (S. 2755) gilt als alternative Formulierung zu Definition 101, dass die Operatoren N, M genau dann rechts koprim sind, falls zu

$$\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y} \times \mathcal{U})) \ni \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{U} \quad (\text{C.54})$$

eine Links-Inverse $\begin{pmatrix} \tilde{Y} & \tilde{X} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{Y} \times \mathcal{U}, \mathcal{U}))$ existiert. Ein entsprechender Zusammenhang gilt für links koprime \tilde{N}, \tilde{M} . Als geradlinige Erweiterung der Nomenklatur im endlich-dimensionalen Fall, zu dem ausführliche Betrachtungen in [Rai94] angestellt werden, wird eine Abbildung gemäß (C.54) als normalisiert bezeichnet, falls sie verlustfrei beziehungsweise inner ist, also für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$M(i\omega)^* M(i\omega) + N(i\omega)^* N(i\omega) = I \quad (\text{C.55})$$

gilt. Entsprechend heißt ein $\begin{pmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U} \times \mathcal{Y}, \mathcal{U}))$ normalisiert, falls $\begin{pmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix}$ ko-verlustfrei bzw. ko-inner ist, also für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\tilde{M}(i\omega) \tilde{M}(i\omega)^* + \tilde{N}(i\omega) \tilde{N}(i\omega)^* = I \quad (\text{C.56})$$

gilt ([Cur06] (S. 4683)).

Eine Übertragungsfunktion G besitzt eine rechts bzw. links kopprime Faktorisierung über \mathcal{H}_∞ falls rechts kopprime M, N bzw. links kopprime \tilde{M}, \tilde{N} gemäß Definition 101 existieren und darüber hinaus $G = NM^{-1}$ bzw. $G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ gilt. Für exponentiell stabilisierbare und detektierbare nicht zwingend stabile Übertragungsfunktionen der Pritchard-Salamon-Klasse wird im folgenden die Existenz kopprimer Zerlegungen gemäß den Ausführungen in den eingangs genannten Literaturquellen angenommen. Im Hinblick auf Satz 11 wird [Mor94c] (S. 12) folgend die Menge aller Übertragungsfunktionen, die eine links- und rechts-kopprime Faktorisierung über den stabilen Übertragungsfunktionen besitzen mit $\mathfrak{R}(\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})))$ oder abkürzend mit $\mathfrak{R}(\mathcal{H}_\infty)$ bezeichnet.

Ferner wird eine Faktorisierung einer Übertragungsfunktion der Form $G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ mit Operatoren nach Definition 101 die zusätzlich den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & -Y \\ N & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{C.57})$$

erfüllen, als doppelt kopprime Faktorisierung bezeichnet ([Cur90b]). Weiterführende Definitionen hinsichtlich kopprimer Faktorisierung finden sich beispielsweise in [Cur90b], [CP94], [CO04] und [Cur06], einige zusätzliche algebraische Klassifizierungen sind in [Log92] zu finden. In [Sta98a] und [Sta98b] wird darüber hinaus die kopprime Faktorisierung hinsichtlich verschiedener Halbebenen eingeführt.

Die an dieser Stelle vorgestellte kopprime Faktorisierung für Übertragungsfunktionen gewisser unendlich-dimensionaler Systeme über \mathcal{H}_∞ kann als Erweiterung der koprimen Faktorisierung im Falle endlich-dimensionaler Systeme über \mathcal{RH}_∞ ([Vid87] oder [ZDG95]) gesehen werden. Analog zum Endlich-dimensionalen werden im Fall eines exponentiell stabilen Systems, dargestellt durch G , mittels der Wahl

$$N = \tilde{N} = G, \quad M = \tilde{M} = 1, \quad \tilde{X} = X = I, \quad \tilde{Y} = Y = 0, \quad (\text{C.58})$$

die Bedingungen einer doppelt koprimen Faktorisierung erfüllt. Zum einen gilt mit der zuletzt eingeführten Substitution $G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ zudem führt das Einsetzen von (C.58) in (C.57) auf

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -G & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ G & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (\text{C.59})$$

C.4 Kriterien für die Zulässigkeit von Ein-/Ausgangsoperatoren

Im Fall eines diagonalisierbaren Systemoperators nehmen die Kriterien zur Formulierung des zugehörigen Systems in der Pritchard-Salamon-Klasse eine gegenüber den Kriterien im Fall allgemeiner Systemoperatoren stark vereinfachte Form an. Aufbauend auf der allgemeinen Einführung der Pritchard-Salamon Klasse in Abschnitt 2.3.2 dient der vorliegende Abschnitt der Formulierung der besagten vereinfachten Kriterien. Die Ausführung sind damit als Generalisierung der in Abschnitt C.2 eingeführten Kriterien für Spektralsysteme mit beschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren (Abschnitt 2.1.3) zu sehen.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ des Systemoperators A eine Rieszbasis (Definition B.5.3) des Zustandsraums \mathcal{X} bilden. Die Entwicklungskoeffizienten $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ des Eingangsoperators sind formal durch Gleichung (2.36) gegeben, während die Entwicklungskoeffizienten des Ausgangsoperators formal in Gleichung (2.40) definiert werden. Für die Betrachtung unbeschränkter Operatoren sei in diesem Zusammenhang zudem auf die Ausführungen aus Abschnitt 2.3.3 verwiesen. Die den betrachteten Systemen auf dem Zustandsraum zugeordnete stark stetige Halbgruppe ist entsprechend Gleichung (2.41) darzustellen.

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an den Betrachtungen aus [Cur88] und zielen insbesondere darauf ab, für das Beispielsystem eine Entsprechung zu Lemma 2.2 und Corollary 2.3 aus [Cur88] (S. 25f) zu formulieren. Die Betrachtungen lassen sich damit als Verallgemeinerung der Ausführungen bezüglich hyperbolischer Systeme aus [PS87b] auffassen. Einleitend erfolgt die Definition gewichteter Hilberträume. Daran schließen sich die Kriterien für die Beschränktheit von Ein-/Ausgangsoperatoren im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse an. Darauf aufbauend werden die Bedingungen für die Zulässigkeit von Ein-/Ausgangsoperatoren hergeleitet.

C.4.1 Gewichtete Hilberträume

Dieser Abschnitt dient der Einführung gewichteter Hilberträume ([PS87b], [Cur88], [BCS88]), die im Folgenden zur Konstruktion von Raumskalen der Form

$$Y \xhookrightarrow{d} X = X' \xhookrightarrow{d} Y' \quad (\text{C.60})$$

verwendet werden. Bezüglich der auftretenden Hilberträume wird die Separabilität angenommen und somit die Existenz einer abzählbaren Orthonormalbasis $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$. Ferner sei T entsprechend Definition 64 und $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+} = \{Tu_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine zu $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ äquivalente Basis. Dann gilt

$$x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, u_i \rangle u_i = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle v_i \quad \forall x \in X. \quad (\text{C.61})$$

Aus der Wahl einer Darstellung der Elemente des Zustandsraums lässt sich die Norm des Zustandsraums auf eine Reihe zurückführen. Im Folgenden sei $\|\cdot\|_X^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_X$ die Norm auf X . Ferner sei

$\|\cdot\|_1$ entsprechend (B.45) und damit eine zu $\|\cdot\|_X$ äquivalente Norm. Mit der Darstellungen aus (C.61) gilt unter Verwendung der Entwicklungskoeffizienten $x_i^* = \langle x, w_i \rangle$ dann

$$\|x\|_1^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |x_i^*|^2 \quad \forall x \in X. \quad (\text{C.62})$$

Aufgrund der Definition äquivalenter Basen und des Zusammenhangs (B.37) kann für alle $x \in X$ damit direkt

$$\|x\| = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |x_i^*| \quad (\text{C.63})$$

als Norm auf X eingeführt werden, wobei $\|\cdot\|$ durch das Innenprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle} \quad (\text{C.64})$$

induziert wird. Im Allgemeinen lassen sich die Elemente eines separablen Hilbertraums mit den Elementen eines Folgenraums identifizieren. Eine allgemeine Aussage zur Normisomorphie von separablen Hilberträumen zu l^2 findet sich beispielsweise in [Heu92] (S. 182). Die Zugehörigkeit einer Folge von Entwicklungskoeffizienten zu einem Folgenraum hängt von der Konvergenz einer Reihe auf Basis einer solchen Folge ab. Unter Verwendung der entsprechenden Norm lautet eine Charakterisierung von X daher

$$X = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} x_i^* v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |x_i^*|^2 < \infty \right\}. \quad (\text{C.65})$$

Im Fall von (C.65) sind die Elemente von X durch $\{x_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ gekennzeichnet. Durch eine Gewichtung der einzelnen Elemente einer Folge innerhalb der in (C.65) auftretenden Reihe ist demnach eine Parametrierung von Räumen zu realisieren. Als Gewichtung der Entwicklungskoeffizienten wird eine Folge eingeführt, die es ermöglicht, relativ zum Pivotraum X , „kleinere“ oder „größere“ Räume einzuführen. Unter der Annahme einer positiven Folge $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ wird ausgehend von (C.65) der gewichtete Hilbertraum \mathcal{H}_β durch

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} x_i^* v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i |x_i^*|^2 < \infty \right\} \quad (\text{C.66})$$

charakterisiert. Die Definition von \mathcal{H}_β beruht damit auf einer Gewichtung der Entwicklungskoeffizienten durch $\beta_i, i \in \mathbb{I}^+$. Die $x \in \mathcal{H}_\beta$ sind mittels der Zugehörigkeitsbedingung $\left\{ \beta_i^{\frac{1}{2}} x_i^* \right\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ gegeben. Die Charakterisierung von \mathcal{H}_β mittels (C.66) basiert dabei auf der Annahme der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\beta}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\beta}$ mit

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_\beta} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{H}_\beta, \forall y \in \mathcal{H}_\beta. \quad (\text{C.67})$$

Aus einer Wahl von $\beta_i > 1$, f.f.a. $i \in \mathbb{I}^+$ resultiert eine, gegenüber der in (C.66) enthaltenen Summierbarkeitsbedingung, verschärfte Bedingung. Wobei allerdings $\beta_i \in \mathcal{O}(1)$ auf einen gegenüber

X unveränderten Raum führt. Bei geeigneter Wahl der $\beta_i, i \in \mathbb{I}^+$ folgt dann (C.60) mit $Y = \mathcal{H}_\beta$. Ein Hilbertraum innerhalb einer Raumskala ist nach der Festlegung eines Pivotraums eindeutig durch seinen Dualraum festgelegt ([TW09] (S. 66)). Demzufolge kann die Parametrierung der Hilberträume einer Raumskala ((C.60)) gleichwertig anhand des Dualraums erfolgen. Unter der Annahme des Zustandsraums als Pivotraum besteht zur Definition von \mathcal{H}_β alternativ der Weg über seinen im Sinne des Pivotraums X zu verstehenden Dualraum $(\mathcal{H}_\beta)'$. Für $\mathcal{H}_\beta \xhookrightarrow{d} X$ wird eine zu (C.66) äquivalente Charakterisierung von Y durch

$$(\mathcal{H}_\beta)' = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} x_i^* v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i^{-1} |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (\text{C.68})$$

erreicht, sodass eine Raumskala gemäß (C.60) mit $\mathcal{H}_\beta = Y$ folgt. Für die Festlegung von $(\mathcal{H}_\beta)'$ wird die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\beta}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\beta}$ mit $\langle x, y \rangle_{(\mathcal{H}_\beta)'} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i^{-1} \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle}$ vorausgesetzt. Damit steht eine Möglichkeit zur Definition einer Raumskala gemäß (2.109) für die Realisierung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse zur Verfügung. Die konkreten Räume bleiben allerdings bis zu einer Festlegung der Gewichtungen noch offen.

C.4.2 Beschränktheit der Ein-/Ausgangsoperatoren

Innerhalb der Pritchard-Salamon-Klasse werden Eingangsoperatoren $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ sowie Ausgangsoperatoren $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ berücksichtigt. An dieser Stelle wird ferner $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ und $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ mit $p, q < \infty$ vorausgesetzt. Die Betrachtung derartiger hinsichtlich des Zustandsraums \mathcal{X} unbeschränkten Ein-/Ausgangsoperatoren endlichen Rangs erfordert eine Verallgemeinerung der in Abschnitt C.2.1 beziehungsweise Abschnitt C.2.2 durchgeführten Betrachtungen.

Im Folgenden wird $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ gesetzt und \mathcal{H}_β analog zu (C.66) unter der Annahme geeigneter $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ durch

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} x_i^* v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (\text{C.69})$$

charakterisiert. Für die Norm auf \mathcal{H}_β gilt $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\beta}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\beta}$ mit

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_\beta} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{H}_\beta, \forall y \in \mathcal{H}_\beta. \quad (\text{C.70})$$

Analog zu Ungleichung (C.3) folgt $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, falls eine positive Konstante c existiert, sodass

$$\|B u\|_{\mathcal{V}} \leq c \|u\|_{\mathcal{U}} \quad \forall u \in \mathcal{U}. \quad (\text{C.71})$$

Ausgehend von der auf \mathcal{V} definierten Norm aus (C.70) führt die Substitution $x = y = B u$ unter Berücksichtigung von (2.37) auf

$$\|B u\|_{\mathcal{V}} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i |\langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}}|^2 \quad (\text{C.72})$$

$$\leq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i |b_i^*|^2 \|u\|_{\mathcal{U}}^2. \quad (\text{C.73})$$

(C.72) entspricht der im Fall eines hinsichtlich des Zustandsraums beschränkten Eingangsoperators auftretenden Gleichung (C.9). Aus (C.73) folgt ein hinreichendes Kriterium für die Stetigkeit des Eingangsoperators in den Raum \mathcal{V} zu

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \beta_i |b_i^*|^2 < \infty \quad (\text{C.74})$$

oder gleichwertig zu $\left\{ \beta_i^{\frac{1}{2}} b_i^* \right\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$. Im Fall skalarer Eingangsgrößen $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ ist (C.73) eine Gleichung und damit (C.74) notwendig und hinreichend für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

In Analogie zu den Ausführungen in Abschnitt C.2.2 beruhen die Betrachtungen zur Stetigkeit des Ausgangsoperators $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ auf der Annahme eines dualen Systems. Dazu wird der Raum $\mathcal{W} = \mathcal{H}_\gamma$ eingeführt und durch

$$\mathcal{H}_\gamma = \left\{ x = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} x_i^* v_i \mid \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i |\langle x, w_i \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (\text{C.75})$$

charakterisiert. Dabei findet die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\gamma}$ mit

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_\gamma} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle} \quad (\text{C.76})$$

für alle $x \in \mathcal{H}_\gamma$ und für alle $y \in \mathcal{H}_\gamma$ Verwendung. Durch Festlegung von \mathcal{H}_γ und die Wahl des Zustandsraums als Pivotraum ist gleichsam $(\mathcal{H}_\gamma)'$ eindeutig festgelegt. Ein Vorgehen, angelehnt an Abschnitt C.2.2, führt abschließend auf

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i^{-1} |c_i^*|^2 < \infty \quad (\text{C.77})$$

beziehungsweise $\left\{ \gamma_i^{-\frac{1}{2}} c_i^* \right\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$, als ein hinreichendes Kriterium für $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$. Im Fall einer skalaren Ausgangsgröße $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ ist (C.77) entsprechend der Ausführungen aus Abschnitt C.2.2 notwendig und hinreichend für $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$.

Die resultierenden Kriterien (C.74) und (C.77) entsprechen (2.18)(i) beziehungsweise (2.18)(ii) aus [Cur88] (S. 25).

C.4.3 Kriterium für die Zulässigkeit des Eingangsoperators

Die Zulässigkeit eines Eingangsoperators $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse folgt gemäß Definition 8 aus der Existenz einer Konstanten $c > 0$, sodass

$$\left\| \int_0^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) B u(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{W}} \leq c \|u\|_{L^2([0, t_1], \mathcal{U})} \quad \forall u \in L^2([0, t_1], \mathcal{U}). \quad (\text{C.78})$$

Entscheidend für die Zulässigkeit von B ist die Beschränktheit des Steuerbarkeitsoperators aus (C.18) als Abbildung von der Menge der über einem Zeitintervall quadratisch Lebesgue-integrierbar Signale mit Werten aus dem Eingangsraum \mathcal{U} in den Raum \mathcal{W} .

Im Folgenden wird ein zumindest hinreichendes Kriterium für die Zulässigkeit des Eingangsoperators des Beispielsystems ausgehend von Ungleichung (C.78) hergeleitet. Die Herleitung entspricht dabei im wesentlichen dem Vorgehen in [Cur88]. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Eigenvektoren $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ des Systemoperators A zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden. Als Einschränkung gegenüber [Cur88] wird an dieser Stelle unmittelbar $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i \in \mathbb{I}^+$ und damit die exponentielle Stabilität der betrachteten Systeme angenommen. Die Verallgemeinerung auf endlich viele Eigenwerte mit jeweils endlicher Vielfachheit für die $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ gilt lässt sich [Cur88] entnehmen.

Für die in \mathcal{B}_{t_1} enthaltene stark stetige Halbgruppe des Beispielsystems wird eine Darstellung entsprechend Gleichung (2.41) vorausgesetzt, zusammen mit Gleichung (2.37) gilt dann

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_{t_1} u)(t) &= \int_0^{t_1} \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_i^{*T} u(\tau) v_i d\tau \\ &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \left(\int_0^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_i^{*T} u(\tau) d\tau \right) v_i. \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

Aus einem Vergleich der voranstehenden Gleichung mit der Darstellung aller $x \in \mathcal{W}$ in der Rieszbasis wird deutlich, dass der Integralterm in (C.79) einem Entwicklungskoeffizienten entspricht. Im Folgenden wird $\mathcal{W} = \mathcal{H}_\gamma$ gesetzt und \mathcal{H}_γ analog zu (C.66) durch (C.75) charakterisiert. Für die Norm auf \mathcal{H}_γ gilt erneut $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\gamma}$ mit

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_\gamma} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i \langle x, w_i \rangle \overline{\langle y, w_i \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{H}_\gamma, \forall y \in \mathcal{H}_\gamma. \quad (\text{C.80})$$

Durch das Einsetzen der Entwicklungskoeffizienten aus (C.79) in $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2$ folgt formal der Zusammenhang

$$\left\| \int_0^{t_1} \Phi((t_1 - \tau)) B u(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i \left| \int_0^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_i^{*T} u(\tau) d\tau \right|^2. \quad (\text{C.81})$$

Die Anwendung der Integralformulierung der Cauchy-Schwarz Ungleichung unter Berücksichtigung der für alle $i \in \mathbb{I}^+$ skalaren Terme $e^{\lambda_i \tau}$ und $b_i^{*T} u(\tau)$ führt auf

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i \left| \int_0^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_i^{*T} u(\tau) d\tau \right|^2 &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i \int_0^{t_1} |e^{\lambda_i(t_1-\tau)}|^2 d\tau \int_0^{t_1} |b_i^{*T} u(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i \int_0^{t_1} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)(t_1-\tau)} d\tau \|b_i^*\|_{\mathcal{U}}^2 \|u\|_{L^2([0, t_1], \mathcal{U})}^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \gamma_i \left| \int_0^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_i^* u(\tau) d\tau \right|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{\gamma_i \|b_i^*\|_{\mathcal{U}}^2}{2 |\operatorname{Re}(\lambda_i)|} \|u\|_{L^2([0,t_1], \mathcal{U})}^2. \quad (\text{C.82})$$

Aufgrund von $\mathcal{U} = \mathbb{C}^q$ gilt $|b_i^*|^2 = \|b_i^*\|_{\mathcal{U}}^2$ sowie $|u|^2 = \|u\|_{\mathcal{U}}^2$ und damit $\int_0^{t_1} \|u\|_{\mathcal{U}}^2 d\tau = \|u\|_{L^2([0,t_1], \mathcal{U})}^2$. Aus (C.82) lässt sich als hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit eines Eingangsoperators $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ damit

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{\gamma_i |b_i^*|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} < \infty \quad (\text{C.83})$$

oder gleichwertig $\left\{ \left(\frac{\gamma_i}{\operatorname{Re}(\lambda_i)} \right)^{\frac{1}{2}} b_i^* \right\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ ableiten. Die durch (C.83) gegebene Bedingung entspricht der in Lemma 2.2 aus [Cur88] (S. 25) formulierten Bedingung.

Die Zulässigkeit des Eingangsoperators des Beispielsystems hängt sowohl von den Entwicklungskoeffizienten des Eingangsoperators als auch von den Gewichtungskoeffizienten $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ zur Parametrierung des Raumes \mathcal{W} ab. Während die Entwicklungskoeffizienten bereits durch die Modellgleichungen des Beispielsystems vorgegeben sind, lassen sich die Gewichtungskoeffizienten in einem gewissen Rahmen wählen und dienen der Festlegung von \mathcal{W} . Bei der Wahl von $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ gilt es allerdings die Stetigkeit des Ausgangsoperators $C \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ zu beachten.

Anschaulich gesprochen erfordern „stärker unbeschränkte“ Eingangsoperatoren, zur Einhaltung von (C.83), kleinere beziehungsweise schneller abfallende Gewichtungskoeffizienten. Die Charakterisierung von \mathcal{W} gemäß (C.75) verdeutlicht, dass aus der Wahl schneller abfallender Gewichtungskoeffizienten $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ ein größerer Raum \mathcal{W} resultiert. Damit muss aber gleichzeitig der Ausgangsoperator von einem größeren Raum in \mathcal{Y} stetig sein, kann also zur Formulierung eines Systems in der Pritchard-Salamon-Klasse seinerseits nicht „beliebig unbeschränkt“ sein.

C.4.4 Kriterien für die Zulässigkeit einer Ausgangsabbildung

Dieser Abschnitt dient der Herleitung eines hinreichenden Kriteriums für die Zulässigkeit eines Ausgangsoperators $C \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ zu einer stark stetigen Halbgruppe im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse. Ziel ist es damit, die in Corollary 2.3 aus [Cur88] (S. 26) aufgeführte Bedingung herzuleiten. Im Hinblick auf das Beispielsystem steht damit eine Generalisierung der in Lemma (4.8) aus [PS87b] (S. 141) aufgeführten Bedingung zu Verfügung.

Das Vorgehen zur Herleitung eines Kriteriums für die Zulässigkeit eines Ausgangsoperators beruht auf der Betrachtung des zu $\Sigma(A, B, C, D)$ dualen Systems $\Sigma(A', C', B', D')$. Ein für das duale System zulässiger Eingangsoperator C' ist ein für das ursprüngliche System zulässiger Ausgangsoperator C . Dazu gelten im Folgenden die in Abschnitt C.3.2 zur Dualität im Falle von Pritchard-Salamon-Systemen getroffenen Annahmen. Die Zulässigkeit eines Ausgangsoperators ergibt sich dann ausgehen von Ungleichung (C.34). Dazu ist $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\beta$ und \mathcal{H}_β gemäß (C.69) mit einer durch das Innenprodukt aus (C.70) induzierten Norm.

Analog zu dem bei der Herleitung der Zulässigkeit von $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ gezeigten Vorgehen, ergibt sich dann

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{|c_i^*|^2}{\beta_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|} < \infty \quad (\text{C.84})$$

oder äquivalent $\left\{ \frac{|c_i^*|}{\beta_i^{\frac{1}{2}} |\operatorname{Re}(\lambda_i)|^{\frac{1}{2}}} \right\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2$ als hinreichendes Kriterium für die Zulässigkeit von C zu $\Sigma(A, B, C, D)$ im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse.

C.4.5 Klassifizierung des Hankel-Operators

Den Ausführungen aus Abschnitt C.3.5 und insbesondere (C.45) folgenden, ist der Hankel-Operator von Pritchard-Salamon-Systemen als Verknüpfung zweier beschränkter Abbildungen ebenfalls beschränkt. Satz 65 impliziert darüber hinaus für eine Unterklasse der Pritchard-Salamon-Systeme die Kompaktheit des Hankel-Operators. Entsprechend [Sas02] (S. 65) besitzt die Kompaktheit des Hankel-Operators Bedeutung in Bezug auf die Approximierbarkeit einer zugeordneten Übertragungsfunktion durch eine rationale Übertragungsfunktion im Sinne der \mathcal{H}_∞ -Norm. Dieser Abschnitt dient daher der Herleitung eines einfachen Kriteriums, dass den Nachweis der Kompaktheit im Falle der in Abschnitt C.4 vorausgesetzten Unterklasse der Pritchard-Salamon-Systeme erlaubt.

Im Anschluss wird ein für das Beispielsystem anwendbares Kriterium für die Nuklearität eines Hankel-Operators eingeführt. Die Bedeutsamkeit dieser Eigenschaft im Hinblick auf die Angabe von Fehlerschranken im Falle einer rationalen Approximation des dem Hankel-Operator zugeordneten unendlich-dimensionalen Systems erschließt sich aus [GCP88]. Als weitere in diesem Zusammenhang hilfreiche Publikationen seien beispielsweise [Glo84], [CG86], [GLP90] und [Par+88] genannt.

Kompaktheit des Hankel-Operators

Die Kompaktheit eines Hankel-Operators ist auf Basis von Satz 65 für die in dem Satz zulässigen Pritchard-Salamon-Systeme gewährleistet. Im Allgemeinen lässt sich die Kompaktheit des Hankel-Operators aus den Eigenschaften des Kerns des zugeordneten Integraloperators ableiten. In diesem Zusammenhang sei auf Gleichung (2.2) aus [GCP88] (S. 864) und die anschließenden Ausführungen in der genannten Publikation verwiesen. Dieser Abschnitt dient der Herleitung eines hinreichenden Kriteriums für die Kompaktheit des Hankel-Operators für die in diesem Abschnitt betrachtete Unterklasse von Pritchard-Salamon-Systemen. Alle an dieser Stelle betrachteten Systeme werden auch von Satz 65 erfasst.

Im Folgenden wird ein Hankel-Operator gemäß (C.40) mit einem Kern entsprechend (C.41) vorausgesetzt. Die an dieser Stelle zugelassenen Pritchard-Salamon-Systeme werden durch die Annahme eines diagonalisierbaren Systemoperators mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i \in \mathbb{I}^+$ eingeschränkt. Darüber hinaus

gilt $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ und $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$ mit $p, q < \infty$. Die Ausführungen beruhen auf Lemma 8.20 und Theorem 8.83 aus [RR04]. Im Folgenden wird dazu gezeigt, dass der Kern des Hankel-Operators Hilbert-Schmidt ist. Entsprechend Lemma 8.20 aus [RR04] ist dies der Fall, falls

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |C\Phi(t+\tau)Bu(\tau)|^2 d\tau dt < \infty. \quad (\text{C.85})$$

Das Einsetzen der Darstellung einer stark-stetigen Halbgruppe entsprechend (2.41), von $\langle b_i^*, u \rangle_{\mathcal{U}}$ sowie $Cv_i = c_i^*$ führt auf

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty |C\Phi(t+\tau)B|^2 d\tau dt &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \sum_{i \in \mathbb{I}^+} e^{\lambda_i(t+\tau)} c_i^* b_i^{*T} \right|^2 d\tau dt \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{I}^+} |c_i^*|^2 |b_i^*|^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{2\operatorname{Re}(\lambda_i)(t+\tau)} d\tau dt \\ &= \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{|c_i^*|^2 |b_i^*|^2}{4\operatorname{Re}(\lambda_i)^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

Wobei insbesondere die Voraussetzung $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i \in \mathbb{I}^+$ genutzt wird. Für das Beispielsystem zeigt (2.158) die Einhaltung von (C.86).

Für allgemeine Aussagen hinsichtlich der Einhaltung von (C.86) im Falle der hier berücksichtigten Pritchard-Salamon-Systeme, sei auf (2.21) des Lemmas 2.4. aus [Cur88] (S. 26) verwiesen.

Nuklearität des Hankel-Operators

Der folgende Satz ist aus [CS01] (S. 4) entnommen, der Ursprung des Satzes ist allerdings die in [CS01] genannte Quelle.

Satz 66 *Es sei Γ ein durch (C.40) beschriebener Hankel-Operator eines Systems Σ . Ferner sei $G(s)$ die Übertragungsfunktion von Σ . Γ ist genau dann nuklear, falls $G(s)$ eine Reihendarstellung der Form*

$$G(s) = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{\alpha_i}{s + \beta_i} \quad (\text{C.87})$$

auf $\mathbb{C}_0^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$ mit

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{|\alpha_i|}{|\operatorname{Re}(\beta_i)|} < \infty \quad (\text{C.88})$$

besitzt.

□

Die Anwendung von Satz 66 auf das Beispielsystem findet sich Abschnitt 2.3.3. Da das Beispielsystem durch eine analytische Halbgruppe repräsentiert wird (Abschnitt 3.2.3) und darüber hinaus

die verbleibenden Voraussetzungen für Theorem 3.2 aus [CS01] (S. 13) erfüllt, lässt sich die Nuklearität des Hankel-Operators auch auf Basis des genannten Theorems nachweisen. Weitere Ausführungen zu der in [CS01] diskutierten analytischen Systemklasse finden sich beispielsweise in [Sas01] und [Sas02].

Die Kriterien für die Kompaktheit und Nuklearität des Hankel-Operators der an dieser Stelle betrachteten Systeme beurteilen anschaulich gesehen, ob die Beiträge höherer Eigenmoden zum Übertragungsverhalten eines Systems ausreichend schnell abfallen. Aus diesem Grund liegt ein Vergleich mit den Dominanzmaßen von Litz ([Lit83; Fö13]) nah.

C.5 Geschlossene Lösung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystems

Ausgangspunkt für eine geschlossen Formulierung des Übertragungsverhaltens des Beispielsystem bildet formal die starke Formulierung der zugehörigen Bewegungsgleichungen. In einem ersten Schritt werden die besagten Gleichungen der Laplace-Transformation hinsichtlich der zeitlichen Unabhängigen unterzogen. Anschließend erfolgt die Überführung in eine Darstellung mittels eines Systems von Gleichungen erster Ordnung bezüglich der örtlichen Unabhängigen. Diese Darstellung ist mit einer gewöhnlichen Zustandsraumdarstellung vergleichbar. Eine Lösung des so formulierten inhomogenen Randwertproblems kann durch Anwendung der bekannten Methode der Variation der Konstanten erfolgen. Die resultierende Lösung beschreibt das Übertragungsverhalten von den Eingängen des Beispielsystems auf die innerhalb der beschriebenen Zustandsraumdarstellung verwendeten Zustände. Abschließend wird die Übertragungsfunktion des trimorphen Biegewandlers durch zusätzliche Anwendung des Ausgangsoperators definiert.

Unter Vernachlässigung der Anfangsbedingungen lautet die in Anhang A.1 ermittelte starke Formulierung der transversalen Bewegungsgleichung des trimorphen Biegewandlers im Bildbereich der bezüglich der zeitlichen Unabhängigen durchgeführten Laplace-Transformation

$$\frac{\partial^4 w(v, s)}{\partial v^4} + \left(\frac{s^2 + 2\alpha_V s}{\alpha_S + 2\alpha_{KV} s} \right) w(v, s) = \frac{\alpha_{In} V_{Pk}(s)}{\alpha_S + 2\alpha_{KV} s} \frac{\partial^2 \chi(v)}{\partial v^2}. \quad (C.89)$$

Die ebenfalls auf diese Weise zu transformierenden Randbedingungen ergeben sich ausgehend von (A.26) sowie (A.27) zu

$$w(0, s) = \frac{\partial w(v, s)}{\partial v} \Big|_{v=0} = \frac{\partial^2 w(v, s)}{\partial v^2} \Big|_{v=l} = \frac{\partial^3 w(v, s)}{\partial v^3} \Big|_{v=l} = 0. \quad (C.90)$$

Im Hinblick auf eine kompakte Notation für das gegebene inhomogene Randwertproblem wird in den im Folgenden verwendeten Abkürzungen

$$\kappa_s^4 = \left(\frac{k}{L} \right)^4 = -\frac{s^2 + 2\alpha_V s}{\alpha_S + 2\alpha_{KV} s} \quad b_s = \frac{\alpha_{In} V_{Pk}(s)}{\alpha_S + 2\alpha_{KV} s} \quad \text{und} \quad u(v) = \frac{\partial^2 \chi(v)}{\partial v^2}, \quad (C.91)$$

die Abhängigkeit von der komplexen Variable s lediglich als Index aufgeführt. In einer Formulierung als Gleichungssystem aus Gleichungen erster Ordnung bezüglich der örtlichen Unabhängigen lautet das besagte Randwertproblem damit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w(v,s)}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 w(v,s)}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^3 w(v,s)}{\partial v^3} \\ \frac{\partial^4 w(v,s)}{\partial v^4} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \kappa_s^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_s} \begin{pmatrix} w(v,s) \\ \frac{\partial w(v,s)}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 w(v,s)}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^3 w(v,s)}{\partial v^3} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_s \end{pmatrix}}_{=B_s} u(v). \quad (\text{C.92})$$

Die voranstehende Formulierung kann als Zustandsraumdarstellung bezüglich der örtlichen Unabhängigen interpretiert werden. Da Betrachtungen in dieser Richtung innerhalb der vorliegenden Arbeit nicht vorrangig sind, wird auf eine Formulierung innerhalb eines Funktionenraums verzichtet. Dennoch wird bezüglich des Zustands die Abkürzung

$$x(v,s) = \left(w(v,s) \quad \frac{\partial w(v,s)}{\partial v} \quad \frac{\partial^2 w(v,s)}{\partial v^2} \quad \frac{\partial^3 w(v,s)}{\partial v^3} \right)^T \quad (\text{C.93})$$

eingeführt. Der Anfangswert des so definierten Zustands am linken Rand des örtlichen Intervalls lautet

$$x(0,s) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}^T.$$

Durch Variation der Konstanten ergibt sich die Lösung des Gleichungssystems (C.92) in Abhängigkeit von den Zustandsgrößen am linken Rand des örtlichen Intervalls

$$\alpha = w(v,s)|_{v=0}, \quad \beta = \frac{\partial w(v,s)}{\partial v}|_{v=0}, \quad (\text{C.94})$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 w(v,s)}{\partial v^2}|_{v=0}, \quad \delta = \frac{\partial^3 w(v,s)}{\partial v^3}|_{v=0} \quad (\text{C.95})$$

sowie des inhomogenen Terms zu

$$x(v,s) = \Phi_s(v,s) x(0,s) + \int_0^v \Phi_s(v-\tau,s) B_s u(\tau) d\tau. \quad (\text{C.96})$$

Zugunsten einer übersichtlichen Darstellung der Lösung wird eine Notation auf Basis der Rayleigh-Funktionen ([Klo06] (S. C-5))

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^{k,v} &= (\text{ch}_v^k + \mathbf{c}_v^k), & \mathbf{R}_2^{k,v} &= (\text{sh}_v^k + \mathbf{s}_v^k), \\ \mathbf{R}_3^{k,v} &= (\text{ch}_v^k - \mathbf{c}_v^k), & \mathbf{R}_4^{k,v} &= (\text{sh}_v^k - \mathbf{s}_v^k), \end{aligned} \quad (\text{C.97})$$

eingeführt. Wobei für die in den Rayleigh-Funktionen enthaltenen trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen $\mathbf{s}_v^\kappa = \sin(\kappa_s^4 v)$, $\text{sh}_v^\kappa = \sinh(\kappa_s^4 v)$, $\mathbf{c}_v^\kappa = \cos(\kappa_s^4 v)$ und $\text{ch}_v^\kappa = \cosh(\kappa_s^4 v)$ gilt. Demnach sind die Rayleigh-Koeffizienten sowohl von der komplexen Variable s als auch von

der örtlichen Unabhängigen v abhängig. Für das äquivalent zur stark stetigen Halbgruppe im Falle der zeitlichen Evolution gilt somit

$$\Phi_s(v, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,v} & \kappa_s^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v} & \kappa_s^{-2} \mathbf{R}_3^{k,v} & \kappa_s^{-3} \mathbf{R}_4^{k,v} \\ \kappa_s^1 \mathbf{R}_4^{k,v} & \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,v} & \kappa_s^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v} & \kappa_s^{-2} \mathbf{R}_3^{k,v} \\ \kappa_s^2 \mathbf{R}_3^{k,v} & \kappa_s^1 \mathbf{R}_4^{k,v} & \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,v} & \kappa_s^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v} \\ \kappa_s^3 \mathbf{R}_2^{k,v} & \kappa_s^2 \mathbf{R}_3^{k,v} & \kappa_s^1 \mathbf{R}_4^{k,v} & \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,v} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.98})$$

Da sowohl die Lösung als auch ihre örtliche Ableitung am linken Rand durch die Randbedingungen (C.90) vorgegeben sind, folgt für die in (C.94) eingeführten Koeffizienten $\alpha = \beta = 0$. Die Lösung lautet damit

$$\begin{pmatrix} w(v, s) \\ \frac{\partial w(v, s)}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 w(v, s)}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^3 w(v, s)}{\partial v^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa_s^{-2} \mathbf{R}_3^{k,v} & \kappa_s^{-3} \mathbf{R}_4^{k,v} \\ \kappa_s^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v} & \kappa_s^{-2} \mathbf{R}_3^{k,v} \\ \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,v} & \kappa_s^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v} \\ \kappa_s^1 \mathbf{R}_4^{k,v} & \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^v \begin{pmatrix} \kappa_s^{-3} \mathbf{R}_4^{k,v-\tau} \\ \kappa_s^{-2} \mathbf{R}_3^{k,v-\tau} \\ \kappa_s^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v-\tau} \\ \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,v-\tau} \end{pmatrix} b_s u(\tau) d\tau. \quad (\text{C.99})$$

Zur Bestimmung der verbleibenden Größen am linken Rand γ, δ werden die bislang ungenutzten Randbedingungen (C.95) bezüglich des rechten Randes $v = L$ in Kombination mit den letzten beiden Zeilen der Lösung (C.99) verwendet

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,L} & \kappa_s^{-1} \mathbf{R}_2^{k,L} \\ \kappa_s^1 \mathbf{R}_4^{k,L} & \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} + \int_0^L \begin{pmatrix} \kappa_s^{-1} \mathbf{R}_2^{k,L-\tau} \\ \kappa_s^0 \mathbf{R}_1^{k,L-\tau} \end{pmatrix} b_s u(\tau) d\tau. \quad (\text{C.100})$$

Das Auflösen der so entstehenden Gleichungen führt auf

$$\gamma = \kappa_s^{-1} \frac{\left(\int_0^L \mathbf{R}_2^{k,L} \mathbf{R}_1^{k,L-\tau} b_s u(\tau) - \mathbf{R}_1^{k,L} \mathbf{R}_2^{k,L-\tau} b_s u(\tau) d\tau \right)}{2(1 + \cos(k) \cosh(k))}, \quad (\text{C.101})$$

$$\delta = \kappa_s^0 \frac{\left(\int_0^L \mathbf{R}_4^{k,L} \mathbf{R}_2^{k,L-\tau} b_s u(\tau) - \mathbf{R}_1^{k,L} \mathbf{R}_1^{k,L-\tau} b_s u(\tau) d\tau \right)}{2(1 + \cos(k) \cosh(k))}. \quad (\text{C.102})$$

Das Einsetzen der zuletzt ermittelten Größen in (C.99) vervollständigt die Lösung des inhomogenen Randwertproblems gemäß (C.92). Unter der Annahme einer entsprechenden Wahl bezüglich der komplexen Variable s steht somit eine exakte Formulierung der Übertragungsfunktion des trimorphen Biegewandlers bezüglich aller Frequenzen, von der als Eingang angenommenen elektrischen Spannung an den piezoaktiven Schichten, auf die orts- und frequenzabhängigen Zustandsgrößen gemäß (C.93) zur Verfügung.

Darüber hinaus folgt unter Berücksichtigung eines Ausgangsoperators unmittelbar die geschlossene Form der exakten Übertragungsfunktion des Modells des trimorphen Biegewandlers. Dazu wird eine Messung der Auslenkung an einem diskreten Punkt $v = v_{\text{Mess}}$ angenommen. Allgemein gilt für die resultierende Ein-/Ausgangsabbildung

$$Cx(v, s) = C\Phi_s(v, s) x(0, s) + \int_0^v C\Phi_s(v - \tau, s) B_s u(\tau) d\tau, \quad (\text{C.103})$$

wobei in Anbetracht der Darstellung (C.92) formal der Zusammenhang

$$y(s) = Cx(v, s) = w(v_{\text{Mess}}, s) \quad (\text{C.104})$$

folgt. Zur Herleitung eines geschlossenen Ausdrucks für das gesuchte Übertragungsverhalten werden die Betrachtungen daher auf die erste Zeile von (C.99) eingeschränkt

$$w(v, s) = \frac{1}{2} \left(\kappa_s^{-2} \mathbf{R}_3^{k,v} \gamma + \kappa_s^{-3} \mathbf{R}_4^{k,v} \delta \right) + \frac{\kappa_s^{-3} b_s}{2} \int_0^v \mathbf{R}_4^{k,v-\tau} u(\tau) d\tau. \quad (\text{C.105})$$

Die nicht eingesetzten Koeffizienten γ und δ sind durch (C.101) beziehungsweise (C.102) beschrieben. Die durch (C.97) definierten Rayleigh-Koeffizienten sind stetig differenzierbar und werden an dieser Stelle bei einem Vorgehen entsprechend einer distributiven Ableitung (Definition 95) als Testfunktionen angenommen. Unter der Annahme der zweifachen örtlichen Ableitung der Ortsfunktion als vom Ort abhängige Eingangsgröße

$$u(\tau) = \frac{\partial \delta_0(\tau)}{\partial v} - \frac{\partial \delta_L(\tau)}{\partial v}, \quad (\text{C.106})$$

vereinfachen sich die in (C.101) und (C.102) auftretenden Integral-Terme zu

$$\int_0^L \mathbf{R}_1^{k,L-\tau} u(\tau) d\tau = \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial v} - \frac{\partial \mathbf{R}_1^L}{\partial v} = -\kappa_s^1 \mathbf{R}_4^{k,L}, \quad (\text{C.107})$$

$$\int_0^L \mathbf{R}_2^{k,L-\tau} u(\tau) d\tau = \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial v} - \frac{\partial \mathbf{R}_2^L}{\partial v} = \kappa_s^1 \left(\mathbf{R}_1^{k,0} - \mathbf{R}_1^{k,L} \right). \quad (\text{C.108})$$

Das Einsetzen dieser Zusammenhänge in (C.101) und (C.102) sowie anschließendes Auflösen nach γ beziehungsweise δ führt auf

$$\gamma = b_s \frac{\left(\mathbf{R}_1^{L^2} - \mathbf{R}_1^L \mathbf{R}_1^0 - \mathbf{R}_2^L \mathbf{R}_4^L \right)}{2(1 + \cos(k) \cosh(k))}, \quad \delta = \kappa_s^1 b_s \frac{\mathbf{R}_4^{k,L} \mathbf{R}_1^{k,0}}{2(1 + \cos(k) \cosh(k))}. \quad (\text{C.109})$$

Ferner gilt für den Integralterm aus (C.105)

$$\int_0^v \mathbf{R}_4^{k,v-\tau} u(\tau) d\tau = \frac{\partial \mathbf{R}_4^v}{\partial v} = -\kappa_s^1 \mathbf{R}_3^{k,v}, \quad (\text{C.110})$$

damit lässt sich (C.105) zu

$$w(v, s) = \frac{\kappa_s^{-2} b_s}{2} \left(\frac{\mathbf{R}_3^{k,v} \left(\mathbf{R}_1^{k,L^2} - \mathbf{R}_1^{k,L} \mathbf{R}_1^{k,0} - \mathbf{R}_2^{k,L} \mathbf{R}_4^{k,L} \right) + \mathbf{R}_4^{k,v} \mathbf{R}_4^{k,L} \mathbf{R}_1^{k,0}}{2(1 + \cos(k) \cosh(k))} - \mathbf{R}_3^{k,v} \right) \quad (\text{C.111})$$

umformulieren. Unter der Annahme einer örtlich diskreten Messung an einer beliebigen Stelle $v_{\text{Mess}} \in \overline{\Omega}$ auf dem örtlichen Gebiet des Beispielsystems und unter Berücksichtigung der Zusammenhänge aus (C.91) führt die Anwendung des Ausgangsoperators auf das gesuchte Ein-/Ausgangsverhalten als Funktion der komplexen Größe s und dem Ort der Messung

$$\frac{w(v_{\text{Mess}}, s)}{V_{\text{Pk}}(s)} = \left(\frac{k}{L}\right)^{-2} \frac{\alpha_{\text{In}}}{2(\alpha_{\text{S}} + 2\alpha_{\text{KV}}s)} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_3^{k, v_{\text{Mess}}} \left(\mathbf{R}_1^{k, L^2} - \mathbf{R}_1^{k, L} \mathbf{R}_1^{k, 0} - \mathbf{R}_2^{k, L} \mathbf{R}_4^{k, L} \right) + \mathbf{R}_4^{k, v_{\text{Mess}}} \mathbf{R}_4^{k, L} \mathbf{R}_1^{k, 0}}{2(1 + \cos(k) \cosh(k))} - \mathbf{R}_3^{k, v_{\text{Mess}}} \right) \quad (\text{C.112})$$

mit k aus Gleichung (C.91). Die gezeigte Übertragungsfunktion gibt zu jedem beliebigen diskreten Messpunkt und hinsichtlich der komplexen Variabel s das exakte aus den Modellgleichungen des Beispielsystems resultierende Übertragungsverhalten an. Die Zugehörigkeit des Beispielsystems zur Pritchard-Salamon-Klasse unter Annahme einer punktförmigen Messung wird in Abschnitt 2.3.3 gezeigt. Nach der Wahl eines zulässigen v_{Mess} kann (C.112) damit als Darstellung des Beispielsystems in der Pritchard-Salamon-Klasse interpretiert werden.

Insbesondere die Annahme einer Messung der Auslenkung des trimorphen Biegewandlers am rechten Rand des örtlichen Gebiets $v_{\text{Mess}} = L$ führt ausgehend von (C.112) mit $k = L \left(-\frac{s(s+\alpha_{\text{V}})}{\alpha_{\text{S}} + \alpha_{\text{KV}}s} \right)^{\frac{1}{4}}$ auf ein vergleichsweise übersichtliches Übertragungsverhalten des Beispielsystems

$$\frac{w(L, s)}{V_{\text{Pk}}(s)} = - \left(\frac{k}{L}\right)^{-2} \frac{\alpha_{\text{In}}}{\alpha_{\text{S}} + 2\alpha_{\text{KV}}s} \frac{\sin(k) \sinh(k)}{1 + \cos(k) \cosh(k)} \quad (\text{C.113})$$

in Form einer transzendenten Funktion.

D Anhang zur Systemanalyse

D.1 Anhang zur Spektralanalyse

Dieser Anhang enthält das detaillierte Vorgehen zur Lösung des Eigenwertproblems des Systemoperators des Beispielsystems sowie zur Lösung verschiedener assoziierter Eigenwertprobleme. Dazu zählen das Eigenwertproblem des adjungierten Systemoperators und des Steifigkeitsoperators.

D.1.1 Eigenwertproblem des Systemoperators des Beispielsystems

Der vorliegende Abschnitt beinhaltet die Lösung des Eigenwertproblems des Beispielsystems. Die Definition des Eigenwertproblems linearer Operatoren findet sich in Abschnitt B.7.3. Ausgehend vom allgemeinen Fall (B.79) lautet das Eigenwertproblem des Beispielsystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -S & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{I}. \quad (\text{D.1})$$

Unter Berücksichtigung des Steifigkeits- und des Dämpfungsoperators gemäß (A.58) beziehungsweise (A.67) sowie den Zusammenhängen aus (A.23) folgen für $i \in \mathbb{I}$ die skalaren Gleichungen zu

$$\lambda_i v_{i,1} = v_{i,2} \quad (\text{D.2})$$

$$\lambda_i v_{i,2} = -\alpha_S \frac{\partial^4 v_{i,1}}{\partial v^4} - 2 \left(\alpha_{KV} \frac{\partial^4 v_{i,2}}{\partial v^4} + \alpha_V v_{i,2} \right). \quad (\text{D.3})$$

Durch das Einsetzen von (D.2) in (D.3) ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung bezüglich des Ortes. Da die Eigenwerte nicht von der örtlichen Unabhängigen abhängen gilt

$$\lambda_i^2 v_{i,1} + \alpha_S \frac{\partial^4 v_{i,1}}{\partial v^4} + 2\lambda_i \left(\alpha_{KV} \frac{\partial^4 v_{i,1}}{\partial v^4} + \alpha_V v_{i,1} \right) = 0. \quad (\text{D.4})$$

Durch das Auflösen zur höchsten Ableitung sowie dem Äquivalent zu der in (C.91) eingeführten Ersetzung, folgt

$$\frac{\partial^4 v_{i,1}}{\partial v^4} = \left(\frac{k}{L} \right)^4 v_{i,1} = \kappa_\lambda^4 v_{i,1} = -\frac{\lambda_i^2 + 2\alpha_V \lambda_i}{\alpha_S + 2\lambda_i \alpha_{KV}} v_{i,1}. \quad (\text{D.5})$$

Analog zum Vorgehen zur Ermittlung der geschlossenen Formulierung der Übertragungsfunktion des Beispielsystems in Abschnitt C.5, erfolgt die Überführung in ein System aus Gleichungen erster Ordnung entsprechend (C.92). Unter Annahme eines Zustandsvektors der Form

$$x(v) = \left(v_1 \quad \frac{\partial v_1}{\partial v} \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial v^2} \quad \frac{\partial^3 v_1}{\partial v^3} \right)^T, \quad (\text{D.6})$$

bei dem die explizite Nennung der Unabhängigen auf der rechten Seite vernachlässigt wird, lautet das resultierende Gleichungssystem

$$\frac{\partial x(v)}{\partial v} = A_s x(v) \quad (\text{D.7})$$

wobei A_s durch (C.92) auf Seite 349 mit $\kappa_s^4 = \kappa_\lambda^4$ definiert ist. Da die Eigenvektoren die Randbedingungen erfüllen müssen, definiert (D.7) zusammen mit den Randbedingungen des Beispielsystems gemäß (A.26) sowie (A.27) ein Randwertproblem auf dem örtlichen Intervall. (D.7) ist das zum inhomogenen Randwertproblem (C.92) korrespondierende homogene Randwertproblem, dass aus (C.92) formal unter Vernachlässigung des Eingangsterms hervorgeht. Die Eigenwerte von A_s aus (D.7)

$$\lambda_{A_s} = \begin{cases} \pm i\kappa_\lambda \\ \pm \kappa_\lambda \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

werden als Argument des allgemeinen Lösungsansatzes berücksichtigt. Folglich lautet der allgemeine Lösungsansatz für die erste Komponente $v_{i,1}$ der Rechtseigenvektoren in exponentieller Darstellung, unter Berücksichtigung der örtlichen Unabhängigen und unter Vernachlässigung des Zählindex

$$v_1(v) = \tilde{A}_1 e^{\kappa_\lambda v} + \tilde{A}_2 e^{-\kappa_\lambda v} + \tilde{A}_3 \cos(\kappa_\lambda v) - \tilde{A}_4 \sin(\kappa_\lambda v). \quad (\text{D.9})$$

Die äquivalente Darstellung mittels transzendenter Funktionen ergibt sich mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} s_v^\kappa &= \sin(\kappa_\lambda v) & sh_v^\kappa &= \sinh(\kappa_\lambda v) \\ c_v^\kappa &= \cos(\kappa_\lambda v) & ch_v^\kappa &= \cosh(\kappa_\lambda v) \end{aligned}$$

sowie einer Anpassung der Koeffizienten zu

$$v_1(v) = A_1 c_v^\kappa + A_2 s_v^\kappa + A_3 ch_v^\kappa + A_4 sh_v^\kappa. \quad (\text{D.10})$$

Die im allgemeinen Lösungsansatz auftretenden Koeffizienten werden mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt, hängen also letztendlich von der Lagerung des betrachteten trimorphen Biegewandlers ab. Um die Randbedingungen gemäß (A.26) und (A.27) zu berücksichtigen, werden die Ableitungen des allgemeinen Lösungsansatzes bezüglich der örtlichen Unabhängigen bis zur dritten Ordnung gebildet. Darüber hinaus wird auch die vierte örtliche Ableitung berechnet, um das Reproduzieren des ortsabhängigen Anteils aus (D.10) zu demonstrieren und darüber hinaus Vorarbeit bezüglich des Eigenwertproblems des Steifigkeitsoperators in D.1.3 zu leisten. Für den

Lösungsansatz und die entsprechenden Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^0 v_1(v)}{\partial v^0} &= \kappa_\lambda^0 (A_1 s_v^\kappa + A_2 \text{sh}_v^\kappa + A_3 c_v^\kappa + A_4 \text{ch}_v^\kappa), \\
 \frac{\partial^1 v_1(v)}{\partial v^1} &= \kappa_\lambda^1 (A_1 c_v^\kappa + A_2 \text{ch}_v^\kappa - A_3 s_v^\kappa + A_4 \text{sh}_v^\kappa), \\
 \frac{\partial^2 v_1(v)}{\partial v^2} &= \kappa_\lambda^2 (-A_1 s_v^\kappa + A_2 \text{sh}_v^\kappa - A_3 c_v^\kappa + A_4 \text{ch}_v^\kappa), \\
 \frac{\partial^3 v_1(v)}{\partial v^3} &= \kappa_\lambda^3 (-A_1 c_v^\kappa + A_2 \text{ch}_v^\kappa + A_3 s_v^\kappa + A_4 \text{sh}_v^\kappa), \\
 \frac{\partial^4 v_1(v)}{\partial v^4} &= \kappa_\lambda^4 (A_1 s_v^\kappa + A_2 \text{sh}_v^\kappa + A_3 c_v^\kappa + A_4 \text{ch}_v^\kappa).
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

Der Verlauf der Lösung auf dem abgeschlossenen örtlichen Intervall wird in Abhängigkeit von der Lösung am linken Rand und dem Äquivalent zur stark stetigen Halbgruppe im Fall der zeitlichen Evolution (C.98) durch

$$x(v) = \Phi_s(v) x(0), \quad v \in \Omega \cup \partial\Omega \tag{D.12}$$

beschrieben. Die Anfangsbedingungen ergeben sich durch das Auswerten von (D.11) an der Stelle $v = 0$ allgemein zu

$$x(0) = \left(\kappa_\lambda^0 (A_1 + A_3) \quad \kappa_\lambda^1 (A_2 + A_4) \quad \kappa_\lambda^2 (-A_1 + A_3) \quad \kappa_\lambda^3 (-A_2 + A_4) \right)^T. \tag{D.13}$$

Die Berücksichtigung der spezifischen Randbedingungen am linken Rand

$$v_1(0) = \left. \frac{\partial v_1(v)}{\partial v} \right|_{v=0} = 0 \tag{D.14}$$

erlaubt es, die in (D.13) enthaltenen Koeffizienten ins Verhältnis zu setzen

$$A_3 = -A_1 \quad A_4 = -A_2. \tag{D.15}$$

Nach erneutem Einsetzen der spezifischen Randbedingungen sowie dem im letzten Schritt bestimmten Verhältnisses der Koeffizienten lautet (D.12) in ausführlicher Schreibweise unter Verwendung der in (C.97) eingeführten Rayleigh-Funktionen

$$x(v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa_\lambda^0 \mathbf{R}_1^{k,v} & \kappa_\lambda^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v} & \kappa_\lambda^{-2} \mathbf{R}_3^{k,v} & \kappa_\lambda^{-3} \mathbf{R}_4^{k,v} \\ \kappa_\lambda^1 \mathbf{R}_4^{k,v} & \kappa_\lambda^0 \mathbf{R}_1^{k,v} & \kappa_\lambda^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v} & \kappa_\lambda^{-2} \mathbf{R}_3^{k,v} \\ \kappa_\lambda^2 \mathbf{R}_3^{k,v} & \kappa_\lambda^1 \mathbf{R}_4^{k,v} & \kappa_\lambda^0 \mathbf{R}_1^{k,v} & \kappa_\lambda^{-1} \mathbf{R}_2^{k,v} \\ \kappa_\lambda^3 \mathbf{R}_2^{k,v} & \kappa_\lambda^2 \mathbf{R}_3^{k,v} & \kappa_\lambda^1 \mathbf{R}_4^{k,v} & \kappa_\lambda^0 \mathbf{R}_1^{k,v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\kappa_\lambda^2 A_1 \\ -2\kappa_\lambda^3 A_2 \end{pmatrix}. \tag{D.16}$$

Einer der beiden verbleibenden Koeffizienten A_1, A_2 wird auf Basis der am rechten Rand gültigen Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial^2 v_1(v)}{\partial v^2} \right|_{v=L} = \left. \frac{\partial^3 v_1(v)}{\partial v^3} \right|_{v=L} = 0 \tag{D.17}$$

sowie der bereits festgelegten Koeffizienten (D.15) zu

$$0 = +A_1 \mathbf{R}_1^{k,L} + A_2 \mathbf{R}_2^{k,L} \quad (\text{D.18})$$

$$\Rightarrow A_2 = -A_1 \frac{\left(\mathbf{R}_1^{k,L} \right)}{\left(\mathbf{R}_2^{k,L} \right)} = -A_1 \frac{(\cosh k + \cos k)}{(\sinh k + \sin k)} \quad (\text{D.19})$$

bestimmt. Jede Lösung des homogenen Gleichungssystems (D.16) genügt den Randbedingungen. Damit eine nichttriviale Lösung $A_1 \neq 0$ den Randbedingungen am rechten Rand genügt muss die Abbildung, der Teile der Lösung die am linken Rand nicht identisch Null sind, singulär werden

$$\left| \begin{pmatrix} \kappa_\lambda^0 \mathbf{R}_1^{k,L} & \kappa_\lambda^{-1} \mathbf{R}_2^{k,L} \\ \kappa_\lambda^1 \mathbf{R}_4^{k,L} & \kappa_\lambda^0 \mathbf{R}_1^{k,L} \end{pmatrix} \right| = 0. \quad (\text{D.20})$$

Aus dieser Determinanten-Bedingung resultiert die transzendente Gleichung

$$\cos k + \frac{1}{\cosh k} = 0, \quad (\text{D.21})$$

die jene k beschreibt, für die eine nichttriviale Lösung von (D.16) existiert. Die zulässigen k sind entweder reell und positiv oder rein imaginär. Im Eigenwertproblem treten diese Lösungen ausschließlich in ihrer vierten Potenz auf. Da zudem $i^4 = 1$ gilt, werden ausschließlich die reellen positiven Lösungen $k > 0$ berücksichtigt ([CM09] (S. 1108)). Aus der zugehörigen grafischen Dar-

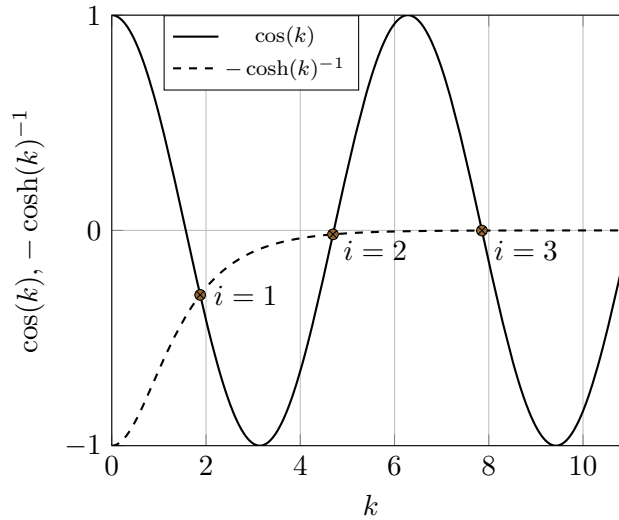


Abbildung D.1: Grafische Darstellung der Summanden aus (D.21).

stellung in Abb. D.1 wird anschaulich deutlich, dass unendlich viele Schnittpunkte zwischen der trigonometrischen Funktion und der Hyperbelfunktion aus (D.21) für $k > 0$ existieren. Demnach sind auch unendlich viele nichttriviale Lösungen für das Gleichungssystem (D.16) zu erwarten. Die Menge der zulässigen k wird mittels eines Zählindex beschrieben und durch $\{k_{|i|}\}_{i \in \mathbb{I}}$ bezeichnet. Der verbleibende Koeffizient A_1 dient in D.1.4 der Normierung der Eigenvektoren. Der Normierungskoeffizient A_1 ist in Abhängigkeit vom Zählindex wählbar und wird daher im Weiteren durch v_i^* ersetzt. Ferner gilt $\kappa_{|i|} = k_{|i|} L^{-1}, \forall i \in \mathbb{I}$.

Mit den in (D.15) und (D.18) bestimmten Koeffizienten sowie der Abkürzung des ortsabhängigen Teils durch

$$\psi_{|i|} = \left(c_v^{\kappa_{|i|}} - \text{ch}_v^{\kappa_{|i|}} - \frac{(\cosh k_{|i|} + \cos k_{|i|})}{(\sinh k_{|i|} + \sin k_{|i|})} s_v^{\kappa_{|i|}} + \frac{(\cosh k_{|i|} + \cos k_{|i|})}{(\sinh k_{|i|} + \sin k_{|i|})} \text{sh}_v^{\kappa_{|i|}} \right), \quad (\text{D.22})$$

lauten die Rechtseigenvektoren des Systemoperators des Beispielsystems unter Berücksichtigung von (D.2) demzufolge

$$v_i = v_i^* \begin{pmatrix} \psi_{|i|} \\ \lambda_i \psi_{|i|} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{I}. \quad (\text{D.23})$$

Unter Berücksichtigung der $\{k_{|i|}\}_{i \in \mathbb{I}}$ ergeben sich die Eigenwerte des Beispielsystems aus der Lösung des aus (D.5) stammenden Zusammenhangs

$$\lambda_i^2 + 2\lambda_i (\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4) + \alpha_S \kappa_{|i|}^4 = 0 \quad (\text{D.24})$$

zu

$$\lambda_i = \begin{cases} -(\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4) - i \sqrt{\alpha_S \kappa_{|i|}^4 - (\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4)^2}, & i \in \tilde{\mathbb{I}}^+, \\ -(\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4) + i \sqrt{\alpha_S \kappa_{|i|}^4 - (\alpha_V + \alpha_{KV} \kappa_{|i|}^4)^2}, & i \in \mathbb{I}^-. \end{cases} \quad (\text{D.25})$$

Anhand der voranstehenden Bestimmungsgleichung lassen sich verschiedenen Aussagen über die resultierenden Eigenwerte treffen. Die zugehörigen Betrachtungen finden sich in Abschnitt 3.1.2.

D.1.2 Eigenwertproblem des adjungierten Systemoperators des Beispielsystems

Das Eigenwertproblem des zum Systemoperator aus (D.1) adjungierten Operators A^* lautet

$$(\bar{\lambda}_i I - A^*) w_i = 0. \quad (\text{D.26})$$

Auf Basis des durch Gleichung (3.4) bestimmten adjungierten Systemoperators des Beispielsystems gilt mit $w_i = \begin{pmatrix} w_{i,1} & w_{i,2} \end{pmatrix}^T$ in skalarer Schreibweise

$$\bar{\lambda}_i w_{i,1} = w_{i,2} \quad (\text{D.27})$$

$$\bar{\lambda}_i w_{i,2} = \alpha_S w_{i,1}^{IV} - 2(\alpha_{KV} w_{i,2}^{IV} + \alpha_V w_{i,2}). \quad (\text{D.28})$$

Die Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ des adjungierten Systemoperators sind konjugiert komplex zu den Eigenwerten des Systemoperators (D.25), vergleiche Abschnitt B.8.3. Für die zugehörigen Eigenvektoren gilt

$$w_i = w_i^* \begin{pmatrix} \psi_{|i|} \\ -\bar{\lambda}_i \psi_{|i|} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{I}. \quad (\text{D.29})$$

Die Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators werden auch als Linkseigenvektoren des Systemoperators bezeichnet. Die in den Linkseigenvektoren auftretenden ortsabhängigen Funktionen $\psi_{|i|}$ entsprechen den durch (D.22) gegebenen Funktionen in den Rechtseigenvektoren. Der in jedem Linkseigenvektor verbleibende Koeffizient w_i^* dient in Abschnitt D.1.4 der Normierung. Eine grafische Darstellung der $\psi_{|i|}$ für $i = 1, \dots, 4$ findet sich in Abbildung 3.1 auf Seite 95.

D.1.3 Eigenwertproblem des Steifigkeitsoperators

Um einige Eigenschaften des ortsabhängigen Teils der Rechts- beziehungsweise Linkseigenvektoren des Systemoperators zu verdeutlichen, wird das Eigenwertproblem des Steifigkeitsoperators betrachtet. Die an dieser Stelle angenommenen Randbedingungen entsprechen den Randbedingungen des Beispielsystems gemäß Abschnitt A.1.6. Auf einem im Folgenden als geeignet vorausgesetztem Definitionsbereich ist der Steifigkeitsoperator bekanntermaßen selbstadjungiert und besitzt ein reines Punktspektrum. Für den in Abschnitt A.3.2 durch Gleichung (A.58) bestimmten Operator

$$S : \mathcal{D}(S) \subset H \rightarrow H$$

$$x \mapsto Sx = \alpha_S \frac{\partial^4 x}{\partial v^4} \quad (\text{D.30})$$

lautet das Eigenwertproblem

$$\alpha_S \frac{\partial^4 v_{S,i}}{\partial v^4} = \lambda_{S,i} v_{S,i}, \quad \forall i \in \mathbb{I}^+. \quad (\text{D.31})$$

Eine detaillierte Untersuchung der Eigenschaften des Steifigkeitsoperators findet sich in Abschnitt A.3.2. Die Eigenvektoren eines selbstadjungierten Operators sind stets paarweise orthogonal zueinander. Ein Vorgehen analog zu Abschnitt D.1.1 zeigt, dass die in (D.22) definierten örtlichen Anteile der Eigenfunktionen des Systemoperators $\psi_{|i|}$ das Eigenwertproblem aus (D.31) lösen. Die $\psi_{|i|}$ sind stets reell und stimmen für betragsgleich Zählindizes $i \in \mathbb{I}$ überein. Das Umschreiben des Zählindex ist damit möglich und in (D.31) gilt $v_{S,i} = \psi_i, \forall i \in \mathbb{I}^+$. Die Menge der Eigenvektoren die das Eigenwertproblem (D.31) lösen, wird daher mit $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bezeichnet. Zudem sind aus (D.11) die zugehörigen Eigenwerte

$$\lambda_{S,i} = \alpha_S \left(\frac{k_{|i|}}{L} \right)^4 = \alpha_S \kappa_{|i|}^4 \quad (\text{D.32})$$

für alle $i \in \mathbb{I}$ beziehungsweise für alle $i \in \mathbb{I}^+$ abzulesen. Die Orthogonalität der Eigenvektoren des Steifigkeitsoperators im Sinne des L_2 -Innenprodukts führt ohne weitere Normierung auf

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^L \psi_i \overline{\psi_j} dy = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ L & i = j \end{cases}, \quad i, j \in \mathbb{I}^+. \quad (\text{D.33})$$

Der betrachtete selbstadjungierte Operator $S = S^*$ erfüllt die in Lemma 45 aufgeführten Bedingungen für die Existenz einer ebenfalls selbstadjungierten, positiven Quadratwurzel $S^{\frac{1}{2}} = S^{\frac{1}{2}*}$, da zudem $\psi_i \in \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(S^{\frac{1}{2}}), \forall i \in \mathbb{I}^+$ gilt, folgt

$$\langle S\psi_i, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle S^{\frac{1}{2}}\psi_i, S^{\frac{1}{2}}\psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \alpha_S \kappa_{|i|}^4 L = \lambda_{S,i} L & i = j \end{cases}, \quad i, j \in \mathbb{I}^+. \quad (\text{D.34})$$

Die aufgeführten Eigenschaften der ψ_i erleichtern die Normierung der Eigenvektoren des Systemoperators in D.1.4 erheblich, da insbesondere auf die aufwendige Berechnung von Integralen verzichtet werden kann. Eine zusätzliche Vereinfachung wird durch die Normierung der Eigenvektoren des Steifigkeitsoperators hinsichtlich des kanonischen Innenprodukts auf $L^2(\Omega)$ erreicht.

Ausgehend von (D.33) wird die abkürzende Schreibweise

$$\tilde{\psi}_i = L^{-\frac{1}{2}}\psi_i, \quad \forall i \in \mathbb{I}^+ \quad (\text{D.35})$$

eingeführt, mit der

$$\langle \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \quad \forall i, j \in \mathbb{I}^+ \quad (\text{D.36})$$

und somit $\|\tilde{\psi}_i\|_{L^2(\Omega)} = 1, \forall i \in \mathbb{I}^+$ gilt.

D.1.4 Normierung der Eigenvektoren von A und A^*

In diesem Abschnitt werden die Eigenvektoren des Systemoperators und die Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators des Beispielsystems derart normiert, dass die beiden Mengen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ biorthogonal $\langle v_i, w_j \rangle_{\mathcal{X}} = \delta_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{I}$ zueinander sind. Die geschilderte Normierung geschieht als Vorarbeit auf den in Abschnitt 3.1.3 geführten Nachweis, dass die Eigenvektoren des Systemoperators eine Rieszbasis des Zustandsraums bilden und die Elemente des Zustandsraums sich somit in einer Fourierreihe gemäß (B.44) darstellen lassen.

Das energetischen Innenprodukt auf dem Zustandsraums $\mathcal{X} = H_{\frac{1}{2}} \times H$ lautet

$$\begin{aligned} \langle v_i, w_j \rangle_{\mathcal{X}} &= \langle S^{\frac{1}{2}}v_{i,1}, S^{\frac{1}{2}}w_{j,1} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v_{i,2}, w_{j,2} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} S^{\frac{1}{2}}v_{i,1} \overline{S^{\frac{1}{2}}w_{j,1}} dv + \int_{\Omega} v_{i,2} \overline{w_{j,2}} dv. \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Durch das Einsetzen der ermittelten Eigenvektoren (D.23) beziehungsweise (D.29) folgt unter Berücksichtigung von (D.35)

$$\int_{\Omega} S^{\frac{1}{2}}v_{i,1} \overline{S^{\frac{1}{2}}w_{j,1}} dv + \int_{\Omega} v_{i,2} \overline{w_{j,2}} dv = v_i^* \overline{w_j^*} \left(\int_{\Omega} S^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}_{|i|} \overline{S^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}_{|j|}} dv - \int_{\Omega} \lambda_i \tilde{\psi}_{|i|} \overline{\lambda_j \tilde{\psi}_{|j|}} dv \right). \quad (\text{D.38})$$

Aus der Definition des Steifigkeitsoperators, dessen Eigenwerten $\lambda_{S,i} = \alpha_S \kappa_{|i|}^4$ und den Zusammenhängen aus D.1.3 ergibt sich

$$v_i^* \overline{w_j^*} \left(\int_{\Omega} S^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}_{|i|} \overline{S^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}_{|j|}} dv - \int_{\Omega} \lambda_i \tilde{\psi}_{|i|} \overline{\lambda_j \tilde{\psi}_{|j|}} dv \right) = v_i^* \overline{w_i^*} (\lambda_{S,i} - \lambda_i^2). \quad (\text{D.39})$$

Um die gewünschte Normierung zu erreichen stehen damit zwei Gleichung für die Bestimmung der Koeffizienten $w_i^*, v_i^*, i \in \mathbb{I}$ zur Verfügung. Unter der Voraussetzung eines von Null verschiedenen Nenners gilt

$$v_{+i}^* \overline{w_{+i}^*} = (\lambda_{S,i} - \lambda_{+i}^2)^{-1} \quad v_{-i}^* \overline{w_{-i}^*} = (\lambda_{S,i} - \lambda_{-i}^2)^{-1} \quad (\text{D.40})$$

für $i \in \mathbb{I}^+$. Für die Koeffizienten der Eigenvektoren des Systemoperators folgt

$$v_{+i}^* = (\lambda_{S,i} - \lambda_{+i}^2)^{-\frac{1}{2}} \quad v_{-i}^* = (\lambda_{S,i} - \lambda_{-i}^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{D.41})$$

die Koeffizienten der Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators lauten

$$w_{+i}^* = \overline{v_{+i}^*} = \overline{(\lambda_{S,i} - \lambda_{+i}^2)^{-\frac{1}{2}}} \quad w_{-i}^* = \overline{v_{-i}^*} = \overline{(\lambda_{S,i} - \lambda_{-i}^2)^{-\frac{1}{2}}}. \quad (\text{D.42})$$

Unter Verwendung der so bestimmten Koeffizienten in den Gleichungen (D.23) bzw. (D.29) erfüllen die Mengen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ den Zusammenhang $\langle v_i, w_j \rangle_{\mathcal{X}} = \delta_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{I}$ und sind biorthogonal zueinander.

D.2 Anhang zur Stabilitätsanalyse

D.2.1 Differenzierbare und analytische Halbgruppen

Dieser Abschnitt beinhaltet mit der Definition differenzierbarer und analytischer Halbgruppen die Einführung zweier Untermengen der stark stetigen Halbgruppen. Die Hervorhebung dieser Arten von Halbgruppen begründet sich in den besonders angenehmen Eigenschaften differenzierbarer und analytischer Halbgruppen. In Abschnitt 3.2.3 findet sich der Nachweis, dass die dem Beispielsystem zugeordnete Halbgruppe den Anforderungen an eine analytische Halbgruppe genügt.

Differenzierbare Halbgruppen

Lediglich für beschränkte Operatoren und somit $\mathcal{D}(T) = X$ kann bezüglich den von ihnen erzeugten Halbgruppen von der zeitlichen Differenzierbarkeit der Abbildung $t \mapsto \Phi(t)x$ für alle $x \in X$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ausgegangen werden. Infinitesimale Erzeuger $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ stark stetiger Halbgruppen sind im Allgemeinen nicht beschränkt und diejenigen $x \in X$, für die die Abbildung $t \mapsto \Phi(t)x$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar ist, werden gesondert als Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ von T hervorgehoben (Definition 3).

Differenzierbare Halbgruppen sind stark stetige Halbgruppen, die zusätzlich die Differenzierbarkeit von $t \mapsto \Phi(t)x$ für alle $x \in X$ aber nicht auf dem gesamten Zeitintervall $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ aufweisen ([EN00] (S. 109)). In gewisser Hinsicht muss also der Erzeuger einer solchen Halbgruppe Eigenschaften aufweisen, sodass anschaulich zumindest im Hinblick auf die Abbildung $t \mapsto \Phi(t)x$ von einer gewissen Ähnlichkeit mit einem beschränkten Operator zu sprechen ist. Die Definition differenzierbarer Halbgruppen findet sich beispielsweise in [EN00] oder in der folgenden Form in [Paz83] (S. 51). Darüber hinaus enthält [DL92] (S. 365ff) weiterführende Ausführungen zu dieser Unterklasse der stark stetigen Halbgruppen.

Definition 102 (Differenzierbare Halbgruppe) Es sei X ein Banachraum und $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X . Dann heißt $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ differenzierbar für $t > t_0$, wenn die Abbildung $t \mapsto \Phi(t)x$ für alle $x \in X$ und $t > t_0$ differenzierbar ist. Zudem heißt $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ differenzierbar, falls Differenzierbarkeit von $t \mapsto \Phi(t)x$ für alle $x \in X$ für $t > 0$ vorliegt. \square

Die Definition differenzierbarer Halbgruppen beinhaltet nicht die Differenzierbarkeit für den Fall $t = 0$, da dieser nur im Fall eines beschränkten infinitesimalen Erzeugers und einer damit verbundenen gleichmäßig stetigen Halbgruppe auftreten kann ([Paz83] (S. 52) und [LGM99] (S. 47)).

Analytische Halbgruppen

Allgemeine stark stetige Halbgruppen sind für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und damit auf der nicht negativen reellen Achse definiert. Für spezielle Halbgruppen lässt sich der Definitionsbereich auf Untermengen der komplexen Ebene erweitern, die die positive reelle Achse beinhalten. Ein Spezialfall derartiger Sektoren wird durch

$$\mathbb{C}_{S_\alpha^0} = \mathbb{C}_{S_\alpha} \cup \{0\} = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid |\arg s| < \tilde{\beta} \right\} \cup \{0\} \quad (\text{D.43})$$

definiert ([Wer11] (S. 392)). Ein Sektor $\mathbb{C}_{S_\alpha^0}$ besteht damit aus der Menge der komplexen Zahlen, deren Zeiger in der komplexen Ebene mit der positiven reellen Achse einen Winkel kleiner als $\tilde{\beta}$ einschließt und der Null. Die Sektoren $\mathbb{C}_{S_\alpha^0}$ bilden die Grundlage für die Definition analytischer Halbgruppen, die in der folgenden Form an Definition 5.1. aus [Paz83] (S. 60) angelehnt ist.

Definition 103 (Analytische Halbgruppe) Es sei X ein Banachraum, ferner sei $\mathbb{C}_{S_\alpha^0} = \mathbb{C}_{S_\alpha} \cup \{0\} = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid |\arg s| < \tilde{\beta} \right\} \cup \{0\}$ und $\Phi(s) \in \mathcal{L}(X)$ für $s \in \mathbb{C}_{S_\alpha^0}$. Die Menge $\Phi(s), s \in \mathbb{C}_{S_\alpha^0}$ ist eine analytische Halbgruppe, falls

AHG1) $s \mapsto \Phi(s)$ ist analytisch in $\mathbb{C}_{S_\alpha^0}$;

AHG2) $\Phi(0) = I$;

AHG3) $\Phi(s_1 + s_2) = \Phi(s_1) \Phi(s_2)$ für $s_1, s_2 \in \mathbb{C}_{S_\alpha^0}$;

AHG4) $\lim_{s \rightarrow 0, s \in \mathbb{C}_{S_\alpha^0}} \|\Phi(s)x - x\|_X = 0$ für alle $x \in X$. \square

Wird in Definition 103 eine Einschränkung von $\mathbb{C}_{S_\alpha^0}$ auf $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vorgenommen, so genügt die daraus resultierende Halbgruppe den Anforderungen an eine stark stetige Halbgruppe aus Definition 1 und **TSS1)** aus Definition 2 ([Paz83] (S. 61)). Insbesondere entsprechen **AHG2)** und **AHG3)** den

Bedingungen an Operatorhalbgruppen **HG1)** beziehungsweise **HG2)** aus Definition 1, während **AHG4)** der Bedingung **TSS1)** an die Stetigkeit im starken Sinne aus Definition 2 entspricht.

Die Nennung verschiedener weiterführender Eigenschaften analytischer Halbgruppen findet sich beispielsweise in [Paz83], [EN00], [RR04] oder [Wer11]. Im Hinblick auf die Stabilität analytischer Halbgruppen sei an dieser Stelle die Übereinstimmung der Spektralschranke des infinitesimalen Erzeugers mit der Wachstumsgrenze der zugehörigen analytischen Halbgruppe betont, nach Satz 69 gilt $\omega_0 = s(T)$. Darüber hinaus gilt laut [Wer11] (S. 393) für analytische Halbgruppen $\Phi(t)x \in \mathcal{D}(A)$ für alle $x \in X$.

Der folgende Satz ([LGM99] (S. 48)) erlaubt es zu überprüfen, ob eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe auch den Anforderungen an eine analytische Halbgruppe genügt. Insbesondere wird in Abschnitt 3.2.3 auf Basis von **GB4)** der Nachweis geführt, dass die gleichmäßig beschränkte Halbgruppe des Beispielsystems auch eine analytische Halbgruppe ist.

Satz 67 *Es sei eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe $\Phi(t) \in \mathcal{L}(X)$ und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ der zugehörige infinitesimale Erzeuger für den $0 \in \rho(T)$ gelte. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

GB1) *Zu $\Phi(t)$ existiert eine Erweiterung zu einer in einem Sektor $S_\phi = \{z \mid |\arg z| < \phi\}$ analytischen Halbgruppe und $\Phi(z)$ ist in jedem abgeschlossene Subsektor \overline{S}_{ϕ^*} mit $\phi^* < \phi$ gleichmäßig beschränkt;*

GB2) *Es existiert eine Konstante $c_1 > 0$, sodass für alle $z = \sigma + i\tau, \sigma > 0, \tau \neq 0$ gilt*

$$\|R(z, T)\| \leq \frac{c_1}{|\tau|}; \quad (\text{D.44})$$

GB3) *Es existiert ein $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und eine Konstante $c_2 > 0$, sodass*

$$\rho(T) \supset M_S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \arg z < \phi + \frac{\pi}{2} \right| \right\} \cup \{0\} \quad (\text{D.45})$$

und für alle $z \in M, z \neq 0$ gilt

$$\|R(z, T)\| \leq \frac{c_2}{|z|}; \quad (\text{D.46})$$

GB4) *$\Phi(t)$ ist differenzierbar für $t > 0$ und mit einer Konstanten $c_3 > 0$ gilt*

$$\|T\Phi(t)\| \leq \frac{c_3}{t} \quad (\text{D.47})$$

für $t > 0$. □

Aus der engen und eindeutigen Verknüpfung von infinitesimalen Erzeuger und zugehöriger stark stetiger Halbgruppe lässt sich vermuten, dass die Erzeuger analytischer Halbgruppen über besondere Eigenschaften verfügen müssen. In der Tat handelt es sich bei den Erzeugern analytischer Halbgruppen um die in Definition 81 aus Abschnitt B.7.6 eingeführten sektoriellen Operatoren. Der Zusammenhang eines entsprechend Definition 81 hinsichtlich des Winkels β sektoriellen Operators T mit der von ihm erzeugten analytischen Halbgruppe findet sich im Detail in Proposition 4.3 aus [EN00] (S. 97) und wird hier nicht wiederholt.

D.2.2 Kriterien für die Stabilität stark stetiger Halbgruppen

Zum Nachweis der Stabilität eines unendlich-dimensionalen Systems ist es wünschenswert eine einfaches Kriterium zu Verfügung zu haben, dass nicht die explizite Kenntnis der zugehörigen Halbgruppe voraussetzt. Die verschiedenen bekannten Stabilitätskriterien lassen sich einer kurzen Übersicht aus [LGM99] (S. 10) folgend in Zeitbereichs-Kriterien, Frequenzbereichs-Kriterien, energetische Ansätze und spektrale Methoden unterteilen. Um die Kenntnisse über die Spektraleigenschaften des Beispielsystems ausnutzen zu können, bietet sich die Verwendung eines Stabilitätskriteriums aus der Gruppe der spektralen Methoden an. Dabei wird für spezielle Halbgruppen und den jeweils zugehörigen infinitesimalen Erzeuger eine Aussage über die Stabilität der Halbgruppe auf Basis der Spektraleigenschaften des infinitesimalen Erzeugers getroffen. Die Verallgemeinerung dieser aus dem Endlich-dimensionalen bekannten Methodik auf unendlich-dimensionale Systeme kann nur dann auf einfache Weise erfolgen, wenn die Spektralschranke des Systemoperators (Definition 78) eines unendlich-dimensionalen Systems mit der Wachstumsgrenze der von ihm erzeugten Halbgruppe (Definition 5) übereinstimmt. In einem solchen Fall wird die „Spectrum-determined growth assumption“ erfüllt und es lassen sich spektrale Methoden zur Stabilitätsbetrachtungen der Halbgruppe und damit des zugrunde liegenden Systems auf Basis von Satz 68 heranziehen.

Satz 68 (Exponentielle Stabilität stark stetiger Halbgruppen) Es sei $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine stark stetige Halbgruppe auf \mathcal{X} und T der zugehörige infinitesimale Erzeuger. Falls $s(T) = \omega_0$ und $s(T) < 0$ gilt, ist \mathcal{T}_Φ exponentiell stabil. \square

Unter Berücksichtigung der Definition der Wachstumsgrenze (Definition 5) und von Satz 2.59 wird für $s(T) = \omega_0 < 0$ die exponentielle Stabilität von \mathcal{T}_Φ ersichtlich. Definition 9 wird in einem solchen Fall für ein $M \geq 0$ und die Wahl $\alpha = \omega_0$ erfüllt.

Einen kurzen Überblick zu der Frage, unter welchen Bedingungen $s(T) = \omega_0$ gilt sowie die Begriffsprägung zur „Spectrum-determined growth assumption“ findet sich in [Tri75] (S. 387). Neben dem Fall beschränkter infinitesimaler Erzeuger wird dort die Gültigkeit von $s(T) = \omega_0$ auch für analytische und differenzierbare Halbgruppen hervorgehoben. Entsprechende Aussagen lassen sich [EN00] (S. 281) (Corollary 3.12) entnehmen, darüber hinaus wird dort gezeigt, für welche Halbgruppen das „Spectral Mapping Theorem“ gilt. Der folgende spektrale Abbildungssatz gilt für analytische Halbgruppen und bietet damit einen Ansatz zur Anwendung von Satz 68 auf diese Untermenge der stark stetigen Halbgruppen und damit in einem für das Beispielsystem ausreichenden Umfang. Weitere Formulierungen des spektralen Abbildungssatzes für allgemeinere Halbgruppen sind beispielsweise in [Wer11] (S. 393), [EN00] (S. 281) oder [LGM99] (S. 121) zu finden.

Satz 69 (Spektrale Abbildungssatz analytischer Halbgruppen) Es sei $\mathcal{T}_\Phi = \{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine analytische Halbgruppe auf \mathcal{X} mit dem infinitesimalen Erzeuger T , dann gilt

$$e^{t\sigma(T)} = \sigma(\Phi(t)) \setminus \{0\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{D.48})$$

und es existiert eine durch das Spektrum des Erzeugers bestimmte Wachstumsgrenze der analytischen Halbgruppe $s(T) = \omega_0$. Das Paar aus infinitesimalem Erzeuger T und analytischer Halbgruppe erfüllt die „Spectrum-determined growth assumption“. \square

Ein Beweis des voranstehenden Satzes findet sich in [EN00] (S. 280), wobei der dort aufgeführte Satz und der zugehörige Beweis für eine Übermenge der analytischen Halbgruppen formuliert ist. Falls eine stark stetige Halbgruppe durch einen diagonalisierbaren Operator erzeugt wird, lässt sich **RSO5**) aus Satz 53 von Seite 291 entnehmen, dass die Stabilität der Halbgruppe auf Basis des Spektrums des zugehörigen Operators aus \mathcal{O}_D beurteilt werden kann. Diese Eigenschaft ist als klare Analogie diagonalisierbarer Operatoren zu der Systemmatrix eines endlich-dimensionalen Systems zu werten. Falls der Systemoperator des Beispielsystems eine stark stetige Halbgruppe auf dem Zustandsraum erzeugt, kann somit allein anhand der Eigenwerte des Systemoperators die Stabilität des Beispielsystems überprüft werden.

D.3 Anhang zur Steuerbarkeitsanalyse

Ergänzend zu den in Abschnitt 3.3 eingeführten Definitionen unterschiedlicher Ausprägungen der Steuerbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme, beinhaltet dieser Abschnitt Kriterien zum Nachweis der Steuerbarkeit einer Klasse unendlich-dimensionaler System sowie verschiedene in diesem Zusammenhang interessante Literaturverweise. Einen frühen umfangreichen Überblick über die besagte Thematik bietet [Rus78]. Im gleichen Zeitraum wurden Kriterien zur Steuerbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme auf Basis der Steuerbarkeits-Gramsche in [Kob78] veröffentlicht. Eine im allgemeinen als bedeutsam bewertete Bereicherungen erfuhr dieser Themenkomplex durch die von Lions aus dem Jahre 1986 stammende Hilbert Uniqueness Method, die einen systematischen, sehr allgemeinen und zudem in gewisser Hinsicht konstruktiven Zugang zur exakten Steuerbarkeit unendlich-dimensionalen Systemen bietet ([Lio88]). Aus den zahlreichen Veröffentlichungen die die Hilbert Uniqueness Method aufgreifen seien nur [Lag91], [Ben92] und mit besonderem Bezug auf das vorliegende Beispielsystem [Tuc96] genannt. Letztgenannte Arbeit beinhaltet bezüglich eines mittels eines Piezoaktors geregelten ungedämpften Euler-Bernoulli-Balkens interessante Zusammenhänge zwischen dem Raum der exakt steuerbaren Anfangswerte und der Position des eingesetzten Piezoaktors.

Einschränkend orientiert sich im Folgenden die Auswahl der Kriterien zur Überprüfung verschiedener Ausprägungen der Steuerbarkeit unmittelbar an ihrer Eignung zur Behandlung des Beispielsystems. Demnach müssen zulässige Ansätze Systeme einschließen, die durch diagonalisierbare Systemoperatoren dargestellt sind. Zudem sind unbeschränkte Eingangoperator mit einem endlichen Definitionsbereich zu berücksichtigen. Für eine derartige Klasse von Systemen formuliert [RW00] auf Basis der Eigenwerte des Systemoperators und dem Grad der Unbeschränktheit des Eingangoperators eine Anzahl notwendiger Bedingungen, denen im Fall von exakter Steuerbarkeit zu genügen ist. Die Überprüfung der notwendigen Bedingungen eignen sich insbesondere, um das Fehlen exakter Steuerbarkeit nachzuweisen. Eine Verallgemeinerung des Hautus-Tests auf unendlich-dimensionale Systeme führt auf eine insbesondere für Systeme mit diagonalisierbarem Systemoperator einfache notwendige Bedingung bezüglich der exakten Steuerbarkeit [RW94]. Aufbauend auf dieser Vorarbeit wird in [JZ01b] beziehungsweise [JZ01a] die Äquivalenz der durch den Hautus-Test überprüften Bedingung zur exakten Beobachtbarkeit von Systemen mit diagona-

lisierbarem Systemoperator und eindimensionalem beziehungsweise endlich-dimensionalem Ausgangsraum gezeigt und somit auch der hinreichende Charakter der betreffenden Bedingung bewiesen. Aufgrund der Dualität der Konzepte der Steuer- und Beobachtbarkeit, sind die Kriterien aus [JZ01b] und [JZ01a] auch in Bezug auf die Steuerbarkeit bedeutsam. Neben einigen zur exakten Steuerbarkeit der in [JZ01b] und [JZ01a] zugelassenen Systeme äquivalenten Aussagen, enthält [JP06] zusätzlich zur approximativen und Null-Steuerbarkeit äquivalente Eigenschaften.

Zusätzlich seien abschließend noch einige weitere Abhandlungen zur Steuer- und Beobachtbarkeit mit besonderem Bezug zu Systemen genannt, die dem Beispielsystem ähnlich sind. Betrachtungen zur exakten Steuerbarkeit verschiedener Konfigurationen von schwingenden Saiten, Euler-Bernoulli und Timoshenko-Balken finden sich beispielsweise in [Lag78], [LT89], [Shu+97], [Shu05] oder [Shu07].

D.3.1 Definition der zulässigen Systeme

Mit dem Ziel die Konsistenz zwischen den nachfolgenden Betrachtungen hinsichtlich der Steuerbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme und den innerhalb dieser Arbeit verwendeten Systemklassen aufzuzeigen, wird in diesem Abschnitt kurz der den Definitionen und Kriterien zur Steuerbarkeit zugrunde liegende mathematische Rahmen aufgeführt und in den bisherigen Kontext dieser Arbeit eingeordnet. Insbesondere wird dabei herausgestellt, dass die hier zulässigen Systeme eine Anwendung der in [RW00] beziehungsweise [JP06] erarbeiteten Kriterien erlauben.

Die an dieser Stelle zugelassenen Systeme sind eine Untermenge der Pritchard-Salamon-Systeme. Als zusätzliche Voraussetzungen werden diagonalisierbare Systemoperatoren angenommen, deren Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_i, i \in \mathbb{I}^+$ die Bezeichnung $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ tragen. Ferner seien die betrachteten Systeme exponentiell stabil, es gilt also $\sup_{i \in \mathbb{I}^+} \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Im Hinblick auf das Beispielsystem wird bewusst eine Formulierung für Systeme mit exponentiell stabiler stark stetiger Halbgruppe gewählt. Das Vorgehen für Fälle, in denen keine exponentielle Stabilität vorliegt, beruht auf einer Verschiebung des Spektrums von A und wird in [RW00] (S. 218) geschildert.

Im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse zulässige Eingangsoperatoren erfüllen $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, die Definition von \mathcal{V} wird dabei unter Verwendung der Interpolationsräume aus Abschnitt B.9.3 vorgenommen. Es gilt $\mathcal{V} = \mathcal{H}_{-\alpha}$, wobei die Norm aus Gleichung (B.123), induziert durch das Innenprodukt aus (B.124), Verwendung findet. α wird durch den Grad der Unbeschränktheit von B festgelegt und als das kleinste $\alpha > 0$ angenommen, für das $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{-\alpha})$ und damit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ gilt. Unter Annahme des Zustandsraums als Pivotraum garantiert eine derartige Wahl der Räume entsprechend der Ausführungen aus Abschnitt B.9.3 eine Raumskala der Form $\mathcal{H}_{\alpha} \xhookrightarrow{d} \mathcal{X} \xhookrightarrow{d} \mathcal{V} = \mathcal{H}_{-\alpha}$. Im Falle eines zulässigen Eingangsoperators gilt für den Steuerbarkeitsoperator eines Pritchard-Salamon-Systems $\mathcal{B}_{t_1} \in \mathcal{L}(L^2([0, t_1], \mathcal{U}), \mathcal{W})$. Wobei an dieser Stelle $\mathcal{W} \xhookrightarrow{d} \mathcal{X}$ angenommen wird. Insbesondere bleibt festzuhalten, dass das Beispielsystem alle Annahme hinsichtlich der hier zugelassenen Systeme erfüllt.

In [RW00] wird $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X}_{-\alpha})$ mit einem $\alpha \geq 0$ vorausgesetzt, dabei ist $\mathcal{X}_{-\alpha}$ ein Interpolationsraum entsprechend Abschnitt B.9.3. Zulässige Eingangsoperatoren zeichnen sich in [RW00] dadurch aus, dass $\mathcal{B}_{t_1} u \in \mathcal{X}$ für ein $t > 0$ und alle $u \in L^2([0, \infty), \mathcal{U})$ gilt. Damit lassen sich die an dieser Stelle zugelassenen Systeme als Untermenge der in [RW00] betrachteten Systeme auffassen. Unter der einschränkenden Annahme eines skalaren Eingangs $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ genügen die betrachteten Systeme zudem den Annahmen aus [JP06].

D.3.2 Kriterien für die Steuerbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme

Einführend werden Kriterien für die exakte Steuerbarkeit aufgeführt, daran schließen sich Bedingungen für die approximative Steuerbarkeit an.

Exakte Steuerbarkeit

Der folgende Satz aus [JP06] (S. 325) formuliert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die exakte Steuerbarkeit der in [JP06] angenommenen Systeme. Die an dieser Stelle betrachteten Systeme genügen für den Fall $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ ebenfalls den Anforderungen an die in [JP06] zugelassenen Systeme.

Satz 70 (Kriterien für exakte Steuerbarkeit) *Es sei B ein für die durch den Systemoperator $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ generierte stark stetige Halbgruppe \mathcal{T}_{Φ} zulässiger Eingangsoperator. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

ES1) *Das Paar (A, B) ist exakt steuerbar;*

ES2) $\inf_{i,j \in \mathbb{I}^+, i \neq j} \frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{|Re(\lambda_j)|} > 0$ und $\sup_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{|Re(\lambda_i)|}{|b_i^*|^2} < \infty$;

ES3) *Für alle $s \in \mathbb{C}_-$ und alle $x \in \mathcal{X}_{\alpha+1}$ existiert eine positive Konstante c , sodass*

$$\|(sI - A^*)x\|^2 + |Re(s)| |\langle x, B \rangle_{\mathcal{X}_{\alpha} \times \mathcal{X}_{-\alpha}}|^2 \geq c |Re(s)|^2 \|x\|^2. \quad (\text{D.49})$$

In Kriterium **ES2)** zur exakten Steuerbarkeit gemäß Satz 70 treten explizit die Entwicklungskoeffizienten des Eingangsoperators auf, ähnliches gilt aufgrund des dortigen Dualitätsproduktes auch für **ES3)** des gleichen Satzes. Demnach müssen zur Anwendung von Satz 70 Kenntnisse über die Entwicklungskoeffizienten des Eingangsoperators vorliegen.

Die folgende notwendige Bedingung für exakte Steuerbarkeit entstammt [RW00] (S. 219) und besitzt für die in Abschnitt D.3.1 definierten Systeme Gültigkeit.

Satz 71 (Eine für exakte Steuerbarkeit notwendige Bedingung) *Falls $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X}_{-\alpha})$ für einige $\alpha \geq 0$ und das Paar (A, B) exakt steuerbar ist, dann*

$$\left\{ \frac{\sqrt{|Re(\lambda_i)|}}{|\lambda_i|^{\alpha}} \right\}_{i \in \mathbb{I}^+} \in l^2. \quad (\text{D.50})$$

□

Ein Beweis zu Satz 71 wird in [RW00] (S. 220) gezeigt. Die Formulierung des notwendigen Kriteriums in Satz 71 beruht allein auf den Eigenwerten des Systemoperators und dem Grad der Unbeschränktheit des Eingangsoperators α und kommt damit ohne eine explizite Berechnung der Entwicklungskoeffizienten des Eingangsoperators aus.

Falls ein System den Anforderungen aus Abschnitt D.3.1 genügt und darüber hinaus durch eine exponentiell stabile analytische Halbgruppe repräsentiert wird, findet sich in [RW00] (S. 219) unter der Bezeichnung Korollar 1.7. eine einfache notwendige Bedingung für seine exakte Steuerbarkeit, die ohne explizites Auftreten von α auskommt.

Satz 72 (Eine weitere für exakte Steuerbarkeit notwendige Bedingung) *Es sei X ein Hilbertraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ der infinitesimale Erzeuger einer analytischen Halbgruppe \mathcal{T}_Φ auf X . Ferner sei B ein hinsichtlich \mathcal{T}_Φ zulässiger Eingangsoperator. Falls das Paar (A, B) exakt steuerbar ist, dann gilt*

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{1}{|\lambda_i|^\epsilon} < \infty, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (\text{D.51})$$

Ein Beweis zu Satz 72 wird in [RW00] (S. 221) geführt. Im Gegensatz zu Satz 71 findet in Satz 72 weder die Unbeschränktheit des Eingangsoperators noch eine Gewichtung mit $|\operatorname{Re}(\lambda_i)|$, $i \in \mathbb{I}^+$ Eingang. Allerdings impliziert die Annahme einer analytischen Halbgruppe in Satz 72 einen sektoriellen Operator als Systemoperator und damit die Beschränkung des Imaginärteils des Spektrums des infinitesimalen Erzeugers in Abhängigkeit vom Realteil. Da in der voranstehenden Bedingung ϵ beliebig klein gewählt werden darf, muss der Betrag der Eigenwerte $|\lambda_i|$ ausreichend schnell anwachsen, damit die Summierbarkeitsbedingung eingehalten werden kann. In [RW00] (S. 219) findet sich dazu explizit die Aussage, dass den Autoren der besagten Abhandlung kein Differentialoperator bekannt ist, der (D.51) genügt.

Grundsätzlich lässt sich der Literatur zur Steuerbarkeit unendlich-dimensionaler Systeme als stark vereinfachter Merksatz entnehmen, dass sich ein hoher Grad an Unbeschränktheit eines Eingangsoperators positiv hinsichtlich der Tendenz zur exakten Steuerbarkeit eines Systems auswirkt. Eine Bestätigung für diesen Zusammenhang liefert Satz 71. Damit die in (D.50) auftretende Folge ein Element von l^2 ist, muss eine entsprechende Summierbarkeitsbedingung

$$\sum_{i \in \mathbb{I}^+} \frac{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|}{|\lambda_i|^{2\alpha}} < \infty \quad (\text{D.52})$$

erfüllt werden. Offensichtlich kann diese Bedingung für größere α leichter erfüllt werden. Dabei ist zu bemerken, dass der Grad der Unbeschränktheit α eines Eingangsoperators B als kleinstes α definiert ist, sodass $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{-\alpha})$. α ist an dieser Stelle also nicht als Freiheitsgrad anzusehen.

Approximative Steuerbarkeit

Für die folgenden aus [JP06] (S. 325) Theorem 4.1. entnommenen Kriterien bezüglich der approximativen Steuerbarkeit werden System vorausgesetzt, die den eingangs definierten Einschränkungen genügen und für die $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ gilt.

Satz 73 (Kriterien für approximative Steuerbarkeit) Es sei \mathcal{X} ein Hilbertraum. Der Systemoperator $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ sei der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe \mathcal{T}_Φ auf X . Ferner sei B ein hinsichtlich \mathcal{T}_Φ zulässiger Eingangoperator. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

AS1) Das Paar (A, B) ist approximativ steuerbar;

AS2) Für alle $s \in \mathbb{C}_-$ und alle $x \in \mathcal{H}_{\alpha+1}$ mit $x \neq 0$ gilt

$$\| (sI - A^*) x \|^2 + |\langle x, B \rangle_{\mathcal{H}_\alpha \times \mathcal{H}_{-\alpha}}|^2 \geq 0; \quad (\text{D.53})$$

AS3) Für alle $s \in \mathbb{C}_-$ ist die Abbildung

$$\left(\begin{array}{c} sI - A^* \\ \langle (\cdot), B \rangle_{\mathcal{H}_\alpha \times \mathcal{H}_{-\alpha}} \end{array} \right) : \mathcal{H}_{\alpha+1} \rightarrow \mathcal{H}_\alpha \times \mathbb{C} \quad (\text{D.54})$$

injektiv;

AS4) Es gilt $b_i^* \neq 0$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i, j \in \mathbb{I}^+$. □

Die aufgeführten äquivalenten Kriterien zur approximativen Steuerbarkeit beruhen analog zu den in Satz 70 aufgeführten Kriterien für exakte Steuerbarkeit sowohl auf den Eigenwerten des Systemoperators als auch auf den Entwicklungskoeffizienten des Eingangoperators. Das Kriterium **AS3)** entspricht einer Verallgemeinerung des aus dem Endlich-dimensionalen bekannten Steuerbarkeitskriteriums nach Hautus [Fö13] auf den unendlich-dimensionalen Fall. Die letztgenannte der zur approximativen Steuerbarkeit gleichwertigen Bedingungen sagt aus, dass ein System aus der betrachteten Klasse stets approximativ steuerbar ist, wenn es keine mehrfachen Eigenwerte aufweist und alle Entwicklungskoeffizienten des Eingangoperators von Null verschieden sind. Falls alle Entwicklungskoeffizienten eines unendlich-dimensionalen Systems aus der beschriebenen Systemklasse von Null verschieden sind, korrespondiert dies mit der Möglichkeit jede Mode eines derartigen Systems zu beeinflussen. Diese Eigenschaft wird im Unendlich-dimensionalen auch als modale Steuerbarkeit bezeichnet. Bedingungen unter denen approximative und modale Steuerbarkeit für unendlich-dimensionale Systeme gleichwertig sind, finden sich in [CZ95] (S. 165). Falls eine zeitabhängige Formulierung der approximativen Steuerbarkeit vernachlässigt wird, stimmen die beiden Steuerbarkeitsbegriffe insbesondere für Riesz-Spektralsysteme überein. Für derartige Systeme finden sich zudem von den Eigenwerten unabhängige Kriterien für die approximative Steuer- und Beobachtbarkeit in [CZ95] (S. 164).

E Anhang zu Steuerungs- und Regelungskonzepte

Dieser Abschnitt lässt sich als inhaltliche Ergänzung des Kapitels 4 auffassen. Einleitend erfolgt die Einführung grundlegender Begriffe aus dem Bereich der robusten Regelung. Daran schließen sich die Definitionen und Betrachtungen zur Korrektgestelltheit von Regelkreisen mit einem und mit zwei Freiheitsgraden an. Im Anschluss an die Einführung einer recht abstrakten Form des Satzes der kleinen Verstärkungen folgen zudem Aussagen zur Analyse der Stabilität und Performance geschlossener Regelkreise sowohl im nominellen Fall als auch unter Berücksichtigung von Unsicherheiten.

E.1 Definition verschiedener grundlegender Begriffe

Der vorliegende Abschnitt dient der Einführung verschiedener Begrifflichkeiten, die im Umgang mit geschlossenen Regelkreisen eine fundamentale Rolle spielen.

E.1.1 „Linear Fractional Transformation“

Die matrixwertige Verallgemeinerung der als Möbiustransformation oder „Linear Fractional Transformation“ (LFT) bekannten Abbildung lässt sich zur Darstellung unterschiedlichster aus regelungstechnischer Sicht relevanter Strukturen instrumentalisieren. Im Kontext des Reglerentwurfs mittels der \mathcal{H}_∞ oder μ -Methodik dient eine LFT und die daraus resultierende „Linear Fractional Representation“ (LFR) der Formulierung des Standard-Entwurfsproblems ([Cur91] (S. 253)). Darüber hinaus lässt sich mittels einer LFT aus einem nominellen System als Koeffizientenmatrix sowie einer strukturierten Unsicherheitsmatrix, eine Struktur generieren, die der μ -Synthese oder im Falle eines bereits geregelten Systems der μ -Analyse als Ausgangspunkt dient.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die übliche Unterscheidung zwischen einer unteren LFT und einer oberen LFT getroffen. Die grundlegende Einführung der zugehörigen Abbildungen folgt [ZDG95] (S. 240).

Definition 104 (Möbiustransformation (LFT)) Es seien Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(q_1+q_2) \times (p_1+p_2)} \quad (\text{E.1})$$

und $\Delta_1 \in \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}, \Delta_u \in \mathbb{C}^{p_1 \times q_1}$. Falls $(I - M_{22}\Delta_1)^{-1}$ existiert, wird die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(M, \cdot) : \mathbb{C}^{p_2 \times q_2} &\rightarrow \mathbb{C}^{q_1 \times p_1} \\ \Delta_1 &\mapsto \mathcal{F}_1(M, \Delta_1) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

mit $\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) = M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}$ als untere LFT der Koeffizientenmatrix M hinsichtlich Δ_l bezeichnet. Unter der Voraussetzung der Existenz von $(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}$ heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(M, \cdot) : \mathbb{C}^{p_1 \times q_1} &\rightarrow \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \\ \Delta_u &\mapsto \mathcal{F}_u(M, \Delta_u) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

mit $\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) = M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12}$ obere LFT der Koeffizientenmatrix M hinsichtlich Δ_u . \square

Die durch Definition 104 eingeführte LFT bildet einen Spezialfall des „Redheffer Star Products“. Durch eine Interpretation der in Definition 104 auftretenden komplexwertigen Matrizen als Übertragungsmatrizen zu einem festen $s \in \mathbb{C}$, erhalten die untere und obere LFT einen unmittelbaren Bezug zur Verkopplung dynamischer Systeme. Die Verwendung der LFT im Kontext der \mathcal{H}_∞ -optimalen Regelung von Pritchard-Salamon-Systemen findet sich beispielsweise in [Keu93] (S. 2).

Unter der Annahme von

$$\begin{pmatrix} z_l \\ y_l \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_l \\ u_l \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} z_u \\ y_u \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_u \\ u_u \end{pmatrix}, \quad (\text{E.4})$$

einer Übertragungsfunktion M mit einer Partitionierung gemäß (E.1) sowie Rückführungen

$$u_l = \Delta_l y_l \quad \text{und} \quad u_u = \Delta_u y_u \quad (\text{E.5})$$

folgen die Zusammenhänge $z_l = \mathcal{F}_l(M, \Delta_l) w_l$ und $z_u = \mathcal{F}_u(M, \Delta_u) w_u$. Eine Darstellung der LFT mittels Blockschaltbildern findet sich in Abb. E.1. Verschiedene Verkopplungen auf Basis der LFT dienen im Verlaufe dieser Arbeit als Grundlage der Reglersynthese und der Robustheitsanalyse, ferner wird die LFT als Hilfsmittel zur Überführung unstrukturierter und parametrischer Modellunsicherheiten in eine strukturierte Formulierung verwendet. Zahlreiche hilfreiche Betrachtungen hinsichtlich des Umgangs mit LFTs und der Verkopplung verschiedener LFTs finden sich in [ZDG95] (S. 242ff).

E.1.2 Der strukturierte Singulärwert

Menge der strukturierten Unsicherheiten

Die strukturierten Unsicherheiten bilden innerhalb dieser Arbeit die Grundlage der Untersuchungen strukturierter robuster Stabilität und Performance mittels der μ -Analyse.

Die Elemente einer Menge strukturierter Unsicherheiten werden als Blockdiagonal-Matrizen

$$\mathcal{M}_\Delta \subset \mathbb{C}^{n_\Delta \times m_\Delta} \quad \text{mit} \quad n_\Delta, m_\Delta < \infty$$

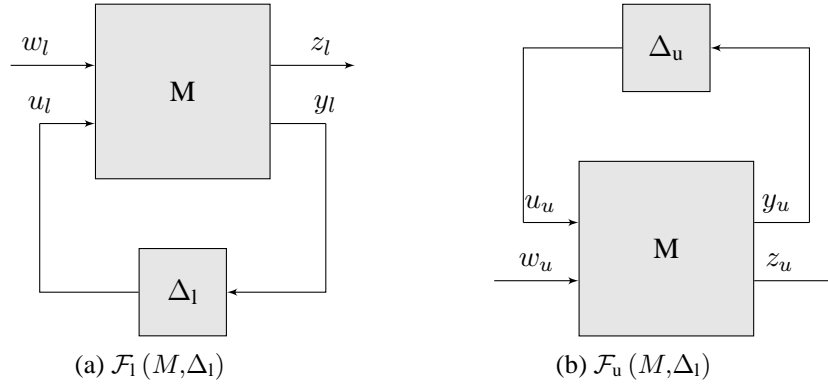


Abbildung E.1: Untere LFT $\mathcal{F}_l(M, \Delta_l)$ und obere LFT $\mathcal{F}_u(M, \Delta_u)$ von M hinsichtlich Δ_l beziehungsweise hinsichtlich Δ_u .

angenommen. Für jedes Element Δ einer speziellen Menge strukturierter Unsicherheiten \mathcal{M}_Δ wird eine bekannte und identische Besetzungsstruktur vorausgesetzt. Im Gegensatz zur Struktur der Matrizen aus einer speziellen Menge \mathcal{M}_Δ ist der genaue Wert der einzelnen Einträge eines $\Delta \in \mathcal{M}_\Delta$ unbekannt und somit unsicher. Die Festlegung einer zulässigen Struktur zur Definition einer Menge strukturierter Unsicherheiten erfolgt problemspezifisch. Die folgende Definition der Menge der strukturierten Unsicherheiten bezieht sich ausschließlich auf komplexe Unsicherheiten. Eine weiterführende Definition hinsichtlich gemischter Probleme in denen reelle skalare und komplexe skalare Unsicherheiten zugunsten weniger konservativer Unsicherheitsformulierungen unterschieden werden findet sich beispielsweise in [ZD98] (S. 381). Als elementare Bausteine der in einer Menge \mathcal{M}_Δ enthaltenen Blockdiagonal-Matrizen werden zum einen sich wiederholende komplexe Skalare $\delta_i \in \mathbb{C}$ der Anzahl n_S mit einer jeweiligen Häufigkeit von $r_i, i = 1, \dots, n_S$ angenommen und zum anderen werden vollbesetzte Matrizen $\Delta_j \in \mathbb{C}^{n_j \times m_j}, j = 1, \dots, n_F$ berücksichtigt. Unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n_S} s_i + \sum_{j=1}^{n_F} n_j = n_\Delta \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n_S} s_i + \sum_{j=1}^{n_F} m_j = m_\Delta \quad (\text{E.6})$$

gilt in einer nicht zwingend erforderlichen aber in der Literatur gebräuchlichen Anordnung

$$\mathcal{M}_\Delta = \left\{ \text{diag} \left(\delta_1 I_{s_1}, \dots, \delta_{n_S} I_{s_{n_S}}, \Delta_1, \dots, \Delta_{n_F} \right) \mid \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{n_j \times m_j} \right\} \quad (\text{E.7})$$

für $i = 1, \dots, n_S$ und $j = 1, \dots, n_F$. Die Definition der Menge der strukturierten Unsicherheiten erlaubt die Formulierung zweier wichtiger Spezialfälle, die im Hinblick auf den durch Definition 105 gegebenen strukturierten Singulärwert der Definition von Grenzfällen dienen.

SU1) Menge der maximal strukturierter Unsicherheiten: Mittels der Annahmen $n_F = 0$ und $n_S = 1, s_1 = n_\Delta = m_\Delta$ lässt sich der Fall eines einzelnen mit einer Häufigkeit von s_1 auftretenden, unsicheren Skalars konstruieren. Es gilt

$$\mathcal{M}_\Delta = \{ \delta I_{n_\Delta} \mid \delta \in \mathbb{C} \}. \quad (\text{E.8})$$

Der einzige Freiheitsgrad einer derartig strukturierten Unsicherheit liegt in der Variation des auftretenden Skalars, sie besitzt damit maximale Struktur.

SU2) Menge der unstrukturierten Unsicherheiten: Die Annahmen $n_S = 0$ und $n_F = 1$, $n_1 = n_\Delta$, $m_1 = m_\Delta$ führen auf komplett besetzte Matrizen $\Delta_1 \in \mathbb{C}^{n_\Delta \times m_\Delta}$ und damit eine Menge unstrukturierter Unsicherheiten der Form

$$\mathcal{M}_\Delta = \{\Delta \mid \Delta \in \mathbb{C}^{n_\Delta \times m_\Delta}\} \quad (\text{E.9})$$

und damit also auf $\mathcal{M}_\Delta = \mathbb{C}^{n_\Delta \times m_\Delta}$.

Im Hinblick auf die Betrachtung und Formulierung normbeschränkter Unsicherheiten wird als Untermenge von \mathcal{M}_Δ die Menge der strukturierten Unsicherheiten mit beschränkter Norm ([ZDG95] (S. 269)) durch

$$B_{\mathcal{M}_\Delta} = \{\Delta \in \mathcal{M}_\Delta \mid \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \quad (\text{E.10})$$

eingeführt. Die Menge der strukturierten Unsicherheiten lässt sich durch die Annahme von $n_j = m_j$, $j = 1, \dots, n_F$ auf einen Sonderfall einschränken. In diesem Sonderfall sind lediglich quadratische vollbesetzte Unsicherheitsblöcke $\Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$, $j = 1, \dots, n_F$ zugelassen. Unter dieser Annahme sind alle Elemente der resultierenden Menge \mathcal{M}_Δ ebenfalls quadratisch.

Im Folgenden sei vereinfachend $\Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$, $j = 1, \dots, n_F$ angenommen. Zu diesem Sonderfall von \mathcal{M}_Δ wird die Untermenge der unitären strukturierten Unsicherheiten von \mathcal{M}_Δ durch

$$\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}} = \{U_\Delta \in \mathcal{M}_\Delta \mid U_\Delta U_\Delta^* = I\} \quad (\text{E.11})$$

definiert ([ZDG95] (S. 270)). Gemäß [ZDG95] (S. 270) gilt als Konsequenz dieser Definition $U_\Delta^* \in \mathcal{M}_\Delta$. Darüber hinaus ist \mathcal{M}_Δ invariant gegenüber der Links- und Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}$, sodass $U_\Delta \Delta \in \mathcal{M}_\Delta$ beziehungsweise $\Delta U_\Delta \in \mathcal{M}_\Delta$ für alle $\Delta \in \mathcal{M}_\Delta$ und für alle $U_\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}$. Die Multiplikation mit einem Element aus $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}$ ändert den größten Singulärwert eines Elementes aus \mathcal{M}_Δ nicht, es gilt

$$\bar{\sigma}(U_\Delta \Delta) = \bar{\sigma}(\Delta U_\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta) \quad (\text{E.12})$$

für alle $\Delta \in \mathcal{M}_\Delta$ und für alle $U_\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}$. Zudem wird passend zu einer Menge strukturierter Unsicherheiten \mathcal{M}_Δ mit $\Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$, $j = 1, \dots, n_F$ die Menge

$$\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}} = \left\{ \text{diag} \left(\Delta_1, \dots, \Delta_{n_S}, \delta_1 I_{m_1}, \dots, \delta_{n_F-1} I_{m_{n_F-1}}, I_{m_{n_F}} \right) \mid \Delta_i \in \mathbb{C}^{s_i \times s_i}, \Delta_i = \Delta_i^* > 0, \delta_j \in \mathbb{R}, \delta_j > 0 \right\} \quad (\text{E.13})$$

definiert, sodass $D\Delta = \Delta D$ für alle $\Delta \in \mathcal{M}_\Delta$ und für alle $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ gilt. Unter der Annahme quadratischer strukturierter Unsicherheiten besteht $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ aus der Menge der Matrizen, die jeweils mit allen Elementen aus \mathcal{M}_Δ hinsichtlich der Multiplikation kommutieren. Aus dieser Anforderung resultiert die strukturelle Festlegung der Elemente aus $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ in Gleichung (E.13).

Die Struktur der $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ ist so festgelegt, dass bei einer Multiplikation mit einem $\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta}$ stets die Skalarblöcke $\delta_i, i = 1, \dots, n_S$ von Δ mit den vollbesetzten hermiteschen Blöcken des $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ multipliziert werden. Gleichzeitig werden die vollbesetzten komplexen Blockmatrizen $\Delta_j, j = 1, \dots, n_F$ mit auf entsprechende Dimension erweiterten reellen und positiven Skalaren aus $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ multipliziert. Eine Begründung für die Verwendung hermitescher Matrizen innerhalb von $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ findet sich in [ZDG95] (S. 271).

Multiplikative Verknüpfungen einer Matrix M mit $U_{\Delta} \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}$ beziehungsweise $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ belassen den strukturierten Singulärwert von M invariant ([ZDG95] (S. 270)), es gilt

$$\mu_{\mathcal{M}_{\Delta}}(MU_{\Delta}) = \mu_{\mathcal{M}_{\Delta}}(U_{\Delta}M) = \mu_{\mathcal{M}_{\Delta}}(M) = \mu_{\mathcal{M}_{\Delta}}(DMD^{-1}) \quad (\text{E.14})$$

für alle $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ und für alle $U_{\Delta} \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}$. In der Tat beeinflussen die $U_{\Delta} \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}$ bei multiplikativer Verknüpfung mit M lediglich die untere Schranke von $\mu_{\mathcal{M}_{\Delta}}(M)$, während die $D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ bei einer derartigen Operation lediglich die obere Schranke variieren. Da es sich bei der unteren Schranke des strukturierten Singulärwertes stets um eine Gleichung handelt, gilt laut [ZDG95] (S. 271)

$$\max_{U_{\Delta} \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}} r_{\sigma}(U_{\Delta}M) = \mu_{\mathcal{M}_{\Delta}}(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}). \quad (\text{E.15})$$

Menge stabiler strukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen

Die folgenden Ausführungen dienen der Einführung frequenzabhängiger strukturierter Unsicherheiten in Form strukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen und sind an die Definition in [ZDG95] (S. 277) angelehnt. Die Menge der endlich-dimensionalen, kausalen, stabilen und strukturierten unsicheren Übertragungsfunktionen, deren Elemente zu jedem $s \in \overline{\mathbb{C}}_+$ ein Element von \mathcal{M}_{Δ} sind, ist durch

$$\mathcal{M}_{\Delta_s} = \{ \Delta(\cdot) \in \mathcal{RH}_{\infty} \mid \Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta} \quad \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+ \} \quad (\text{E.16})$$

definiert.

In Anlehnung an die Mengen strukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen \mathcal{M}_{Δ_s} erfolgt eine Verallgemeinerung der D-Skalierungen auf den frequenzabhängigen Fall. Entsprechend der Ausführungen aus [Apk11] werden die $\{D_{\omega}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ punktweise für alle $\omega \in \mathbb{R}$ definiert, sodass $D_{\omega} \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}, \forall \omega \in \mathbb{R}$. Eine Folge $\{D_{\omega}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ besteht damit zu jeder Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ aus einem beliebigen $D_{\omega} \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$, dabei besteht keine Abhängigkeit zwischen den zu unterschiedlichen Frequenzen in der Folge enthaltenen $D_{(\cdot)}$. Aufgrund der strukturellen Annahmen hinsichtlich der Elemente von \mathcal{M}_{Δ_s} und $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ gilt

$$\begin{aligned} D_{\omega} \Delta(i\omega) &= \text{diag} \left\{ \tilde{\Delta}_1 \delta_1(i\omega) I_{S_{n_1}}, \dots, \tilde{\Delta}_{n_S} \delta_{n_S}(i\omega) I_{S_{n_1}}, \right. \\ &\quad \left. \tilde{\delta}_1 I_{m_1} \Delta_1(i\omega), \dots, \tilde{\delta}_{n_F-1} I_{m_{n_F-1}} \Delta_{n_F-1}(i\omega), I_{m_{n_F}} \Delta_{n_F}(i\omega) \right\} \\ &= \Delta(i\omega) D_{\omega}, \quad \forall D_{\omega}, \forall \Delta(i\omega). \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Für eine beliebige aber feste Folge $\{D_\omega\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ sowie für alle $\Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ gilt ebenfalls aufgrund der strukturellen Annahmen die Kommutativität hinsichtlich der Multiplikation.

Darüber hinaus wird entsprechend [ZDG95] (S. 288) die Menge

$$\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{H}_\infty} = \{D \in \mathcal{H}_\infty \mid D^{-1} \in \mathcal{H}_\infty, D(s)\Delta(s) = \Delta(s)D(s)\} \quad (\text{E.18})$$

eingeführt. Die Elemente von $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{H}_\infty}$ ergeben sich als solche Elemente aus \mathcal{H}_∞ , die hinsichtlich der Multiplikation mit allen $D(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ Kommutativität gewährleisten und zudem eine Inverse in \mathcal{H}_∞ besitzen. Anders als im Fall von $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ werden keine weiteren Forderungen an die Elemente von $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{H}_\infty}$ gestellt, demnach ist nicht zu erwarten, dass ein $D(s) \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{H}_\infty}$ für ein festes s ein Element von $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{D}}$ ist ([ZDG95] (S. 288)).

Die Einschränkung auf rationale Funktionen führt ausgehend von $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{H}_\infty}$ auf die Definition von

$$\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{RH}_\infty} = \{D \in \mathcal{RH}_\infty \mid D^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty, D(s)\Delta(s) = \Delta(s)D(s)\}. \quad (\text{E.19})$$

Definition des strukturierten Singulärwerts konstanter Matrizen

Der strukturierte Singulärwert $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}$ kann als ein Maß aufgefasst werden, dass die minimale Größe einer strukturierten Störung Δ beziffert, sodass $\det(I - M\Delta) = 0$ gilt. Demnach ist der strukturierte Singulärwert unter Annahme einer beliebigen aber festen Struktur der Störung als eine Eigenschaft von M interpretierbar und kann als eine Generalisierung des Spektralradius auf weniger strukturierter Störungen angesehen werden. Die Bezeichnung von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}$ als strukturierter Singulärwert lässt sich wohl primär der Tatsache zuschreiben, dass im Falle unstrukturierter Unsicherheiten der strukturierte Singulärwert dem größten Singulärwert einer betrachteten Matrix M gleicht.

Definition 105 (Strukturierter Singulärwert) Es sei $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $\Delta \in \mathcal{M}_\Delta \subset \mathbb{C}^{n_\Delta \times m_\Delta}$, zudem sei $n_\Delta = n$ und $m_\Delta = m$. Dann heißt

$$\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M) = \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{M}_\Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (\text{E.20})$$

strukturierter Singulärwert von M hinsichtlich einer Menge strukturierter Unsicherheiten \mathcal{M}_Δ . Ferner gilt $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M) = 0$, falls $\det(I - M\Delta) \neq 0 \forall \Delta \in \mathcal{M}_\Delta$. \square

Der strukturierte Singulärwert von M bezüglich einer Menge strukturierter Unsicherheiten \mathcal{M}_Δ ist der Kehrwert des kleinsten größten Singulärwertes eines Elements aus $\Delta \in \mathcal{M}_\Delta$ für das $\det(I - M\Delta) = 0$ gilt. Die Bestimmung des strukturierten Singulärwerts kann damit formal als Suche nach allen Unsicherheitsmatrizen aus einer Menge strukturierter Unsicherheiten \mathcal{M}_Δ angesehen werden, für die $I - M\Delta$ singulär wird. Aus dieser Teilmenge von \mathcal{M}_Δ für die $\det(I - M\Delta) = 0$ gilt, ergibt sich der strukturierte Singulärwert basierend auf dem Element dieser Teilmenge mit dem kleinsten größten Singulärwert.

Dieser Zusammenhang wird unmittelbar durch die Verwendung einer gleichwertigen alternativen Definition des strukturierten Singulärwerts aus [ZDG95] (S. 269) deutlich. Es gilt

$$\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M) = \max_{\Delta \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}_\Delta}} r_\sigma(M\Delta). \quad (\text{E.21})$$

Der vorangehenden Gleichung folgend, entspricht der strukturierte Singulärwert dem maximalen Spektralradius der sich für $M\Delta$ aus der Betrachtung aller normbeschränkten Unsicherheitsmatrizen $\Delta \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}_\Delta}$ ergibt. Falls dieser maximale Spektralradius unter Eins liegt, kann $I - M\Delta$ nicht singulär werden.

Einige Eigenschaften des strukturierten Singulärwerts

Definition 105 folgend ist $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ für $m, n < \infty$ als Abbildung

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{M}_\Delta} : \mathbb{C}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto \mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M) \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

mit einem positiven Wertebereich zu verstehen, die mit

$$\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(\alpha M) = |\alpha| \mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{E.23})$$

absolut homogen ist. Im Allgemeinen gilt allerdings nicht

$$\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M_1 + M_2) \not\leq \mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M_1) + \mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M_2). \quad (\text{E.24})$$

Obwohl $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}$ durch Nichteinhaltung der Dreiecksungleichung nicht den Anforderungen an eine Norm genügt, ist in der Literatur eine Interpretation von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ als Maß für die Größe von M zu finden ([ZDG95] (S. 269)).

Unter der Annahme der beiden in (E.8) und (E.9) definierten Grenzfälle hinsichtlich \mathcal{M}_Δ , nämlich der Menge der maximal strukturierten Unsicherheiten und der Menge der unstrukturierten Unsicherheiten, gleicht $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ bekannten charakteristischen Kenngrößen einer Matrix M . Da $\mathcal{M}_\Delta = \{\delta I_{n_\Delta} \mid \delta \in \mathbb{C}\}$ unter der Annahme einer quadratischen Matrix definiert wird, werden für die folgenden Aussagen quadratische Unsicherheitsmatrizen $n_\Delta = m_\Delta$ vorausgesetzt.

GSSV1) Unter Annahme der Menge der maximal strukturierten Unsicherheiten entsprechend **SU1)** von Seite 371 gleicht der strukturierte Singulärwert einer Matrix M dem Spektralradius dieser Matrix

$$\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M) = r_\sigma(M). \quad (\text{E.25})$$

GSSV2) Unter der Annahme der Menge der unstrukturierten Unsicherheiten entsprechend **SU2)** von Seite 371 gleicht der strukturierte Singulärwert einer Matrix M dem größten Singulärwert dieser Matrix

$$\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M) = \bar{\sigma}(M). \quad (\text{E.26})$$

Die Beweise der Gültigkeit der voranstehend genannten Grenzfälle des strukturierten Singulärwerts einer Matrix M finden sich in [ZDG95]. Da jede denkbare Menge von Unsicherheiten zwischen den in (E.8) und (E.9) definierten Mengen liegt $\{\delta I_{n_\Delta} \mid \delta \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{M}_\Delta \subset \mathbb{C}^{n_\Delta \times m_\Delta}$, ist für $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ ein Wert im Intervall definiert durch (E.25) und (E.26) zu erwarten. Tatsächlich gilt

$$r_\sigma(M) \leq \mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M). \quad (\text{E.27})$$

Bemerkungen zur Berechnung des strukturierten Singulärwerts

Die Vorteile einer strukturierten Unsicherheitsbeschreibung kommen nur dann ausreichend zum Tragen, wenn die Bestimmung des strukturierten Singulärwerts mit einer ausreichenden Genauigkeit und vertretbarem Aufwand möglich ist. Aus [Bra+94] ist bekannt, dass die exakte Bestimmung von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}$ hinsichtlich ihrer Komplexität im Allgemeinen in der Klasse NP-Schwierig („NP-Hard“) liegt. Häufig wird daher anstelle einer exakten Berechnung von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}$ eine Einschachtelung von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}$ verwendet. Eine Einschachtelung auf Basis von (E.27) erweist sich für diesen Zweck im Allgemeinen als ungeeignet, da der Abstand zwischen der oberen und der unteren Schranke in (E.27) beliebig groß sein kann ([ZDG95] (S. 269)). Unter Zuhilfenahme von Transformationen die nur jeweils eine der Grenzen der Einschachtelung beeinflussen, nicht aber den strukturierten Singulärwert selbst, gelingt eine engere Einschachtelung von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ als durch (E.27).

Die untere Schranke von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ lässt sich tatsächlich durch eine Gleichungsbedingung angeben. Ohne weitere Details gilt laut [ZDG95] (S. 271) die Gleichung

$$\max_{U_\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}} r_\sigma(U_\Delta M) = \mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M), \quad (\text{E.28})$$

wobei $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}} = \{U_\Delta \in \mathcal{M}_\Delta \mid U_\Delta U_\Delta^* = I\}$ die Untermenge der unitären Unsicherheitsmatrizen aus \mathcal{M}_Δ bezeichnet. Falls $\max_{U_\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}} r_\sigma(U_\Delta M)$ leichter zu berechnen wäre, als $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ selbst, wäre das ursprüngliche Problem an dieser Stelle gelöst. Da $r_\sigma(U_\Delta M)$ allerdings eine nicht-konvexe Funktion ist und somit im Allgemeinen lokale Maxima aufweist, kann das Auffinden eines globalen Maximums und damit des Auffindens von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ nicht ohne Weiteres garantiert werden. Nennungen von Algorithmen zur Berechnung von $\max_{U_\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{U}}} r_\sigma(U_\Delta M)$ finden sich beispielsweise in [YD90] oder [ZDG95] (S. 271).

Die obere Schranke des strukturierten Singulärwerts lässt sich dagegen in Form eines konvexen Optimierungsproblems formulieren. Allerdings handelt es sich in diesem Fall im Allgemeinen nicht um eine Gleichungsbedingungen, sondern lediglich um eine obere Schranke ([Meg93] oder [Jai+06]). Detailliertere Betrachtungen und spezielle Mengen von Unsicherheiten, für die auch die obere Schranke von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ eine Gleichungsbedingung darstellt, finden sich beispielsweise in [ZDG95] (S. 271).

Verallgemeinerung des strukturierten Singulärwerts auf Übertragungsfunktionen

Die Definition von $\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(M)$ gemäß Definition 105 bezieht sich auf eine komplexwertige Matrix $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Eine Übertragungsfunktion $G \in \mathcal{RH}_\infty$ eines Systems mit n Eingängen und m Aus-

gängen lässt sich als Abbildung $G : \overline{\mathbb{C}}_+ \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$, $s \mapsto G(s)$ auffassen. Eine Verallgemeinerung des strukturierten Singulärwerts auf Übertragungsfunktionen ist damit durch die Interpretation einer Übertragungsfunktion als komplexwertige Matrix zu jedem $s \in \overline{\mathbb{C}}_+$ und somit durch eine punktweise Betrachtung von $G(s)$ für verschiedene $s \in \overline{\mathbb{C}}_+$ möglich. Für $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ überträgt sich die Vorgehensweise auf den Frequenzgang eines dynamischen Systems.

Lemma 11.1 aus [ZDG95] (S. 267) verdeutlicht einen Zusammenhang zwischen dem Supremum des strukturierten Singulärwertes einer stabilen Übertragungsfunktion und des zugehörigen Frequenzgangs, es gilt

$$\sup_{s \in \overline{\mathbb{C}}_+} \mu_{\mathcal{M}_\Delta} M(s) = \sup_{s \in \mathbb{C}_+} \mu_{\mathcal{M}_\Delta} M(s) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\mathcal{M}_\Delta} M(i\omega). \quad (\text{E.29})$$

Ein Beweis dazu findet sich ebenfalls in [ZDG95] (S. 267). Die voranstehende Beziehung bildet die Menge der zu jeder diskreten Frequenz $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gebildeten strukturierten Singulärwerte auf eine einzelne positive Zahl ab. In Anlehnung an die durch $\|M(i\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \overline{\sigma}(M(i\omega))$ definierte \mathcal{H}_∞ -Norm im Falle unstrukturierter Unsicherheiten bildet $\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\mathcal{M}_\Delta} M(i\omega)$ ein Maß für die Robustheitsreserve im Fall strukturierter Unsicherheiten.

Die alternative Definition des strukturierten Singulärwerts gemäß (E.21) verdeutlicht die Bedeutung des auf Übertragungsfunktionen verallgemeinerten strukturierten Singulärwerts hinsichtlich auf dem Nyquistkriterium beziehungsweise eines Small-Gain Arguments beruhender Stabilitätsbetrachtungen zusätzlich. Weitere Einblicke in die Rolle des strukturierten Singulärwerts im Kontext der robusten Regelung finden sich beispielsweise in [PD93].

E.1.3 Gap-Metrik

Die Einführung der Gap-Metrik ist der Beurteilung der Eignung eines Approximationsansatzes zur Gewinnung einer endlich-dimensionalen Approximation eines unendlich-dimensionalen Systems zum Zwecke des Reglerentwurfs geschuldet. Die folgenden Ausführungen bilden die mathematische Basis für die Aussagen zur Gap-Metrik als Abstandsmaß in Abschnitt 4.2.1.

Zunächst erfolgt eine allgemeine Einführung der Gap-Metrik, anschließend wird die Anwendung der Gap-Metrik zur Bestimmung des Abstands zwischen Übertragungsfunktionen erläutert. Abschließende Betrachtungen auf Basis von Satz 11 betonen die Relevanz der Gap-Metrik im Zusammenhang mit dem Entwurf von Reglern für unendlich-dimensionale Systeme auf Basis endlich-dimensionaler Approximationen der Systeme.

Konvergenz abgeschlossener Operatoren

Die folgende Einführung der Gap-Metrik ist an die operatortheoretisch motivierten Ausführungen in [Kat95] (S. 197) angelehnt. An der genannten Stelle wird mit dem Ziel, die Größe von Störungen abgeschlossener Operatoren zu charakterisieren, die Verallgemeinerung eines Konvergenzbegriffs

von beschränkten auf abgeschlossene Operatoren eingeführt. Dazu wird der mit $\mathcal{C}(X, Y)$ bezeichnete Raum der abgeschlossenen Operatoren, die von X nach Y abbilden, eingeführt und mit einer Metrik ausgestattet. Für jeden abgeschlossenen Operator $T \in \mathcal{C}(X, Y)$ bildet der zugehörige Graph

$$\text{Gr}(T) = \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$$

einen abgeschlossenen Unterraum des Produktraums $X \times Y$, es gilt $\text{Gr}(T) \subset X \times Y$. Als Maß für den Abstand zwischen zwei Operatoren $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(X, Y)$ wird daher der mit „Gap“ oder „Aperture“ bezeichnete Abstand zwischen den beiden durch ihre Graphen $\text{Gr}(T_1)$ und $\text{Gr}(T_2)$ beschriebenen abgeschlossenen linearen Mannigfaltigkeiten von $X \times Y$ eingeführt. Aus mathematischer Sicht wird das ursprüngliche Problem damit auf die Bestimmung des Abstands zweier abgeschlossener linearer Mannigfaltigkeiten eines Banachraums zurückgeführt. Es sei Z ein Banachraum und M_1, M_2 abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeiten von Z , dann definiert das gerichtete Gap

$$\vec{\delta}(M_1, M_2) = \sup_{x \in B_{M_1}} d(x, M_2) \quad (\text{E.30})$$

eine obere Schranke für den Abstand der Einheitssphäre aus M_1 zum Unterraum M_2 . Daraus folgt eine alternative Definition für $\vec{\delta}(M_1, M_2)$ durch die kleinste positive Konstante $\vec{\delta}$ für die $d(x, M_2) \leq \vec{\delta}\|x\|, \forall x \in M_1$ ([Kat95]). Das eigentliche Gap zwischen den Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 ist definiert als

$$\delta(M_1, M_2) = \delta(M_2, M_1) = \max(\vec{\delta}(M_1, M_2), \vec{\delta}(M_2, M_1)). \quad (\text{E.31})$$

Für $\vec{\delta}(M_1, M_2)$ beziehungsweise $\delta(M_1, M_2)$ gelten darüber hinaus laut [Kat95] (S. 197) die folgenden Zusammenhänge:

- G1)** $\vec{\delta}(M_1, M_2) = 0$ genau dann, wenn $M_1 \subset M_2$;
- G2)** $\delta(M_1, M_2) = 0$ genau dann, wenn $M_1 = M_2$;
- G3)** $0 \leq \vec{\delta}(M_1, M_2) \leq 1$ und $0 \leq \delta(M_1, M_2) \leq 1$.

Falls Z ein Hilbertraum ist und P_1, P_2 orthogonale Projektionen auf M_1 bzw. auf M_2 , lässt sich das Gap auf Basis von

$$\delta(M_1, M_2) = \|P_1 - P_2\| \quad (\text{E.32})$$

definieren. In diesem Fall erfüllt δ laut [Kat95] (S. 198) alle Eigenschaften einer Metrik. Mittels $U(M_1, \epsilon) = \{M \mid \delta(M_1, M) < \epsilon\}$ wird zu einer Mannigfaltigkeit M_1 eine Mannigfaltigkeit eingeführt, die von M_1 einen Abstand kleiner als ϵ aufweist. Durch Variation von ϵ lassen sich verschiedene Umgebungen zu M_1 definieren. Eine Topologie auf Basis derartiger Umgebungen wird als Gap-Topologie bezeichnet.

Die Anwendung des Gaps auf die Graphen von $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(X, Y)$ liefert die eingangs gesuchte Formulierung für die Entfernung zwischen abgeschlossenen Operatoren. Ausgehend von $\vec{\delta}(T_1, T_2) = \vec{\delta}(\text{Gr}(T_1), \text{Gr}(T_2))$ gilt

$$\delta(T_1, T_2) = \delta(\text{Gr}(T_1), \text{Gr}(T_2)) = \max(\vec{\delta}(\text{Gr}(T_1), \text{Gr}(T_2)), \vec{\delta}(\text{Gr}(T_2), \text{Gr}(T_1))). \quad (\text{E.33})$$

Unter Annahme eines Hilbertraums $X \times Y$ lässt sich für abgeschlossene Operatoren ein verallgemeinerter Konvergenzbegriff auf Basis des Gaps als Abstandsmaß definieren. Eine Folge abgeschlossener Operatoren $\{T_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ konvergiert gegen einen abgeschlossenen Operator T , falls

$$\delta(T_i, T) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad i \rightarrow \infty. \quad (\text{E.34})$$

Da die Konvergenz im Sinne des Gaps für den Spezialfall beschränkter Operatoren mit der Konvergenz im Sinne der Operatornorm übereinstimmt, kann die verallgemeinerte Konvergenz als Erweiterung der Norm-Konvergenz auf abgeschlossene Operatoren interpretiert werden ([Mor94c] (S. 12)).

Das Gap zwischen Übertragungsfunktionen

Im Folgenden gilt es, die Definition des Gaps hinsichtlich der Übertragungsfunktionen von Systemen aus der Pritchard-Salamon-Klasse zu formulieren. Die Definitionen der Übertragungsfunktion dieser Systemklasse findet sich in Abschnitt 2.3.2. Im Folgenden gilt $\mathcal{U} = \mathbb{C}^p$ und $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$. Die zu betrachtenden Ein-/Ausgangsabbildungen werden in der Regel als Abbildungen zwischen $U = L^2([0, \infty), \mathcal{U})$ und $Y = L^2([0, \infty), \mathcal{Y})$ oder jeweils zumindest lokal quadratisch integrierbaren Funktionen angenommen. Den Ausführungen aus Abschnitt B.10.1 folgend, werden die Systeme damit als Abbildungen zwischen Räumen energiebeschränkter, kausaler Signale interpretiert. Ebenfalls basierend auf Aussagen aus Abschnitt B.10.1 und insbesondere Satz 59 können die Betrachtungen des Ein-/Ausgangsverhaltens äquivalent im Zeit- oder Frequenzbereich erfolgen, im letzteren Fall gilt dann $U = \mathcal{H}_2(\mathcal{U})$ und $Y = \mathcal{H}_2(\mathcal{Y})$.

Das Übertragungsverhalten eines Systems wird durch einen gegebenenfalls unbeschränkten Operator $G : \mathcal{D}(G) \subset U \rightarrow Y, u \mapsto y = Gu$ definiert, dessen Graph durch

$$\text{Gr}(G) = \begin{pmatrix} I_U \\ G \end{pmatrix} \mathcal{D}(G) \subset V = U \times Y \quad (\text{E.35})$$

gegeben ist ([FGS93]). Bei dem Graphen $\text{Gr}(G)$ handelt es sich um einen Unterraum des Hilbertraums V . Dieser Unterraum ist abgeschlossen, falls G stabilisierbar ist ([FGS93] (S. 1520), [Can99] (S. 4506)). Daraus folgt unmittelbar, dass eine Übertragungsfunktion G ein abgeschlossener Operator ist, falls sie stabilisierbar ist. Eine weitere schöne Darstellung des Graphen einer Übertragungsfunktion G auf Basis einer zugehörigen koprime Faktorisierung findet sich in [Geo88].

Die Berechnung des Gaps zwischen zwei abgeschlossenen Unterräumen $\text{Gr}(G_1), \text{Gr}(G_2)$ eines Hilbertraums, gegeben durch die Graphen zweier stabilisierbarer Übertragungsfunktionen G_1, G_2 , basiert auf der Norm der Differenz zugeordneter orthogonaler Projektionen, vergleiche (E.32). Die Eigenschaften orthogonaler Projektionen finden sich im Anhang B.6 sowie der dort zitierten Literatur. Beispiele für die Berechnung des Gaps zwischen Übertragungsfunktionen sind unter anderem in [ES85] zu finden, zudem enthält [HYT99] weitere hilfreiche Hinweise hinsichtlich der Berechnung des Gaps zwischen Übertragungsfunktionen. Die Äquivalenz zwischen der Gap-Metrik und der Graphen-Metrik bedingt die Identität der von beiden induzierten Topologie. Die Definition der

Konvergenz einer Folge von Übertragungsfunktionen gegen eine Übertragungsfunktion im Sinne der Gap-Topologie wird unter Ausnutzung der Äquivalenz zwischen Gap- und Graphen-Topologie gestützt auf [Vid87] (S. 238) in [Cur03] (S. 96) für unendlich-dimensionale Systeme mit beschränkten Ein- und Ausgangsoperatoren endlichen Rangs eingeführt.

Definition 106 (Konvergenz von Übertragungsfunktionen im Sinne der Gap-Topologie) Es sei G die Übertragungsfunktion eines gegebenenfalls unendlich-dimensionalen Systems und $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ eine Folge endlich-dimensionaler Übertragungsfunktionen für die jeweils rechts kopprime Zerlegungen $G = NM^{-1}$ und $G_i = N_i M_i^{-1}$ beziehungsweise links kopprime Zerlegungen der Form $G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$ und $G_i = \tilde{M}_i^{-1} \tilde{N}_i$ für alle $i \in \mathbb{I}^+$ existieren. Die Folge $\{G_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ konvergiert genau dann im Sinne der Gap-Topologie gegen G , wenn

$$\|M - M_i\|_\infty \rightarrow 0, \quad \|N - N_i\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty \quad (\text{E.36})$$

beziehungsweise

$$\|\tilde{M} - \tilde{M}_i\|_\infty \rightarrow 0, \quad \|\tilde{N} - \tilde{N}_i\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty \quad (\text{E.37})$$

gilt . □

Die Definition der koprimen Zerlegung für die innerhalb dieser Arbeit relevanten Systemklassen wird in C.3.7 eingeführt. Die Ausführungen in Abschnitt 3.2.2 zeigen die exponentielle Stabilität des Beispielsystems und erlauben damit eine doppelt kopprime Faktorisierung der zugehörigen Übertragungsfunktion mittels der in Gleichung (C.58) vorgeschlagenen Wahl

$$N = \tilde{N} = G, \quad M = \tilde{M} = 1, \quad \tilde{X} = X = I, \quad \tilde{Y} = Y = 0. \quad (\text{E.38})$$

Aufgrund der exponentiellen Stabilität des Beispielsystems ist die dem Beispielsystem zugeordnete Übertragungsfunktion ein-/ausgangsstabil und somit ein Element von $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$. Eine Aussage über die Konvergenz einer Folge stabiler Übertragungsfunktionen gegen eine ebenfalls stabile Übertragungsfunktion im Sinne der Gap-Topologie reduziert sich damit auf eine Bedingung

$$\|G - G_i\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty, \quad (\text{E.39})$$

formuliert in der ∞ -Norm. Diese Aussage entspricht für den Spezialfall von Übertragungsfunktionen der abschließenden Aussage des vorangehenden Abschnitts. Ein Beispiel für die fehlende Eignung der ∞ -Norm als Abstandsmaß im Fall instabiler Übertragungsfunktionen findet sich beispielsweise in [ES85] (S. 242).

E.2 Systeme und Systemverknüpfungen

Einleitend werden mit der Strecke, dem Regler und der erweiterten Strecke die Systeme definiert, die an dieser Stelle als die elementaren Bausteine verschiedener Regelkreise angesehen werden.

Anschließend erfolgt die Definition und eine Betrachtung der Korrektgestelltheit des Standard-Regelkreises, eines Regelkreises mit zwei Freiheitsgraden sowie des erweiterten Regelkreises.

Darüber hinaus werden zu den einzelnen Regelkreisstrukturen die charakteristischen Funktionen benannt und verschiedene Abhängigkeiten zwischen diesen Funktionen aufgezeigt. Der zentralen Frage nach der Stabilität miteinander verbundener Systeme sind die anschließende Definitionen verschiedener Stabilitätsbegriffe sowie die Ausführungen zur Äquivalenz zwischen den unterschiedlichen Stabilitätsbegriffen geschuldet. Den Abschluss dieses Abschnitts bildet der Satz der kleinen Verstärkungen, der unter der Annahme stabiler Systeme in Abhängigkeit von der strengen Kontraktivität der offenen Wirkungskette eine Aussage über die Stabilität des zugehörigen geschlossenen Standard-Regelkreises erlaubt.

E.2.1 Definition der Strecke, der erweiterten Strecke und des Reglers

Begriff der Strecke und des Reglers

Ein dynamisches System, für das ein Regler entworfen werden soll, wird in der Regel als Strecke bezeichnet. An dieser Stelle werden Strecken $\Sigma(A, B, C, D)$ vorausgesetzt die zumindest Element der Pritchard-Salamon-Klasse sind und damit eine Zustandsraumdarstellung gemäß der Gleichungen (2.102) beziehungsweise (2.107) und (2.108) besitzen. Ferner werden für die Räume der Eingangssignale und der Ausgangssignale die Annahmen

$$\mathcal{U} = \mathbb{C}^p, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{C}^q \quad (\text{E.40})$$

getroffen. Die genannten Annahmen schließen alle endlich-dimensionalen linear-zeitinvarianten Systeme ein. Die Eingänge u werden als Stelleingänge bezeichnet und die Ausgänge y tragen die Bezeichnung Meßausgänge. Neben einer Zustandsraumdarstellung lässt sich unter diesen Annahmen jeder Strecke sowohl im Zeitbereich als auch im Bildbereich der Laplace-Transformation eine Ein-/Ausgangsabbildung zuordnen. Die entsprechenden Darstellungen finden sich in Abschnitt 2.3.

Die an dieser Stelle zulässigen Regler werden im Allgemeinen durch die gleichen Annahmen, wie die zulässigen Strecken charakterisiert. Zur Kennzeichnung eines Reglers wird eine Indizierung der Operatoren der Zustandsraumdarstellung vorgenommen und somit wird ein Regler durch $\Sigma_K(A_K, B_K, C_K, D_K)$ beschrieben. Demnach können im Allgemeinen an dieser Stelle sowohl endlich-dimensionale als auch unendlich-dimensionale Regler berücksichtigt werden. Solange nicht ausdrücklich abweichend definiert werden allerdings endlich-dimensionale Regler mit $x_K \in \mathcal{X}_K = \mathbb{R}^{n_K}$, $n_K < \infty$ vorausgesetzt. Die Räume der Ein-/Ausgangssignale werden ebenfalls als endlich-dimensional angenommen $\mathcal{U}_K = \mathbb{C}^{p_K}$, $\mathcal{Y}_K = \mathbb{C}^{q_K}$ mit $p_K, q_K < \infty$.

Das Übertragungsverhalten eines Regler entspricht somit dem eines linearen Systems und ist im Zeitbereich durch $y_K(t) = \mathcal{K}u(t)$ gekennzeichnet, während mit $x_{K,0} = 0$ im Bildbereich der

Laplace-Transformation $y_K(s) = K(s) u_K(s)$ mit

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \quad (\text{E.41})$$

gilt.

Allgemeine Formulierung der erweiterten Strecke

Im Hinblick auf die auf dem strukturierten Singulärwert basierenden Verfahren zur Synthese robuster Regler sowie im Hinblick auf die Robustheitsanalyse bestehender Regelkreise wird eine Problemformulierung auf Basis einer erweiterten Strecke der Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_e(t)}{\partial t} \\ y_\Delta(t) \\ z(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_e & B_{e,\Delta} & B_{e,w} & B_{e,s} \\ C_{\Delta,e} & D_{\Delta,\Delta} & D_{\Delta,w} & D_{\Delta,s} \\ C_{z,e} & D_{z,\Delta} & D_{z,w} & D_{z,s} \\ C_{m,e} & D_{m,\Delta} & D_{m,w} & D_{m,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e(t) \\ u_\Delta(t) \\ w(t) \\ u_s(t) \end{pmatrix}, \quad x_e(0) = x_{e,0} \quad (\text{E.42})$$

vorausgesetzt. Neben der eigentlichen Strecke beinhaltet die erweiterte Strecke auf wohlbekannte Weise ([SP05] oder [ZDG95]) die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis und gegebenenfalls weitere Informationen über das Entwurfsproblem. Innerhalb dieser Arbeit wird eine Formulierung der Regelungsziele mittels rationaler Übertragungsfunktionen, also endlich-dimensionaler Systeme, angenommen. Die dazu verwendeten Übertragungsfunktionen werden darüber hinaus als stabil, realisierbar, minimal-realisiert und stabil invertierbar angenommen. Unter der Voraussetzung einer zulässig stabilisierbaren und zulässig detektierbaren Strecke soll im Folgenden für die erweiterte Strecke die zulässige Stabilisierbarkeit des Paares $(A_e, B_{e,s})$ sowie die zulässige Detektierbarkeit von $(A_e, C_{m,e})$ gelten ([SW04] (S. 79)). Die Voraussetzungen an die zur Formulierung der Regelungsziele eingesetzten Übertragungsfunktionen garantiert zudem, dass die Systemklasse der erweiterten Strecke der Systemklasse der Strecke entspricht.

Unabhängig von der Partition der Ein-/Ausgänge gelten für die in (E.42) auftretenden Operatoren und Räume jeweils die in E.2.3 getroffenen Annahmen und Verweise. Demnach eignet sich auch die erweiterte Strecke gleichsam zur Darstellung endlich und unendlich-dimensionaler Systeme. In Analogie zur Strecke wird eine jeweils endliche Anzahl von Ein-/Ausgängen

$$u_\Delta \in \mathcal{U}_{u_\Delta} = \mathbb{C}^{p_{u_\Delta}}, \quad w \in \mathcal{U}_w = \mathbb{C}^{p_w}, \quad u_e \in \mathcal{U}_{u_e} = \mathbb{C}^{p_{u_e}}, \quad (\text{E.43})$$

sowie

$$y_\Delta \in \mathcal{Y}_{y_\Delta} = \mathbb{C}^{q_{y_\Delta}}, \quad z \in \mathcal{Y}_z = \mathbb{C}^{q_z}, \quad y_m \in \mathcal{Y}_2 = \mathbb{C}^{q_{y_m}} \quad (\text{E.44})$$

angenommen. Unter Zusammenfassung der Vektoren der Eingangssignale und Ausgangssignale zu $u_e(t) = \begin{pmatrix} u_\Delta(t) & w(t) & u_s(t) \end{pmatrix}^T$ beziehungsweise $y_e(t) = \begin{pmatrix} y_\Delta(t) & z(t) & y_m(t) \end{pmatrix}^T$ sowie der

Annahme $x_{e,0} = 0$ wird das Ein-/Ausgangsverhalten der erweiterten Strecke im Zeitbereich durch

$$\begin{aligned} y_e(t) &= C_e \int_0^t \Phi(t-\tau) B_e u_e(\tau) d\tau + D_e u_e(t) \\ &= \mathfrak{G}_e u_e(t) \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

mit

$$B_e = \begin{pmatrix} B_{e,\Delta} & B_{e,w} & B_{e,s} \end{pmatrix}, \quad C_e = \begin{pmatrix} C_{\Delta,e} \\ C_{z,e} \\ C_{m,e} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_e = \begin{pmatrix} D_{\Delta,\Delta} & D_{\Delta,w} & D_{\Delta,s} \\ D_{z,\Delta} & D_{z,w} & D_{z,s} \\ D_{m,\Delta} & D_{m,w} & D_{m,s} \end{pmatrix} \quad (\text{E.46})$$

beschrieben. Im Bildbereich der Laplace-Transformation gilt für das Übertragungsverhalten der erweiterten Strecke

$$y_e(s) = P(s) u_e(s) \quad (\text{E.47})$$

mit

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array} \right] = \begin{pmatrix} P_{\Delta,\Delta}(s) & P_{\Delta,w}(s) & P_{\Delta,s}(s) \\ P_{z,\Delta}(s) & P_{z,w}(s) & P_{z,s}(s) \\ P_{m,\Delta}(s) & P_{m,w}(s) & P_{m,s}(s) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.48})$$

In der Regel entsprechen die u_s und y_m den Eingängen beziehungsweise den Ausgängen der Strecke G . In einem derartigen Fall gilt $p_{u_s} = p, q_{y_m} = q$ und u_s sowie y_m tragen die im Rahmen der Definition der Strecke eingeführten Bezeichnungen. Die Eingänge w heißen externe Störgrößen und die Ausgänge z tragen den Namen Performance-Größen. Ferner dienen die Signale u_Δ und y_Δ der Anbindung strukturierter Modellunsicherheiten im allgemeinen Rahmen der in Abschnitt E.1.1 beschriebenen LFT.

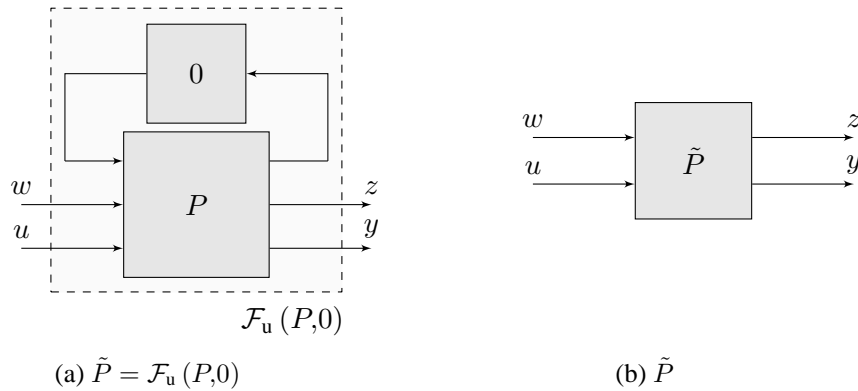
Im Zuge der Syntheseverfahren \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler, die eine Formgebung der Singulärwert-Verläufe des geschlossenen Regelkreises („closed-loop shaping“) verfolgen, geschieht die Formulierung des Entwurfsproblems in der Regel anhand einer erweiterten Strecke, die keine Anbindung strukturierter Modellunsicherheiten vorsieht. In einem derartigen Fall vereinfacht sich das Übertragungsverhalten der erweiterten Strecke zu

$$\begin{pmatrix} z(s) \\ y_m(s) \end{pmatrix} = \tilde{P}(s) \begin{pmatrix} w(s) \\ u_s(s) \end{pmatrix} \quad (\text{E.49})$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) &= \mathcal{F}_u(P, 0)(s) \\ &= \begin{pmatrix} P_{z,w}(s) & P_{z,s}(s) \\ P_{m,w}(s) & P_{m,s}(s) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A_e & B_{e,w} & B_{e,s} \\ \hline C_{z,e} & D_{z,w} & D_{z,s} \\ C_{m,e} & D_{m,w} & D_{m,s} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.50})$$

Die in Abb. E.2 zu erkennende erweiterte Strecke \tilde{P} geht aus einer oberen LFT von P mit einer Unsicherheitsstruktur identisch Null hervor, dies entspricht einer Rückführung von y_Δ auf u_Δ über Null.

Abbildung E.2: Erweiterte Strecke \tilde{P} .

E.2.2 Definition und Korrektgestelltheit des Standard-Regelkreises

Im Hinblick auf die Reglersynthese sowie die anschließende Analysen des geschlossenen Regelkreises enthält dieser Abschnitt die Definition des Standard-Regelkreises sowie Betrachtungen zu dessen Korrektgestelltheit. Dazu werden im Folgenden endlich-dimensionale Regler vorausgesetzt, die damit auch reguläre Pritchard-Salamon-Systeme sind. Um ausgehend von der Systemklasse der Strecke und des Reglers eine Aussage über die Systemklasse des zugeordneten geschlossenen Regelkreises treffen zu können, muss die Abgeschlossenheit der entsprechenden Systemklasse gegenüber der verwendeten Form der Rückführung gezeigt werden.

In [Log92] (S. 119f) wird der Beweis geführt, dass die Verknüpfung zweier Pritchard-Salamon-Systeme mittels einer Rückführung auf einen geschlossenen Regelkreise führt, der ebenfalls Element der Pritchard-Salamon-Klasse ist. Damit ist die Pritchard-Salamon-Klasse abgeschlossen gegenüber dynamischer Ausgangsrückführung. Weitere Ausführliche Betrachtungen zur Abgeschlossenheit der Pritchard-Salamon-Klasse unter Anwendung von Reihen- und Parallelschaltung sowie dynamischer Ausgangsrückführung finden sich beispielsweise in [Kau93].

Im Anschluss an die Definition und Einordnung des geschlossenen Regelkreises erfolgt die Definition charakteristischer Funktionen des geschlossenen Regelkreises im Frequenzbereich sowie eine Definition äquivalenter Regelkreisstrukturen.

Zeitbereichsbetrachtungen zur Definition und Korrektgestelltheit des Standard-Regelkreises

Der folgenden Formulierung des geschlossenen Regelkreises liegen eine Strecke $\Sigma(A, B, C, D)$ und ein endlich-dimensionaler Regler $\Sigma_K(A_K, B_K, C_K, D_K)$ entsprechend der Definition aus Abschnitt E.2.1 zugrunde. Ferner sei angenommen, dass der Regler die Meßausgänge der Strecke auf die Stelleingänge der Strecke abbildet und dazu $p_K = q$ und $q_K = p$ sei. Da die Anwendung einer Rückführung der Streckenausgänge über den Regler wiederum auf ein dynamisches System führt, stimmen die Bedingungen zur Korrektgestelltheit des geschlossenen Regelkreises mit denen zur Korrektgestelltheit allgemeiner dynamischer Systeme überein. Die Parallelschaltung von Strecke

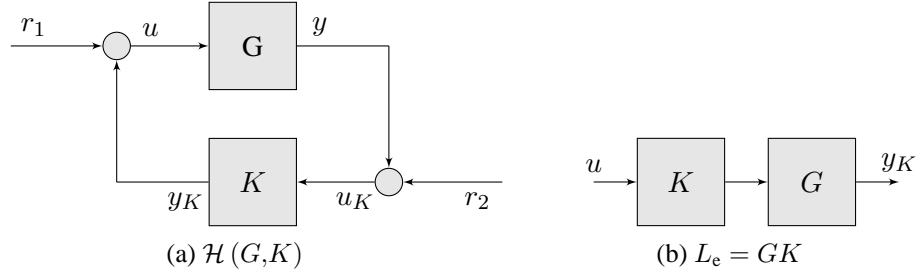


Abbildung E.3: Standard-Regelkreises $\mathcal{H}(G, K)$ gemäß (E.62) mit zugehöriger offener Wirkungskette $L_e = GK$.

und Regler führt unter Verwendung eines erweiterten Zustandsraums $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_K$ beziehungsweise einer Raumskala aus der direkten Summe der Zustandsräume von Strecke und Regler auf die Zustandsgleichung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_K(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_K \end{pmatrix}}_{A_P} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix}}_{x_P(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B_K \end{pmatrix}}_{B_P} \begin{pmatrix} u(t) \\ u_K(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.51})$$

mit $x_P(0) = \begin{pmatrix} x(0) & x_K(0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_0 & x_{K,0} \end{pmatrix}^T$. Für die Eingangssignale gilt

$$u_L(t) = \begin{pmatrix} u(t) & u_K(t) \end{pmatrix}^T \in \mathcal{U}_L, \quad (\text{E.52})$$

wobei der Raum der Eingangssignale durch $\mathcal{U}_L = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}_K \in \mathbb{C}^{p+p_K}$ gegeben ist. Die Ausgangsgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y_K(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C_K \end{pmatrix}}_{C_P} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D_K \end{pmatrix}}_{D_P} \begin{pmatrix} u(t) \\ u_K(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.53})$$

mit dem Vektor der Ausgangssignale $y_L(t) = \begin{pmatrix} y(t) & y_K(t) \end{pmatrix}^T \in \mathcal{Y}_L$ sowie dem Raum der Ausgangssignale $\mathcal{Y}_L = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}_K \in \mathbb{C}^{q+q_K}$. Im Falle zweier Pritchard-Salamon-Systeme, kann eine Formulierung des erweiterten Zustandsraums derart erfolgen, dass auch die Parallelschaltung der Systeme ein Pritchard-Salamon-System ist ([Kau93]). Dies beinhaltet unmittelbar die Zuordnung einer stark stetigen Halbgruppe zu dem in (E.51) auftretenden Systemoperator A_P und darüber hinaus die Zulässigkeit der Eingangsabbildung B_P und der Ausgangsabbildung C_P im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse. Die Durchgriffsoperatoren werden gemäß (2.111) als beschränkte Abbildungen vom jeweiligen Eingangsraum auf den zugehörigen Ausgangsraum angesehen, d.h. mit $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ und $D_K \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_K, \mathcal{Y}_K)$ gilt für den Durchgriffsoperator der Parallelschaltung $D_P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_L, \mathcal{Y}_L)$.

Die in Abb. E.3a dargestellte Rückführung des Streckenausgangs über den Regler wird im Zeitbereich unter Berücksichtigung der additiv einwirkenden Signale $r_L(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) & r_2(t) \end{pmatrix}^T \in \mathcal{U}_L$

durch

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.54})$$

dargestellt. Einsetzen der letztgenannten Gleichung in die Ausgangsgleichung (E.53) führt auf

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & -D \\ -D_K & I \end{pmatrix}}_{=\tilde{D}_L} \begin{pmatrix} y(t) \\ y_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.55})$$

Aus der Beschränktheit von D_P folgt $\tilde{D}_L \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}_L, \mathcal{U}_L)$. Die Abbildung \tilde{D}_L besitzt genau dann eine beschränkte Inverse, falls entweder $I - D_K D$ oder äquivalent $I - D D_K$ und damit sowohl $I - D_K D$ als auch $I - D D_K$ eine beschränkte Inverse besitzen. Die Korrektgestellttheit des geschlossenen Regelkreises erweist sich damit in jedem Fall als garantiert, falls zumindest eines der beiden beteiligten Systeme keinen Durchgriffsoperator aufweist. Die aus der Korrektgestellttheit hinsichtlich der Eindeutigkeit einer Lösung der Zustandsgleichung erwachsenden Implikationen finden sich beispielsweise in [DP05] (S. 169).

Im Fall eines korrekt gestellten geschlossenen Regelkreises gilt

$$\tilde{D}_L^{-1} = \begin{pmatrix} (I - D D_K)^{-1} & D(I - D_K D)^{-1} \\ D_K(I - D D_K)^{-1} & (I - D_K D)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & D L_2 \\ D_K L_1 & L_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.56})$$

mit $L_1 = (I - D D_K)^{-1}$ und $L_2 = (I - D_K D)^{-1}$. Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge für die Ausgangssignale

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 C & D L_2 C_K \\ D_K L_1 C & L_2 C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 D & D L_2 D_K \\ D_K L_1 D & L_2 D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.57})$$

ergibt sich mit $I + D_K L_1 D = L_2$ und $I + D L_2 D_K = L_1$ die Rückführung zu

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_K L_1 C & L_2 C_K \\ L_1 C & D L_2 C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_2 & L_2 D_K \\ L_1 D & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.58})$$

In Analogie zum endlich-dimensionalen Fall ([Vid82a] (S. 889)) führt das Einsetzen der Ausgangssignale (E.57) in die Rückführung (E.54) auf eine Darstellung der dynamischen Rückführung bezüglich der Strecke $\Sigma(A, B, C, D)$ als konstante Zustandsrückführung hinsichtlich der Strecke (E.51) auf dem zugehörigen erweiterten Zustandsraum. Ausgehend von der Zustandsgleichung (E.51) ergibt sich unter Berücksichtigung der Rückführung (E.54) die Zustandsgleichung des geschlossenen Regelkreises zu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_K(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + B D_K L_1 C & B L_2 C_K \\ B_K L_1 C & A_K + B_K D L_2 C_K \end{pmatrix}}_{A_L} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B L_2 & B L_2 D_K \\ B_K L_1 D & B_K L_1 \end{pmatrix}}_{B_L} \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.59})$$

Die Elemente des in (E.59) auftretenden Eingangsoperators bestehen aus zulässigen und beschränkten oder sogar kompakten Operatoren. Für die Kombination derartiger Operatoren wird die Zulässigkeit im Sinne der entsprechenden Systemklasse angenommen. Aufgrund der Ausführungen zur Abgeschlossenheit der Pritchard-Salamon-Klasse gegenüber einer konstanten Zustandsrückführung der Form (E.58) ([Kou93]) beziehungsweise dynamischer Rückführungen ([Log92], [Kou93]) lässt sich schließen, dass der geschlossene Regelkreis aus (E.59) ebenfalls ein Element der Pritchard-Salamon-Klasse ist.

Dem Systemoperator des geschlossenen Regelkreises ist damit eine stark stetige Halbgruppe zugeordnet ([Kou93]) und hinsichtlich der Regularität der Zustandstrajektorien des geschlossenen Regelkreises gelten alle Aussagen der entsprechenden Systemklasse. Die Ausgangsabbildung des geschlossenen Regelkreises ist durch (E.57) gegeben.

Frequenzbereichsbetrachtungen zur Definition und Korrektgestelltheit des Standard-Regelkreises

Neben der Formulierung im Zeitbereich, lassen sich der geschlossene Regelkreis und die Bedingungen für dessen Korrektgestelltheit äquivalent im Bildbereich der Laplace-Transformation aufstellen. Auf Basis der Laplace-Transformierten von (E.59) und (E.58) ergibt sich unter der Annahme verschwindender Anfangsbedingungen $\begin{pmatrix} x_0 & x_{K,0} \end{pmatrix}^T = 0$ eine für den geschlossenen Regelkreis charakteristische Ein-/Ausgangsabbildung zwischen $r_L(s) = \begin{pmatrix} r_1(s) & r_2(s) \end{pmatrix}^T$ und $u_L(s) = \begin{pmatrix} u(s) & u_K(s) \end{pmatrix}^T$. Ohne explizite Nennung der Abhängigkeit von der komplexen Variable s gilt gemäß Abb. E.3a

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -K \\ -G & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_K \end{pmatrix}. \quad (\text{E.60})$$

Die Korrektgestelltheit des geschlossenen Regelkreises im Bildbereich der Laplace-Transformation hängt unmittelbar von der Existenz einer Inversen zu der in (E.60) auftretenden Abbildung und damit von der Existenz einer beschränkten Inversen von $I - GK$ ab ([Vin01] (S. 8)). Unter der Annahme der Existenz einer solchen Inversen ist die Abbildung

$$u_L = \mathcal{H}(G, K) r_L \quad (\text{E.61})$$

mit

$$(G, K) \mapsto \mathcal{H}(G, K) = \begin{pmatrix} I + K(I - GK)^{-1}G & K(I - GK)^{-1} \\ (I - GK)^{-1}G & (I - GK)^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{E.62})$$

korrekt gestellt und wird als Standard-Regelkreis bezeichnet. Aufgrund der Identitäten

$$I + K(I - GK)^{-1}G = I + KG(I - KG)^{-1} = (I - KG)^{-1} \quad (\text{E.63})$$

$$(I - GK)^{-1}G = G(I - KG)^{-1} \quad (\text{E.64})$$

$$K(I - GK)^{-1} = (I - KG)^{-1}K \quad (\text{E.65})$$

$$(I - GK)^{-1} = I + (I - GK)^{-1}GK = I + G(I - KG)^{-1}K \quad (\text{E.66})$$

lässt sich der Standard-Regelkreis äquivalent auch in Abhängigkeit von $(I - KG)^{-1}$ definieren. Falls die Bedingungen für die Korrektgestelltheit der Zustandsraumdarstellung, nämlich die Existenz beschränkter Abbildungen L_1 und L_2 , erfüllt sind, folgt daraus die Existenz der beschränkten Inversen Abbildungen zu $I - GK$ und $I - KG$ und damit auch die Korrektgestelltheit von $\mathcal{H}(G, K)$ ([Kau93]). Aufgrund der in [Vin01] angestellten Betrachtungen wird auf eine weitere äquivalente Darstellung verzichtet.

Charakteristische Funktionen des geschlossenen Regelkreises

Die in Abb. E.4 gezeigte Anordnung bildet die Basis der zur Regelung des Beispielsystems innerhalb dieser Arbeit eingesetzten Rückführung und ist im Hinblick auf die Korrektgestelltheit als äquivalent zum vorab definierten Standard-Regelkreis anzusehen ([ZDG95]). Anhand des ge-

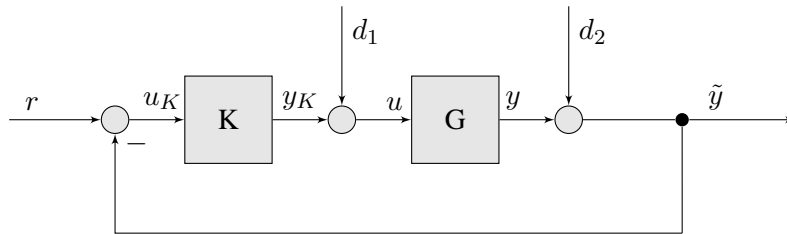


Abbildung E.4: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

schlossenen Regelkreises gemäß Abb. E.4 werden im Folgenden, angelehnt an die übliche Nomenklatur, gebräuchliche charakteristische Funktionen des geschlossenen Regelkreises im Bildbereich der Laplace-Transformation eingeführt. Hinsichtlich der dabei angenommenen Strecke $y = Gu$ und eines Reglers passender Dimension $y_K = Ku_K$, gelten die in Abschnitt E.2.1 getätigten Annahmen. Ferner gilt

$$u_K = e = r - \tilde{y}, \quad u = y_K + d_1, \quad \tilde{y} = y + d_2. \quad (\text{E.67})$$

Dann werden die Abbildungen $L_e = GK$ und $L_u = KG$ als Kreisverstärkungen bezeichnet. Die Größen $D_e = 1 + L_e$ und $D_u = 1 + L_u$ heißen Kreisverstärkungsdifferenz, die Größen $S_e = (I + L_e)^{-1} = (I + GK)^{-1}$ und $S_u = (I + L_u)^{-1} = (I + KG)^{-1}$ werden als Empfindlichkeiten oder Sensitivitäten bezeichnet und die durch $T_e = (I + L_e)^{-1}L_e = S_e GK$ und $T_u = (I + L_u)^{-1}L_u = S_u KG$ definierten Größen tragen aufgrund von

$$S_e + T_e = 1 \quad \text{und} \quad S_u + T_u = 1 \quad (\text{E.68})$$

die Bezeichnung komplementäre Sensitivitäten. Verschiedene Interpretationen der charakteristischen Funktionen des geschlossenen Regelkreises sind in der Literatur zur robusten Regelung zu finden und werden an dieser Stelle nicht wiederholt. Die ursprüngliche Definition der Sensitivität findet sich beispielsweise in ([SP05] (S. 25)).

Aufgrund der zu den Identitäten (E.63)-(E.66) äquivalenten Identitäten gilt, unter Verwendung der charakteristischen Funktionen des geschlossenen Regelkreises, unmittelbar $I + KS_eG = I + KGS_u = S_u, S_eG = GS_u, KS_e = S_uK$ sowie $S_e = I - T_e = I - GS_uK$.

Das Übertragungsverhalten des Regelkreises aus Abb. E.4 kann aufgrund dieser Identitäten äquivalent in Abhängigkeit von $S_u = (I + KG)^{-1}$ oder einer Mischung aus den beiden Termen S_e und S_u dargestellt werden ([Vid82a] (S. 886)). Beispielsweise gilt

$$\begin{pmatrix} u_K \\ y_K \\ u \\ y \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_e & -S_eG & -S_e \\ S_uK & -T_u & -S_uK \\ S_uK & S_u & -S_uK \\ T_e & S_eG & -T_e \\ T_e & S_eG & S_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.69})$$

Das in (E.69) gezeigte Übertragungsverhalten zeigt beispielsweise, dass die komplementäre Sensitivität T_e der Führungsübertragungsfunktion entspricht, während S_e das Übertragungsverhalten der Störung am Streckenausgang d_2 auf \tilde{y} wiedergibt. Da sowohl die Sensitivität als auch die komplementäre Sensitivität vom Regler K abhängen und zusätzlich beide der algebraischen Zwangsbedingung (E.68) unterliegen, eignet sich die betrachtete Regelkreisstruktur auf Basis eines Reglers mit nur einem Freiheitsgrad bekanntermaßen nicht zur unabhängigen Vorgabe von Führungsübertragungsverhalten und Störunterdrückung.

Auf Basis der in (E.69) auftretenden Übertragungsfunktionen kann eine vollständige Charakterisierung, hinsichtlich der Korrektgestelltheit und der Stabilität, des Regelkreises aus Abb. E.4 allein anhand der vier charakteristischen Übertragungsfunktionen

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_uK & S_u \\ T_e & S_eG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.70})$$

$$= \begin{pmatrix} I \\ G \end{pmatrix} S_u \begin{pmatrix} K & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.71})$$

vorgenommen werden. Zu diesen Übertragungsfunktionen zählen neben den bereits eingeführten Übertragungsfunktionen S_u und T_e zusätzlich die Sensitivität gegenüber Störungen am Streckenausgang $S_uK = KS_e$ („load sensitivity function“) sowie die Sensitivität gegenüber Störungen am Streckeneingang S_eG („noise sensitivity function“) ([AM11] (S. 317)).

E.2.3 Definition und Korrektgestelltheit eines Regelkreises mit zwei Freiheitsgraden

Regelkreisstruktur unter Verwendung eines Reglers mit zwei Freiheitsgraden

Aufgrund der im vorangehenden Abschnitt genannten Einschränkungen eines Regelungsansatzes mit lediglich einem Freiheitsgrad, wird im Folgenden ein primär für die Regelung des Beispielsystems eingesetzter Regelungsansatz mit zwei Freiheitsgraden K_r und K_y im Regler eingeführt. Das

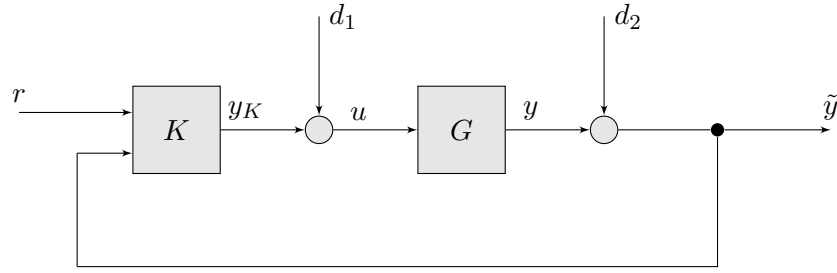


Abbildung E.5: Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden.

allgemeine Regelgesetz eines linearen Regelungsansatzes mit zwei Freiheitsgraden ergibt sich aus $y_K = K u_K$ mit $u_K = \begin{pmatrix} r & \tilde{y} \end{pmatrix}^T$ und $K = \begin{pmatrix} K_r & -K_y \end{pmatrix}$ zu

$$y_K = \begin{pmatrix} K_r & -K_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = K_r r - K_y \tilde{y}. \quad (\text{E.72})$$

Die Möglichkeit zur unabhängigen Beeinflussung der Führungsgröße r und der Messgröße \tilde{y} kann dabei als allgemeinstes lineares Regelgesetz angesehen werden ([Vid87], [VS97]). Der Fall eines Regelgesetzes mit lediglich einem Freiheitsgrad resultiert aus (E.72) durch die Wahl von $K_r = K_y$. Die Berücksichtigung eines Reglers mit zwei Freiheitsgraden innerhalb der allgemeinen Zustandsraumdarstellung des Reglers gemäß (E.41) kann auf Basis geeignet partitionierter Operatoren der Zustandsraumdarstellung erfolgen. Im Folgenden werden die Betrachtungen auf das Übertragungsverhalten im Frequenzbereich eingeschränkt.

Aufgrund des Beispielsystems, dessen Übertragungsfunktion weder Nullstellen noch Pole in der rechten s-Halbebene aufweist, wird im folgenden auf die in diesem Kontext häufig in Kombination mit einer koprimen Zerlegung der Strecke verwendeten Youla-Parametrierung des Regelgesetzes ([VS97] (S. 590f)) verzichtet. Auf Basis des Übertragungsverhaltens der Strecke $y = Gu$ und des Regelgesetzes (E.72) folgt mit $u = y_K + d_1$ und $\tilde{y} = y + d_2$ der in Abb. E.5 dargestellte Regelkreis. Das Übertragungsverhalten des Regelkreises lautet

$$\begin{pmatrix} y_K \\ u \\ y \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_u K_r & -S_u K_y G & -S_u K_y \\ S_u K_r & S_u & -S_u K_y \\ S_e G K_r & S_e G & -S_e G K_y \\ S_e G K_r & S_e G & S_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.73})$$

mit $S_e = (I + G K_y)^{-1}$, $S_u = (I + K_y G)^{-1}$ und $T_e + S_e = I$. Die Korrektgestelltheit des betrachteten Regelkreises ist äquivalent zum Fall des Standard-Regelkreises und diese Eigenschaft wird im Folgenden vorausgesetzt. Eine vollständige Charakterisierung des betrachteten Regelkreises und dabei insbesondere der Stabilität erfordert, ausgehend von (E.73) und abweichend vom Standard-Regelkreis, die Betrachtung sechs unterschiedlicher Übertragungsfunktionen. Diese sechs Übertra-

gungsfunktionen treten beispielsweise bei der Betrachtung des Übertragungsverhaltens

$$\begin{pmatrix} y_K \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_u K_r & -S_u K_y G & -S_u K_y \\ S_e G K_r & S_e G & S_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.74})$$

auf. Während sich aufgrund von $S_e = (I + G K_y)^{-1}$ und $S_u = (I + K_y G)^{-1}$ und demzufolge $T_e = S_e G K_y$ sowie $T_u = S_u K_y G$ die Reglerkomponente K_y auf jede der sechs in (E.74) auftretenden charakteristischen Übertragungsfunktionen des Regelkreises aus Abb. E.5 auswirkt, beeinflusst K_r lediglich das Übertragungsverhalten der Führungsgröße r . Das Regelgesetz (E.72) ermöglicht eine unabhängige Beeinflussung der Führungsübertragungsfunktion

$$y = S_e G K_r r = T_y r. \quad (\text{E.75})$$

Eine Übersicht zu verschiedenen alternativen Realisierungsformen von Regelgesetzen mit zwei Freiheitsgraden sowie eine Diskussion der jeweiligen Vor- und Nachteile in Abhängigkeit von der zu regelnden Strecke findet sich in [KD07]. Nach der grundsätzlichen Festlegung eines Regelgesetzes gemäß (E.72) bleibt die Frage nach der Auslegung der in (E.72) auftretenden Komponenten K_f und K_b zur Gewährleistung bestehender Regelungsziele.

Modellfolgeregelung als Spezialfall einer Regelung mit zwei Freiheitsgraden

Um für das Beispielsystem neben der robusten Stabilisierung auch eine einfache Vorgabe des Führungsübertragungsverhaltens zu ermöglichen, wird unter anderem eine Modellfolgeregelung eingesetzt. Die im verbleibenden Teil dieses Abschnitts definierten charakteristischen Funktionen der vorgeschlagenen Modellfolgeregelung sind als Vorbereitung zur Definition des in Abschnitt 4.5.3 eingeführten Gewichtungsschemas A zu verstehen.

Unter Verwendung einer Referenzübertragungsfunktion G_r folgt das Regelgesetz der angestrebten Modellfolgeregelung durch die Wahl $K_r = K_f + K_b G_r$ und $K_y = K_b$ als Spezialfall eines Regelgesetzes mit zwei Freiheitsgraden aus (E.72) zu

$$\begin{aligned} y_K &= K u_K \\ &= \begin{pmatrix} K_f + K_b G_r & -K_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{E.76})$$

Das Blockschaltbild des Regelgesetzes der allgemeinen Regelung mit zwei Freiheitsgraden findet sich in Abb. E.6a, während das Regelgesetz der Modellfolgeregelung in Abb. E.6b dargestellt ist.

Für das Übertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises folgt aus (E.74) mit (E.76) sowie den Abkürzungen $S_e = (I + G K_b)^{-1}$ und $S_u = (I + K_b G)^{-1}$ das Übertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises zu

$$\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_e G & S_e & S_e G (K_f + K_b G_r) \\ -S_u K_b G & -S_u K_b & S_u (K_f + K_b G_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ r \end{pmatrix}. \quad (\text{E.77})$$

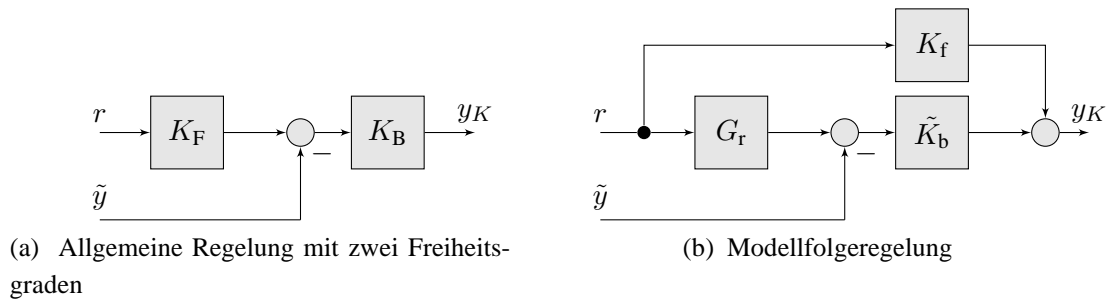


Abbildung E.6: Regelgesetz im Fall einer allgemeinen Regelung mit zwei Freiheitsgraden und eines Spezialfalls einer derartigen Regelung, der Modellfolgeregelung.

Dabei unterliegen S_e und $T_e = S_e G K_b$ der algebraischen Zwangsbedingung $S_e + T_e = I$ und mit $T_{\text{fyr}} = S_e G K_f$ folgt für die Führungsübertragungsfunktion

$$\begin{aligned} y &= S_e G (K_f + K_b G_r) r = T_{\text{fyr}} r + T_e G_r r \\ &= T_{\text{yr}} r. \end{aligned} \quad (\text{E.78})$$

Im Falle einer idealen Modellfolgeregelung sollte die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises gerade der Referenzübertragungsfunktion entsprechen $T_{\text{yr}} = G_r$. Damit folgt aus (E.78) unter der Voraussetzung der Existenz einer Inversen der Strecke G die ideale Modellfolgeregelung mit $K_f = G^{-1} G_r$. Wünschenswert ist an dieser Stelle die Existenz einer stabilen Inversen von G sowie die Realisierbarkeit von $G^{-1} G_r$. Für die Regelabweichung gilt $e = G_r r - \tilde{y}$, daraus folgt unter Berücksichtigung von $\tilde{y} = d_2 + G d_1 + G K_f r + G K_b$ das Übertragungsverhalten auf die Regelabweichung zu

$$e = \begin{pmatrix} -S_e G & -S_e & S_{\text{er}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ r \end{pmatrix} \quad (\text{E.79})$$

mit $S_{\text{er}} = S_e (G_r - G K_f)$. Die Übertragungsfunktionen des Referenzsignals auf den Fehler e und die Führungsübertragungsfunktion T_{yr} unterliegen damit der algebraischen Zwangsbedingung

$$\begin{aligned} S_{\text{er}} + T_{\text{yr}} &= S_e (G_r - G K_f) + S_e G (K_f + K_b G_r) \\ &= G_r. \end{aligned} \quad (\text{E.80})$$

E.2.4 Definition und Korrektgestelltheit des erweiterten Regelkreises

Im Hinblick auf die Analyse von Regelkreisen hinsichtlich der in Definition 108 aufgeführten Eigenschaften sowie die Synthese von Reglern, die a priori verschiedene Regelkreis Eigenschaften garantieren, ist es erforderlich, anstelle der zu regelnden Strecke, eine erweiterte Strecke P der Form (E.48) im Regelkreis zu berücksichtigen.

Einleitend erfolgt die Einführung des erweiterten Regelkreises N , der als Basis für die Formulierung verschiedener Entwurfsprobleme innerhalb dieser Arbeit dient. Die ebenfalls auf N beruhende Definition von F erlaubt explizit die Einbeziehung von Aspekten der Robustheit in die Analyse von Regelkreisen und die Reglersynthese. Die folgende Nomenklatur orientiert sich an den in [SP05] gebräuchlichen Bezeichnungen.

Der erweiterte Regelkreis

Grundlage für den erweiterten Regelkreis bildet eine erweiterte Strecke P der Form (E.48). Die er-

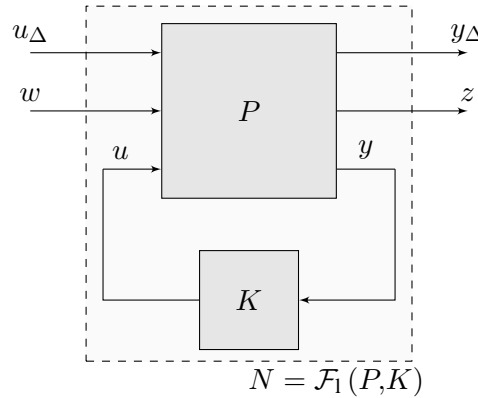


Abbildung E.7: Erweiterter Regelkreis $N = \mathcal{F}_1(P, K)$.

weiterte Strecke beinhaltet in gewohnter Weise die Formulierung der Performance Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis. Darüber hinaus umfasst P den nominellen Teil einer Modellschar. Mittels der Eingangssignale u_Δ und der Ausgangssignale y_Δ besteht somit die Möglichkeit, die erweiterte Strecke unter Verwendung einer oberen LFT mit einer Unsicherheitsstruktur zu verbinden. Die im Folgenden mit erweiterter Regelkreis bezeichnete Abbildung

$$N : \mathcal{U}_\Delta \times \mathcal{U}_w \rightarrow \mathcal{Y}_\Delta \times \mathcal{Y}_z$$

$$\begin{pmatrix} u_\Delta \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_\Delta \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{E.81})$$

resultiert aus einer unteren LFT von P mit einem Regler $u = Ky$. Die Darstellung von N als allgemeines Blockschaltbild findet sich in Abb. E.7.

Zunächst erfolgt die Darstellung von $N = \mathcal{F}_1(P, K)$ im Zeitbereich und damit in Analogie zur Einführung des geschlossenen Regelkreises in Abschnitt E.2.3. Die Parallelschaltung aus erweiterter

Strecke (E.42) und Regler lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_K(t)}{\partial t} \\ y_\Delta(t) \\ z(t) \\ y_m(t) \\ y_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_e & 0 & B_{e,\Delta} & B_{e,w} & B_{e,s} & 0 \\ 0 & A_K & 0 & 0 & 0 & B_K \\ C_{\Delta,e} & 0 & D_{\Delta,\Delta} & D_{\Delta,w} & D_{\Delta,s} & 0 \\ C_{z,e} & 0 & D_{z,\Delta} & D_{z,w} & D_{z,s} & 0 \\ C_{m,e} & 0 & D_{m,\Delta} & D_{m,w} & D_{m,s} & 0 \\ 0 & C_K & 0 & 0 & 0 & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \\ u_\Delta(t) \\ w(t) \\ u_s(t) \\ u_K(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.82})$$

Für den zugrunde liegenden Zustandsraum gilt $\mathcal{X}_N = \mathcal{X}_P \oplus \mathcal{X}_K$. Verschiedene Eigenschaften, die sowohl der erweiterten Strecke als auch dem Regler zu eigen sind, vererben sich unmittelbar auf die Parallelschaltung der beiden Systeme. Der Argumentation für den Fall des geschlossenen Regelkreises folgend, wird das durch (E.82) gegebene System als Element der Systemklasse der erweiterten Strecke angenommen.

Aus den Annahmen der zulässigen Stabilisierbarkeit von $(A_e, B_{e,s})$ und (A_K, B_K) folgt die zulässige Stabilisierbarkeit von

$$\left(\begin{pmatrix} A_e & 0 \\ 0 & A_K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{e,s} & 0 \\ 0 & B_K \end{pmatrix} \right). \quad (\text{E.83})$$

Eine analoge Aussage gilt hinsichtlich der Detektierbarkeit des durch (E.82) definierten Systems. In der Tat ist die zulässige Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit von erweiterter Strecke und Regler notwendig und hinreichend für die entsprechende Eigenschaft der Parallelschaltung dieser beiden Systeme ([JN87] (S. 1433)). Das Berücksichtigen der Rückführung

$$\begin{pmatrix} u_s(t) \\ u_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m(t) \\ y_K(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.84})$$

innerhalb der letzten beiden Zeilen von (E.82), führt auf

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & -D_{m,s} \\ -D_K & I \end{pmatrix}}_{=\overline{D}} \begin{pmatrix} y_m(t) \\ y_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{m,e} & 0 \\ 0 & C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{m,\Delta} & D_{m,w} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\Delta(t) \\ w(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.85})$$

Die Bedingungen der Korrektgestelltheit von $N = \mathcal{F}_1(P, K)$ ergeben sich damit analog zum Fall des geschlossenen Regelkreises auf Basis der Durchgriffsoperatoren. Für die Verkettung der kompakten Durchgriffsoperatoren gilt $(D_{m,s}D_K) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_K, \mathcal{Y})$ und $(D_KD_{m,s}) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}_K)$, daraus folgt mit den entsprechenden Identitäten $(I - D_{m,s}D_K) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_K, \mathcal{Y})$ sowie $(I - D_KD_{m,s}) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}_K)$. Unter Annahme der Beschränkten Invertierbarkeit von $I - D_{m,s}D_K$ bzw. gleichwertig aus der beschränkten Invertierbarkeit von $I - D_KD_{m,s}$ folgt die Existenz von

$$\overline{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{L}_1 & D_{m,s}\overline{L}_2 \\ D_K\overline{L}_1 & \overline{L}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.86})$$

mit $\bar{L}_1 = (I - D_{m,s}D_K)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{U}_K)$ und $\bar{L}_2 = (I - D_KD_{m,s})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}_K, \mathcal{U})$. Unter Berücksichtigung von $\mathcal{U}_K = \mathcal{Y}$ und $\mathcal{U} = \mathcal{Y}_K$ gilt darüber hinaus $\bar{D}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}_K, \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}_K)$, wobei \bar{D}^{-1} kompakt ist.

Hinsichtlich der Parallelschaltung aus erweiterter Strecke und Regler (E.82) ergibt sich unter Berücksichtigung der Ausgangsgleichung

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L}_1 C_{m,e} & D_{m,s} \bar{L}_2 C_K \\ D_K \bar{L}_1 C_{m,e} & \bar{L}_2 C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{L}_1 D_{m,\Delta} & \bar{L}_1 D_{m,w} \\ D_K \bar{L}_1 D_{m,\Delta} & D_K \bar{L}_1 D_{m,w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\Delta(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.87})$$

ein Regelgesetz, bestehend aus einer konstanten Zustandsrückführung und einem als Vorfilter zu interpretierenden Term

$$\begin{pmatrix} u_s(t) \\ u_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_K \bar{L}_1 C_{m,e} & \bar{L}_2 C_K \\ \bar{L}_1 C_{m,e} & D_{m,s} \bar{L}_2 C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_K \bar{L}_1 D_{m,\Delta} & D_K \bar{L}_1 D_{m,w} \\ \bar{L}_1 D_{m,\Delta} & \bar{L}_1 D_{m,w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\Delta(t) \\ w(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.88})$$

Die in diesem Regelgesetz enthaltene Abbildung der Zustände entsteht aus der Verknüpfung einer im Sinne der Pritchard-Salamon-Klasse zulässigen Ausgangsabbildung sowie eines kompakten Operators

$$\begin{pmatrix} D_K \bar{L}_1 C_{m,e} & \bar{L}_2 C_K \\ \bar{L}_1 C_{m,e} & D_{m,s} \bar{L}_2 C_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_K \bar{L}_1 & \bar{L}_2 \\ \bar{L}_1 & D_{m,s} \bar{L}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{m,e} & 0 \\ 0 & C_K \end{pmatrix}. \quad (\text{E.89})$$

Das in (E.88) auftretende Vorfilter ist beschränkt und kompakt und kann damit unabhängig von der Systemklasse stets als zulässiger Eingangsoperator angesehen werden. Zudem beeinflusst das Vorfilter nicht die Stabilität der N zugeordneten stark stetigen Halbgruppe.

Einsetzen von (E.88) in (E.82) führt auf die Zustandsgleichung von $N = \mathcal{F}_1(P, K)$ in Abhängigkeit von den Systemoperatoren der erweiterten Strecke und des Reglers

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_K(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_e + B_{e,s} D_K \bar{L}_1 C_{m,e} & B_{e,s} \bar{L}_2 C_K \\ B_K \bar{L}_1 C_{m,e} & A_K + B_K D_{m,s} \bar{L}_2 C_K \end{pmatrix}}_{=A_{\text{LFT}}} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_{e,\Delta} + B_{e,s} D_K \bar{L}_1 D_{m,\Delta} & B_{e,w} + B_{e,s} D_K \bar{L}_1 D_{m,w} \\ B_K \bar{L}_1 D_{m,\Delta} & B_K \bar{L}_1 D_{m,w} \end{pmatrix}}_{=B_{\text{LFT}}} \begin{pmatrix} u_\Delta(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.90})$$

sowie eine Ausgangsgleichung

$$\begin{pmatrix} y_\Delta(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_{\Delta,e} + D_{\Delta,s} D_K \bar{L}_1 C_{m,e} & + D_{\Delta,s} \bar{L}_2 C_K \\ C_{z,e} + D_{z,s} \bar{L}_2 D_K C_{m,e} & + D_{z,s} \bar{L}_2 C_K \end{pmatrix}}_{C_{\text{LFT}}} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} D_{\Delta,\Delta} + D_{\Delta,s} D_K \bar{L}_1 D_{m,\Delta} & D_{\Delta,w} + D_{\Delta,s} D_K \bar{L}_1 D_{m,w} \\ D_{z,\Delta} + D_{z,s} D_K \bar{L}_1 D_{m,\Delta} & D_{z,w} + D_{z,s} D_K \bar{L}_1 D_{m,w} \end{pmatrix}}_{D_{\text{LFT}}} \begin{pmatrix} u_\Delta(t) \\ w(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.91})$$

Die Herleitung der Zustandsgleichung und der Ausgangsgleichung des erweiterten Regelkreises $N = \mathcal{F}_1(P, K)$ kann als vollständig äquivalent zur Herleitung der Zustandsraumdarstellung im Fall des geschlossenen Regelkreises in Abschnitt E.2.3 angesehen werden. Unter Annahme einer erweiterten Strecke in der Pritchard-Salomon-Klasse sowie eines endlich-dimensionalen Reglers, gelten für die Systemklasse des resultierende Systems N die bereits für den Standard-Regelkreis getroffenen Aussagen.

Im Bildbereich der Laplace-Transformation folgt aus der Existenz einer beschränkten Inversen von $(I - P_{m,s}K)$ oder von $(I - KP_{m,s})$ gleichwertig die Korrektgestelltheit des Systems $N = \mathcal{F}_1(P, K)$. Unter der Voraussetzung der Korrektgestelltheit ergibt sich ausgehend von der Definition der unteren LFT Definition 104 mit der Rückführung $u_s = y_K = Ku_K$ das Übertragungsverhalten

$$\begin{aligned} N = \mathcal{F}_1(P, K) &= \begin{pmatrix} P_{\Delta,\Delta} & P_{\Delta,w} \\ P_{z,\Delta} & P_{z,w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{\Delta,s} \\ P_{z,s} \end{pmatrix} K (I - P_{m,s}K)^{-1} \begin{pmatrix} P_{m,\Delta} & P_{m,w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{\Delta,\Delta} + P_{\Delta,s}K(I - P_{m,s}K)^{-1}P_{m,\Delta} & P_{\Delta,w} + P_{\Delta,s}K(I - P_{m,s}K)^{-1}P_{m,w} \\ P_{z,\Delta} + P_{z,s}K(I - P_{m,s}K)^{-1}P_{m,\Delta} & P_{z,w} + P_{z,s}K(I - P_{m,s}K)^{-1}P_{m,w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_{\Delta,\Delta} & N_{\Delta,w} \\ N_{z,\Delta} & N_{z,w} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{E.92}$$

Wie bereits im Fall des geschlossenen Regelkreises sind die Bedingungen für die Korrektgestelltheit von N im Zeitbereich und im Frequenzbereich äquivalent. Unter der Annahme $P_{m,s} = G$ stimmen die Voraussetzungen zur Korrektgestelltheit des erweiterten Regelkreises N und des Standard-Regelkreises überein. Diese Annahme erlaubt innerhalb der erweiterten Strecke nicht die Berücksichtigung dynamischer Systeme über die Strecke hinaus und kann daher als sehr einschränkend angesehen werden.

Unter der Annahme jeweils energiebeschränkter und kausaler Signale lässt sich

$$\begin{aligned} N : \mathcal{H}_2(\mathcal{U}_\Delta) \times \mathcal{H}_2(\mathcal{U}_w) &\rightarrow \mathcal{H}_2(\mathcal{Y}_\Delta) \times \mathcal{H}_2(\mathcal{Y}_z) \\ \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} y_\Delta \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{F}_1(P, K) \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{E.93}$$

schreiben. Die Einschränkung auf die erweiterte Strecke $\tilde{P} = \mathcal{F}_u(P, 0)$ der Form (E.50) innerhalb von N entspricht der Vernachlässigung von Unsicherheiten. Das in diesem Fall verbleibende Übertragungsverhalten $N_{z,w} = \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K) = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_u(P, 0), K)$ bildet die Grundlage für die Definition des Entwurfsproblems \mathcal{H}_∞ -optimaler Regler in Abschnitt 4.4.1. Erfolgreich unter Verwendung von $N_{z,w}$ mit $\gamma \leq 1$ synthetisierte \mathcal{H}_∞ -optimale Regler garantieren a priori die Einhaltung der in P gestellten Performance-Anforderungen im nominellen Fall. Die insbesondere in der Zeitbereichsdarstellung unmittelbar ersichtliche Abhängigkeit der LFT $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ von den Operatoren des Reglers $\Sigma_K(A_K, B_K, C_K, D_K)$ erlaubt den Einsatz von $\mathcal{F}_1(P, K)$ als Berechnungsgrundlage derartiger Regler.

Der unsicherheitsbehaftete erweiterte Regelkreises

Als Basis für den unsicherheitsbehafteten erweiterten Regelkreis dient der erweiterte Regelkreis N gemäß (E.81). Die Berücksichtigung einer Modellschar innerhalb des geschlossenen Regelkreises erfolgt durch eine Rückführung der Form $u_{\Delta}(s) = \Delta(s) y_{\Delta}(s)$. Dabei wird für diese Rückführung im Folgenden einschränkend eine stabile strukturierte unsichere Übertragungsfunktion $\Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ mit \mathcal{M}_{Δ_s} entsprechend (E.16) angenommen. Auf eine Darstellung im Zeitbereich wird an dieser Stelle verzichtet.

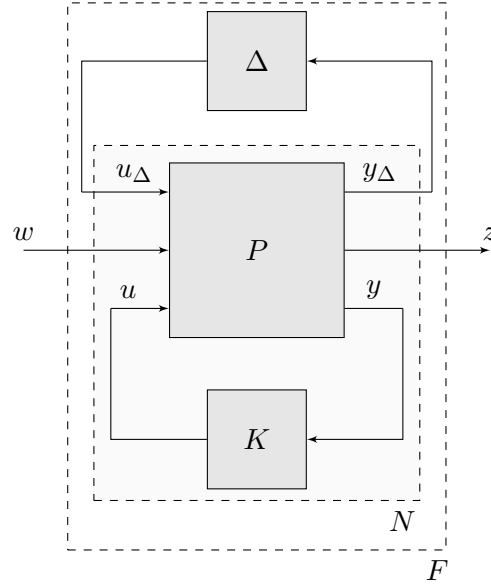


Abbildung E.8: Unsicherheitsbehafteter erweiterter Regelkreis $F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$.

Für jedes $\Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ resultiert ein geschlossener Regelkreis $F : \mathcal{U}_w \rightarrow \mathcal{Y}_z, w \mapsto z = Fw$ mit

$$F = \mathcal{F}_u(N, \Delta) = N_{z,w} + N_{z,\Delta} \Delta (I - N_{\Delta,\Delta} \Delta)^{-1} N_{\Delta,w}. \quad (\text{E.94})$$

Die Berücksichtigung jedes Elementes der Modellschar \mathcal{M}_{Δ_s} führt auf eine Schar geschlossener Regelkreise. Hinsichtlich der für F resultierenden Systemklasse gelten die bezüglich N getroffenen Aussagen. Da jede Übertragungsfunktion $\Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ einem endlich-dimensionalen System entspricht, lässt sich jedes $\Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ als Regler für N interpretieren und damit eine entsprechende Argumentation zur resultierenden Systemklasse aufbauen. Für korrekt gestellte N folgt die Korrektgestelltheit von F falls $(I - N_{\Delta,\Delta} \Delta)^{-1}$ für alle $\Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ existiert.

Unter Berücksichtigung einer Unsicherheitsstruktur identisch Null $\Delta = 0$ in (E.94) folgt nominelle Performance-Abbildung des geschlossenen Regelkreises von w auf z zu $\tilde{F} : \mathcal{U}_w \rightarrow \mathcal{Y}_z, w \mapsto z = \tilde{F}w$ wobei

$$\tilde{F} = N_{z,w} = \mathcal{F}_l(\tilde{P}, K) = \mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(P, 0), K). \quad (\text{E.95})$$

In (E.94) wird demnach für F durch ein $\Delta \neq 0$ eine Abweichung des Performance-Verhaltens des Regelkreises vom nominellen Fall $\tilde{F} = N_{z,w}$ beschrieben. Mit F steht eine Formulierung des geschlossenen Regelkreises zur Verfügung, die eine Untersuchung aller in Definition 108 aufgeführten Eigenschaften von Regelkreisen erlaubt und implizit mittels Satz 78 auch der Synthese robuster Regler unter Verwendung des strukturierten Singulärwertes μ zugrunde liegt.

E.2.5 Zur Stabilität geschlossener Regelkreise

Der vorliegende Abschnitt definiert verschiedene in Bezug auf die Stabilität geschlossener Regelkreise gebräuchliche Stabilitätsbegriffe und zeigt Äquivalenzen zwischen diesen Begriffen auf. Die folgenden Ausführungen dienen damit als Grundlage für die Analyse der nominellen und robusten Stabilität geschlossener Regelkreise in Abschnitt E.3 und sind als Verallgemeinerung der aus dem Endlich-dimensionalen wohlbekannten Zusammenhänge zwischen der exponentiellen Stabilität und der Ein-/Ausgangsstabilität geschlossener Regelkreise ([Vid87], [ZDG95]) zu verstehen. Insbesondere die Anwendung von Reglersyntheseverfahren basierend auf der Ein-/Ausgangsstabilität geschlossener Regelkreise gewinnt erst durch die Äquivalenz der Ein-/Ausgangsstabilität zur inneren Stabilität an Sinnhaftigkeit.

Im Folgenden gelten für die Strecke G , die erweiterte Strecke P und den Regler K die Annahmen gemäß Abschnitt E.2.2 beziehungsweise Abschnitt E.1.1. Darüber hinaus gilt es zu beachten, dass den Ausführungen der letztgenannten Abschnitte zu Folge, korrekt gestellte Verkopplungen der Form N oder $\mathcal{H}(G, K)$ zumindest als Element der Pritchard-Salamon-Klasse vorausgesetzt werden. Die Korrektgestelltheit der genannten Rückkopplungsstrukturen wird im Weiteren vorausgesetzt. Einleitend wird die exponentielle Stabilität hinsichtlich N und $\mathcal{H}(G, K)$ sowie die Äquivalenz der exponentiellen Stabilität von N mit der von $\mathcal{H}(G, K)$ eingeführt. Darauf erfolgt die Definition der Ein-/Ausgangsstabilität des Standardregelkreises. Anschließend wird aufgezeigt unter welchen zusätzlichen Annahmen die Ein-/Ausgangsstabilität des Standardregelkreises $\mathcal{H}(G, K)$ äquivalent zum stärkeren Konzept der exponentiellen Stabilität von $\mathcal{H}(G, K)$ ist.

Exponentielle Stabilität des nominellen erweiterten Regelkreises und des Standard-Regelkreises

Der Begriff der exponentiellen Stabilität des nominellen erweiterten Regelkreises \tilde{F} aus (E.95) und des Standard-Regelkreises $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ folgt unmittelbar Definition 9 aus Abschnitt 3.2.1. Der folgende Satz beschreibt die Äquivalenz zwischen der exponentiellen Stabilität von \tilde{F} (Abb. E.9a) und der exponentiellen Stabilität von $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ (Abb. E.9b).

Satz 74 *Es seien eine erweiterte Strecke \tilde{P} der Form (E.50) sowie ein zugehöriger Regler K , so dass $\tilde{F} = \mathcal{F}_l(\tilde{P}, K)$ korrekt gestellt ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *Der nominelle erweiterte Regelkreis \tilde{F} ist exponentiell stabil auf allen Räumen der zugrunde liegenden Raumskala.*

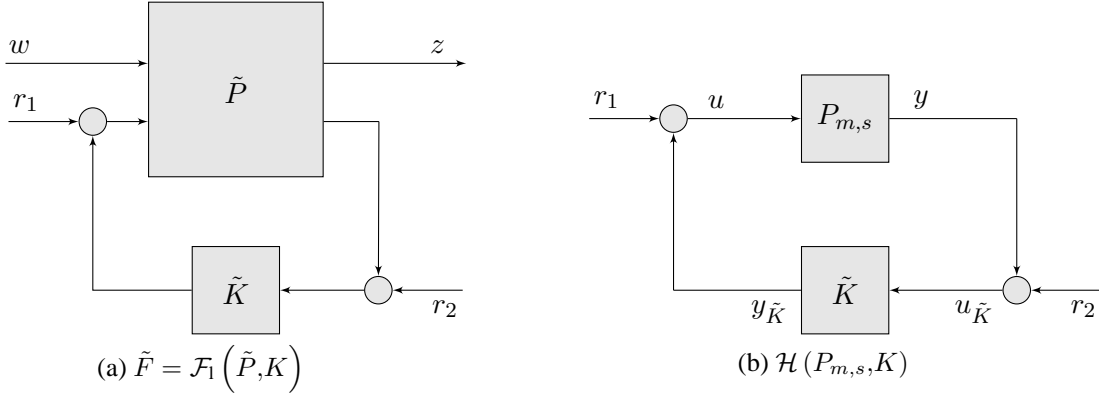


Abbildung E.9: Nomineller erweiterter Regelkreis $\tilde{F} = \mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ und Standard-Regelkreis $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$.

- Der Regelkreis $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ ist exponentiell stabil auf allen Räumen der zugrunde liegenden Raumskala. □

Bereits anhand der Definition der erweiterten Strecke \tilde{P} ist zu erkennen, dass die Systemoperatoren von $P_{m,s} = \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_{e,s} \\ \hline C_{m,e} & D_{m,s} \end{array} \right]$ und \tilde{P} übereinstimmen. Diese Aussage überträgt sich auf die Systemoperatoren von $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ und $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$. Da die exponentielle Stabilität eines Systems ausschließlich von der zugehörigen stark stetigen Halbgruppe und damit von der eindeutig zugeordneten infinitesimalen Erzeuger abhängt, folgt Satz 74. Den Betrachtungen zur Stabilität stark stetiger Halbgruppen aus Abschnitt 3.2.1 folgend, bedingt die exponentielle Stabilität von $N_{z,w}$ oder von $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ auch unmittelbar die schwächere Eigenschaft der inneren Stabilität von $N_{z,w}$ und $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$.

Die Bestimmung des infinitesimalen Erzeugers von $N_{z,w}$ oder gleichwertig von $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ ist nicht immer ohne weitere Anstrengungen möglich. Daher ist grundsätzlich ein Nachweis für die exponentielle Stabilität der beiden Rückkopplungsstrukturen wünschenswert, der ohne explizite Kenntnisse des infinitesimalen Erzeugers auskommt.

Definition der Ein-/Ausgangsstabilität geschlossener Regelkreise

Die Anwendung der Definition der Ein-/Ausgangsstabilität unendlich-dimensionaler Systeme gemäß Definition 11 auf einen korrekt gestellten geschlossenen Regelkreis $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ mit einer Abbildung $\mathcal{H}(\cdot, K)$ gemäß (E.62) führt auf die Definition der Ein-/Ausgangsstabilität von $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$.

Definition 107 Es sei ein geschlossener Regelkreis $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$, ferner sei $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ korrekt gestellt. Dann ist $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ ein-/ausgangsstabil, falls $\mathcal{H}(P_{m,s}, K) \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}_L, \mathcal{Y}_L))$. □

Die Ein-/Ausgangsstabilität von $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ ist damit gleichbedeutend mit der Zugehörigkeit von $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ zu einer gewissen Algebra. Der geschlossene Regelkreis $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ ist durch die Ein-/Ausgangsabbildung

$$\mathcal{H}(P_{m,s}, K) : \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ u_K \end{pmatrix} \quad (\text{E.96})$$

vollständig charakterisiert. Ohne weitere Annahmen hinsichtlich der Stabilität von $P_{m,s}$ oder K ist der in Definition 107 angenommene korrekt gestellte Regelkreis ein-/ausgangsstabil, falls jede der vier in (E.96) enthaltenen Abbildungen ein-/ausgangsstabil ist. Um im allgemeinen Fall die Ein-/Ausgangsstabilität einer Regelkreisstruktur mit zwei Freiheitsgraden zu gewährleisten, müssen die sechs in (E.73) auftretenden Übertragungsfunktionen jeweils ein-/ausgangsstabil sein.

Äquivalenz von exponentieller und Ein-/Ausgangsstabilität im Falle von $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$

Als Grundlage für den nachfolgenden Satz über die Äquivalenz von exponentieller Stabilität und Ein-/Ausgangsstabilität des geschlossenen Regelkreises $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ dienen Satz 10 sowie Lemma (34) aus [JN87] (S. 1433). Dem zitierten Lemma zur Folge folgt die zulässige Stabilisierbarkeit und zulässige Detektierbarkeit von $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$, falls sowohl $P_{m,s}$ als auch K gleichzeitig zulässig stabilisierbar und zulässig detektierbar sind. Der folgende Satz entspricht Theorem (35) aus [JN87] (S. 1433). Mit explizitem Bezug zur Pritchard-Salamon-Klasse wird der nachfolgende Satz in [Log92] (S. 120) formuliert.

Satz 75 *Es sei eine erweiterte Strecke \tilde{P} gemäß (E.42) und ein Regler K gemäß (E.41), sodass $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ korrekt gestellt ist. Ferner seien sowohl \tilde{P} als auch K zulässig stabilisierbar und zulässig detektierbar. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

AS1) $\mathcal{H}(P_{m,s}, K) \in \mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}_L, \mathcal{Y}_L))$;

AS2) Die $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ zugeordnete stark stetige Halbgruppe ist exponentiell stabil. □

Die Annahmen in Satz 75 beinhalten die zulässige Stabilisierbarkeit und zulässige Detektierbarkeit des geschlossenen Regelkreises. Da $\mathcal{H}(P_{m,s}, K)$ zudem zumindest der Pritchard-Salamon-Klasse angehört, kann der verbleibende Beweis zu Satz 75 völlig analog zu dem Beweis von Satz 10 erfolgen.

E.2.6 Der Satz der kleinen Verstärkungen

Die folgende Formulierung des in der englischsprachigen regelungstechnisch-orientierten Literatur als „Small Gain Theorem“ bezeichneten Satzes der kleinen Verstärkungen entstammt [Heu92] (S. 117). In der regelungstechnischen Literatur wird dieser Satz in einer recht weitgehend generalisierten Form in [DP05] (S. 108) aufgeführt.

Satz 76 *Es sei eine Banachalgebra \mathcal{B} mit einem Einselement I . Dann existiert für ein Element $I - L_e$ von \mathcal{B} eine Inverse in \mathcal{B} , falls die Neumannsche Reihe $\sum_{i \in \mathbb{I}^+} L_e^i$ konvergiert. Ferner gilt in einem derartigen Fall*

$$(I - L_e)^{-1} = \sum_{i \in \mathbb{I}^+} L_e^i. \quad (\text{E.97})$$

□

Inhaltlich knüpft Satz 76 die Existenz einer ebenfalls in \mathcal{B} gelegenen Inversen von $(I - L_e) \in \mathcal{B}$ an die Konvergenz einer Neumannschen Reihe. Eine schöne weiterführende Einbettung der Neumannschen Reihe in den mathematischen Kontext, als Verallgemeinerung geometrischer Reihen auf Banachalgebren, findet sich ebenfalls in [Heu92]. Im regelungstechnischen Kontext wird im Allgemeinen die Tatsache bemüht, dass unter Verwendung der Norm von \mathcal{B} die Einhaltung der Ungleichung $\|L_e\| < 1$ eine zumindest hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Neumannschen Reihe in (E.97) darstellt.

Im regelungstechnischen Kontext werden die algebraischen Eigenschaften stabiler Übertragungsfunktionen ausgenutzt, um ausgehend von Satz 76 Aussagen über die Korrektgestelltheit und Stabilität des Standard-Regelkreises $\mathcal{H}(G, K)$ zu treffen. Alle Schlussfolgerungen basieren dabei ausschließlich auf der durch geeignete Normen bemessenen Größe der im Regelkreis enthaltenen Übertragungsfunktionen G und K und kommen damit ohne eine explizite Berechnung von $\mathcal{H}(G, K)$ aus. Die Anwendung von Satz 76 zur Analyse der Korrektgestelltheit und Stabilität der in Abb. E.3a gezeigten Rückkopplungsstruktur $\mathcal{H}(G, K)$ erfordert zunächst eine Zuordnung von G und K zu den in Satz 76 aufgeführten Größen sowie einen Nachweis der geforderten mathematischen Eigenschaften.

Um den notwendigen mathematischen Rahmen zu begrenzen, wird vereinfachend eine gleiche Anzahl von Eingängen und Ausgängen für G und K vorausgesetzt. Ferner wird für G und K jeweils die Zugehörigkeit zu einer Banachalgebra stabiler Übertragungsfunktionen \mathcal{B} vorausgesetzt. Damit ein Banachraum den Anforderungen an eine Banachalgebra genügt, ist hinsichtlich der verwendeten Norm die Submultiplikativität zu gewährleisten. Grundsätzlich sind an dieser Stelle verschiedene Banachalgebren stabiler Übertragungsfunktionen denkbar, ausführlichere Betrachtungen dazu finden sich beispielsweise in [Vid87], [Log92] oder [CZ95]. Eine mögliche Wahl für eine Banachalgebra wäre der Hardy-Raum \mathcal{H}_∞ , ausgestattet mit der ∞ -Norm.

Die multiplikative Verknüpfung der angenommenen Operator-Algebra \mathcal{B} repräsentiert die Reihenschaltung zweier in \mathcal{B} enthaltener Übertragungsfunktionen. Unter der Annahme von $L_e = GK$ lässt sich L_e als offene Wirkungskette von $\mathcal{H}(G, K)$, dargestellt in Abb. E.3b, interpretieren. Aus $G \in \mathcal{B}$ und $K \in \mathcal{B}$ folgt damit die Zugehörigkeit der offenen Wirkungskette L_e zu \mathcal{B} , die in Analogie zum Nyquist-Kriterium den Ausgangspunkt der auf Satz 76 beruhenden Betrachtungen bildet. Unter den genannten Annahmen stellt die strenge Kontraktivität von L_e , repräsentiert durch die Normbeschränkung

$$\|L_e\|_{\mathcal{B}} < 1, \quad (\text{E.98})$$

eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der in Satz 76 auftretenden Neumannschen Reihe und damit auch für die Existenz der Inversen von $I - L_e$ in \mathcal{B} dar. Aus der Einhaltung von (E.98) folgt demnach die Korrektgestellttheit und Stabilität von $(I - L_e)^{-1}$. Aufgrund der Submultiplikativität der angenommenen Norm gilt

$$\|L_e\|_{\mathcal{B}} = \|GK\|_{\mathcal{B}} \leq \|G\|_{\mathcal{B}} \|K\|_{\mathcal{B}}. \quad (\text{E.99})$$

Somit existiert $(I - GK)^{-1}$ als Element von \mathcal{B} , falls

$$\|G\|_{\mathcal{B}} < \gamma \quad \text{und} \quad \|K\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{\gamma} \quad \text{oder} \quad (\text{E.100})$$

$$\|G\|_{\mathcal{B}} \leq \gamma \quad \text{und} \quad \|K\|_{\mathcal{B}} < \frac{1}{\gamma}. \quad (\text{E.101})$$

Sowohl (E.100) als auch (E.101) oder äquivalent die Forderung $\|K\|_{\mathcal{B}} < \frac{1}{\|G\|_{\mathcal{B}}}$ garantieren die strenge Kontraktivität der offenen Wirkungskette L_e hinsichtlich der submultiplikativen Norm gemäß (E.98) und sind somit hinreichende Bedingungen für die Korrektgestellttheit und Stabilität von $(I - GK)^{-1}$. Daraus lässt sich die Korrektgestellttheit und Stabilität aller in $\mathcal{H}(G, K)$ gemäß (E.62) enthaltener Übertragungspfade und damit die des gesamten Standard-Regelkreises $\mathcal{H}(G, K)$ folgern. Die Stabilität von $(I - GK)^{-1}$ und damit von $\mathcal{H}(G, K)$ folgt allerdings ohne Weiteres nur im Sinne der Stabilität der betrachteten Banachalgebra, d.h. zunächst kann damit für $\mathcal{H}(G, K)$ nur ein Schluss über die Form der Stabilität getroffen werden, die auch für G und K vorausgesetzt wird.

Zusätzlich ist die einem hinreichenden Kriterium innewohnende Konservativität zu beachten, ein Beispiel dazu findet sich in [DP05]. Aufgrund von (E.99) ist die Forderung der Normbeschränkung an L_e in (E.98) weniger konservativ, als die in (E.100) beziehungsweise (E.101) an die Normbeschränkung der einzelnen in L_e enthaltenen Elemente formulierten Forderungen.

Aus der Sicht des Regelungstechniklers kann Satz 76 als Generalisierung des Nyquist-Kriteriums angesehen werden. Neben der Anwendungsmöglichkeit von Satz 76 zur Stabilitätsanalyse nomineller Standard-Regelkreise, lässt sich der Satz der kleinen Verstärkungen auch zur Analyse der robusten Stabilität im Falle unstrukturierter Unsicherheiten heranziehen, vergleiche Abschnitt E.3.5. Die Anwendung des Satzes der kleinen Verstärkungen unter der Annahme endlich-dimensionaler Systeme $G \in \mathcal{RH}_{\infty}, K \in \mathcal{RH}_{\infty}$ findet sich Abschnitt E.3.2.

E.3 Analyse geschlossener Regelkreise

Dieser Abschnitt thematisiert einige im Folgenden relevante, charakteristische Eigenschaften geschlossener Regelkreise. Aus den Ausführungen zur Approximation unendlich-dimensionaler Systeme in Abschnitt 4.2 sowie zur Formulierung einer Modellschar zur Reglersynthese für das Beispielsystem in 4.3 wird die Berechtigung abgeleitet, in diesem Abschnitt die Ausführungen auf endlich-dimensionale Systeme einzuschränken. Ein gegebenenfalls unendlich-dimensionales System wird an dieser Stelle nur noch implizit als Element einer Modellschar berücksichtigt.

Einleitend erfolgt die Definition der relevanten Eigenschaften von Regelkreisen (Definition 108). Um eine Überprüfung eines Regelkreises hinsichtlich der in Definition 108 genannten Eigenschaften zu ermöglichen, wird anschließend zu jeder Eigenschaft ein einfach zu handhabendes Kriterium eingeführt.

E.3.1 Eigenschaften geschlossener Regelkreise

Die folgende aus [ZDG95] (S. 211) stammende Definition legt verschiedene als Maß für die Eignung und Güte eines verwendeten Reglers anzusehenden charakteristischen Eigenschaften geschlossener Regelkreise fest.

Definition 108 (Einige Eigenschaften geschlossener Regelkreise) Es sei eine Modellschar \mathcal{G} , eine nominelle Strecke $G_{\text{Nom}} \in \mathcal{G}$ sowie eine Menge von Regelungszielen. Ferner sei K ein auf Basis von G_{Nom} entworfener Regler. Dann besitzt der geschlossene Regelkreis

- **nominelle Stabilität**, falls K die nominelle Strecke G_{Nom} intern stabilisiert;
- **robuste Stabilität**, falls K alle Elemente von \mathcal{G} intern stabilisiert;
- **nominelle Performance**, falls der aus G_{Nom} und K bestehende Regelkreis alle Regelungsziele erfüllt;
- **robuste Performance**, falls jeder Regelkreis aus einem Element aus \mathcal{G} und K jeweils alle Regelungsziele erfüllt. □

Die in Definition 108 eingeführten Eigenschaften geschlossener Regelkreise werden innerhalb dieser Arbeit als Maßstab zur Beurteilung der zur Regelung des Beispielsystems synthetisierten Regler herangezogen. Da sich Definition 108 nicht unmittelbar als konstruktiv betrachten lässt, erfordert die Überprüfung der einzelnen genannten Eigenschaften die Einführung von Kriterien.

E.3.2 Nominelle Stabilität eines Regelkreises

Im Falle eines endlich-dimensionalen geschlossenen Regelkreises $\mathcal{H}(G, K)$ sind verschiedene Möglichkeiten zur Überprüfung der nominellen Stabilität wohlbekannt und die Ausführungen daher im Folgenden kurz gehalten.

Exponentielle Stabilität endlich-dimensionaler Systeme

Der Systemoperator eines endlich-dimensionalen Regelkreises lässt sich bei bekannter Strecke und gegebenem Regler problemlos bestimmen. Der Systemoperator ist in einem derartigen Fall stets kompakt und vollständig durch seine Eigenwerte charakterisiert. Notwendiges und hinreichendes

Kriterium für die exponentielle Stabilität der dem besagten Systemoperator eindeutig zugeordneten gleichmäßig stetigen Halbgruppe ist ein negativer Realteil aller Eigenwerte des Systemoperators des geschlossenen Regelkreises.

Im Endlich-dimensionalen sind die Begriffe der asymptotischen und exponentiellen Stabilität äquivalent. Ein im Sinne dieser beiden Stabilitätsbegriffe stabiler endlich-dimensionaler Regelkreis $\mathcal{H}(G, K)$ ist ebenfalls ein-/ausgangsstabil und es gilt $\mathcal{H}(G, K) \in \mathcal{RH}_\infty$.

Ein-/Ausgangsstabilität endlich-dimensionaler Systeme

Die Ein-/Ausgangsstabilität eines endlich-dimensionalen Regelkreises lässt sich gemäß Definition 107 an einem Zugehörigkeitsproblem $\mathcal{H}(G, K) \in \mathcal{RH}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty$ festmachen. Ausgehend von der Ein-/Ausgangsstabilität eines endlich-dimensionalen Systems lässt sich anhand von Satz 75 und damit unter zusätzlicher Annahme der Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit eines Systems auf dessen exponentielle Stabilität schließen.

Für den Sonderfall einer stabilen endlich-dimensionalen Strecke G und eines ebensolchen Reglers K folgt aus Satz 76 unter Verwendung von \mathcal{RH}_∞ ausgestattet mit der ∞ -Norm

$$\|G\|_\infty \|K\|_\infty < 1 \quad (\text{E.102})$$

ein notwendiges und hinreichendes und damit nicht konservatives Kriterium für die Korrektgestelltheit und interne Stabilität von $\mathcal{H}(G, K)$ ([ZDG95]). Die interne Stabilität entspricht der asymptotischen Stabilität und ist damit äquivalent zur exponentiellen Stabilität. Unter Ausnutzung der Definition der ∞ -Norm lässt sich die Ungleichung (E.102) gleichwertig durch

$$\overline{\sigma}(G(i\omega)) \overline{\sigma}(K(i\omega)) < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (\text{E.103})$$

ausdrücken.

E.3.3 Nominelle Performance von Regelkreisen

Die Analyse der nominellen Performance eines geschlossenen Regelkreises dient der Überprüfung, ob ein nominell stabilisierender Regler darüber hinaus die Einhaltung der Regelungsziele für den nominellen Regelkreis gewährleistet.

Die folgende Methode zur Analyse der nominellen Performance des geschlossenen Regelkreises basiert konsistenter Weise auf dem Verlauf des größten Singulärwertes des nominellen erweiterten geschlossenen Regelkreises gemäß (E.95). Unter der Voraussetzung der nominellen Stabilität eines geschlossenen Regelkreises folgt dessen nominelle Performance, falls

$$\|\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_u(P, 0), K)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \overline{\sigma}(N_{z,w}(i\omega)) < 1. \quad (\text{E.104})$$

Aus der Definition der Grenzfälle des strukturierten Singulärwertes erschließt sich, dass die Analyse der nominellen Performance eines geschlossenen Regelkreises auch äquivalent anhand des strukturierten Singulärwertes erfolgen kann. Unter der Annahme einer Rückkopplungsstruktur gemäß Abb. E.8 sowie einer unstrukturierten unsicheren Übertragungsfunktion $\Delta_{zw} \in \mathcal{RH}_\infty$, $\Delta_{zw}(i\omega) \in \mathbb{C}^{q_z \times p_w}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\bar{\sigma}(N_{z,w}(i\omega)) = \mu_{\Delta_{zw}}(N_{z,w}(i\omega)), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (\text{E.105})$$

Mittels des voranstehenden Zusammenhangs lässt sich die Ungleichungsbedingung für die nominelle Performance eines Regelkreises aus (E.104) durch

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\Delta_{zw}}(N_{z,w}(i\omega)) < 1 \quad (\text{E.106})$$

ausdrücken. In einer frequenzabhängigen Formulierung lautet das Kriterium

$$\mu_{\Delta_{zw}}(N_{z,w}(i\omega)) < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (\text{E.107})$$

Die letztgenannten Ungleichungen (E.106) und (E.107) ermöglichen jeweils die Einbettung der anhand der \mathcal{H}_∞ -Norm bemessenen nominellen Eigenschaft in eine Untersuchung auf Basis des strukturierten Singulärwertes unter Annahme unstrukturierter Unsicherheiten.

E.3.4 Robuste Stabilität im Fall strukturierter Unsicherheiten

Die robuste Stabilität eines geschlossenen Regelkreises wird im folgenden auf Basis der Performance-Abbildung $F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$ des unsicherheitsbehafteten erweiterten geschlossenen Regelkreises entsprechend (E.94) betrachtet. Dabei wird die Korrektgestelltheit und die nominelle Stabilität des erweiterten geschlossenen Regelkreises vorausgesetzt. Die ferner in F auftretende unsichere Übertragungsfunktion Δ wird als Element der Menge der stabilen strukturierten unsicheren Übertragungsfunktionen entsprechend (E.16) angenommen. Unter diesen Annahmen verbleibt in (E.94) der Term $(I - N_{\Delta,\Delta}\Delta)^{-1}$ oder äquivalent $(I - \Delta N_{\Delta,\Delta})^{-1}$ als einzige Quelle der Instabilität. Die Analyse der robusten Stabilität des geschlossenen Regelkreises reduziert sich somit auf

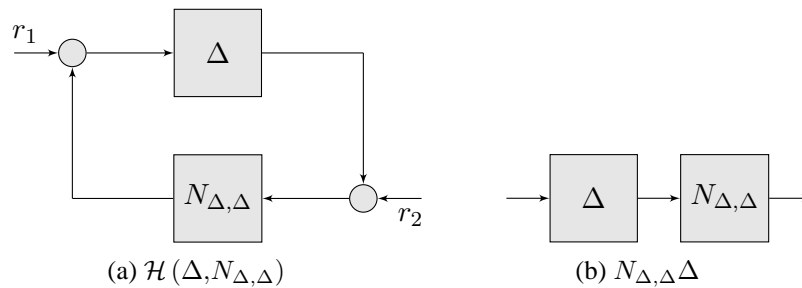


Abbildung E.10: Blockschaltbild des der robusten Stabilitätsanalyse zugrunde liegenden Standard-Regelkreises $\mathcal{H}(\Delta, N_{\Delta,\Delta})$ und der zugehörigen offenen Wirkungskette $N_{\Delta,\Delta}\Delta$.

die Frage nach der internen Stabilität eines Standard-Regelkreises $\mathcal{H}(\Delta, N_{\Delta, \Delta})$ dargestellt in Abb. E.10a. Abbildung E.10b zeigt die $\mathcal{H}(\Delta, N_{\Delta, \Delta})$ zugeordnete offene Wirkungskette.

Der folgende Satz findet sich jeweils mit zugehörigem Beweis beispielsweise in [ZDG95] (S. 276), [ZD98] (S. 200) oder [SP05] (S. 331).

Satz 77 (Robuste Stabilität im Fall strukturierter Unsicherheiten) *Es sei $\gamma_\Delta > 0$, $N_{\Delta, \Delta} \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ mit $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_\Delta}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

RS1) *Der in Abb. E.10a gezeigte Standard-Regelkreis $\mathcal{H}(\Delta, N_{\Delta, \Delta})$ ist korrekt gestellt und intern stabil für alle $\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$;*

RS2) $\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\mathcal{M}_\Delta}(N_{\Delta, \Delta}) < \gamma_\Delta.$ □

Die Eigenschaft der robusten Stabilität von $\mathcal{H}(\Delta, N_{\Delta, \Delta})$ unter der Annahme $\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ mit $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_\Delta}$ hängt laut Satz 77 lediglich vom Supremum des strukturierten Singulärwertes über alle $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ab. Falls $\mathcal{H}(\Delta, N_{\Delta, \Delta})$ korrekt gestellt und intern stabil für alle zugelassenen Unsicherheiten ist, folgt durch die eingangs getroffene Annahme der Stabilität von N und von Δ auch die robuste Stabilität von F für alle $\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$. Hinsichtlich einer Formulierung anhand der offenen Wirkungskette ist die Erfüllung einer der beiden äquivalenten Bedingungen aus Satz 77 gleichwertig zu

$$\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(N_{\Delta, \Delta}) \bar{\sigma}(\Delta) < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (\text{E.108})$$

Entsprechende Ausführungen finden sich in [SP05].

E.3.5 Robuste Stabilität im Fall unstrukturierter Unsicherheiten

Der vorliegende Abschnitt betrachtet einen Spezialfall der in Abschnitt E.3.4 thematisierten robusten Stabilität eines geschlossenen Regelkreises. Hinsichtlich N gelten die in Abschnitt E.3.4 getroffenen Annahmen. Anstelle allgemeiner stabiler strukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen werden im Folgenden stabile unstrukturierte unsichere Übertragungsfunktionen angenommen. Die im Allgemeinen durch (E.16) definierte Menge \mathcal{M}_{Δ_s} setzt sich in diesem Fall aus Elementen zusammen, die zu jedem $s \in \overline{\mathbb{C}}_+$ ein Element aus \mathcal{M}_Δ gemäß (E.9) sind. Für diesen Grenzfall stabiler strukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen stimmt der strukturierte Singulärwert zu jeder diskreten Frequenz mit seiner oberen Schranke gemäß (E.27) überein. Mit $s = i\omega$ gilt

$$\mu_{\mathcal{M}_\Delta}(N_{\Delta, \Delta}(i\omega)) = \bar{\sigma}(N_{\Delta, \Delta}(i\omega)), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (\text{E.109})$$

Die obere Schranke des strukturierten Singulärwertes über alle Frequenzen stimmt zudem mit der oberen Schranke des größten Singulärwertes überein

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\mathcal{M}_\Delta}(N_{\Delta, \Delta}(i\omega)) &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bar{\sigma}(N_{\Delta, \Delta}(i\omega)) \\ &= \|N_{\Delta, \Delta}\|_\infty. \end{aligned} \quad (\text{E.110})$$

Im Fall normbeschränkter unstrukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen mit

$$\|\Delta\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bar{\sigma}(\Delta(i\omega)) \leq \frac{1}{\gamma_\Delta} \quad (\text{E.111})$$

ist Satz 77 folgend, die Einhaltung der Schranke $\|N_{\Delta,\Delta}\|_\infty < \gamma_\Delta$ notwendig und hinreichend für die Korrektgestelltheit und die interne Stabilität von $\mathcal{H}(N_{\Delta,\Delta}, \Delta)$ und somit auch für die robuste Stabilität von $\mathcal{H}(N_{\Delta,\Delta}, \Delta)$ für alle zugelassenen Unsicherheiten.

Um robuste Stabilität unter Berücksichtigung stabiler unstrukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen nachzuweisen, lässt sich neben Satz 77 auch gleichwertig der Satz der kleinen Verstärkungen (Satz 76) nutzen. Der Satz der kleinen Verstärkungen ist somit Basis für ein äquivalentes Vorgehen bei der Überprüfung der nominellen Stabilität eines Regelkreises und der robusten Stabilität eines Regelkreises im Fall der genannten Unsicherheiten. Die dabei zu untersuchende Rückkopplungsstruktur und die zugehörige offene Wirkungskette finden sich in Abb. E.10a beziehungsweise in Abb. E.10b.

Um die Anwendung von Satz 76 zu ermöglichen, wird $L_e = \Delta N_{\Delta,\Delta}$ gesetzt, darüber hinaus wird die ∞ -Norm zur Normierung herangezogen. Ausgehend von (E.98), (E.100) oder (E.101) folgt die robuste Stabilität des geschlossenen Regelkreises unter diesen Annahmen dann und nur dann, wenn

$$\|\Delta\|_\infty < \gamma_\Delta \quad \text{und} \quad \|N_{\Delta,\Delta}\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_\Delta} \quad \text{oder} \quad (\text{E.112})$$

$$\|\Delta\|_\infty \leq \gamma_\Delta \quad \text{und} \quad \|N_{\Delta,\Delta}\|_\infty < \frac{1}{\gamma_\Delta} \quad (\text{E.113})$$

gilt. Der Satz der kleinen Verstärkungen führt im Fall stabiler unstrukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen und unter Verwendung der ∞ -Norm ebenfalls auf eine notwendige und hinreichende Bedingung für die robuste Stabilität des geschlossenen Regelkreises und ist damit in einem derartigen Fall nicht konservativ sondern exakt. Beweise für den notwendigen und hinreichenden Charakter der voranstehenden Beziehungen finden sich beispielsweise in [ZD98] (S. 138) oder [SP05] (S. 325), für das Verständnis des Beweises sei insbesondere auf Lemma 8.3 in [SP05] (S. 325) hingewiesen.

Aus (E.112) und (E.113) folgt unter Berücksichtigung der Submultiplikativität der verwendeten Norm für die offene Wirkungskette $\|N_{\Delta,\Delta}\Delta\|_\infty \leq \|N_{\Delta,\Delta}\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1$. Unter Berücksichtigung der Definition der ∞ -Norm gilt äquivalent dazu

$$\bar{\sigma}(N_{\Delta,\Delta}(i\omega)) \bar{\sigma}(\Delta(i\omega)) < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (\text{E.114})$$

Letztere Gleichung bildet das Äquivalent zu der im Fall stabiler strukturierter unsicherer Übertragungsfunktionen auftretenden Gleichung (E.108). Der in (E.108) auftretende strukturierte Singulärwert wird in (E.103) durch den größten Singulärwert ersetzt. Über alle Frequenzen betrachtet, nimmt die ∞ -Norm die Rolle des Supremums des größten Singulärwertes ein. Damit begründet sich die Interpretation von Satz 77 als Verallgemeinerung von Satz 76.

E.3.6 Robuste Performance mittels des strukturierten Singulärwertes

Die Analyse der robusten Performance dient dazu, eine Aussage über die Einhaltung der Regelungsziele und damit über die Leistungsfähigkeit eines Regelkreises unter Berücksichtigung aller zulässigen Unsicherheiten zu treffen. Während die nominelle Performance in Abschnitt E.3.3 anhand der \mathcal{H}_∞ -Norm von $\tilde{F} = N_{z,w} = \mathcal{F}_u(N, 0)$ beurteilt wird, gilt es im Falle der robusten Performance eine Aussage über die Größe von $F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$ ebenfalls bemessen durch die \mathcal{H}_∞ -Norm, allerdings unter Berücksichtigung aller zulässigen Unsicherheiten Δ , zu treffen. Die Darstellung

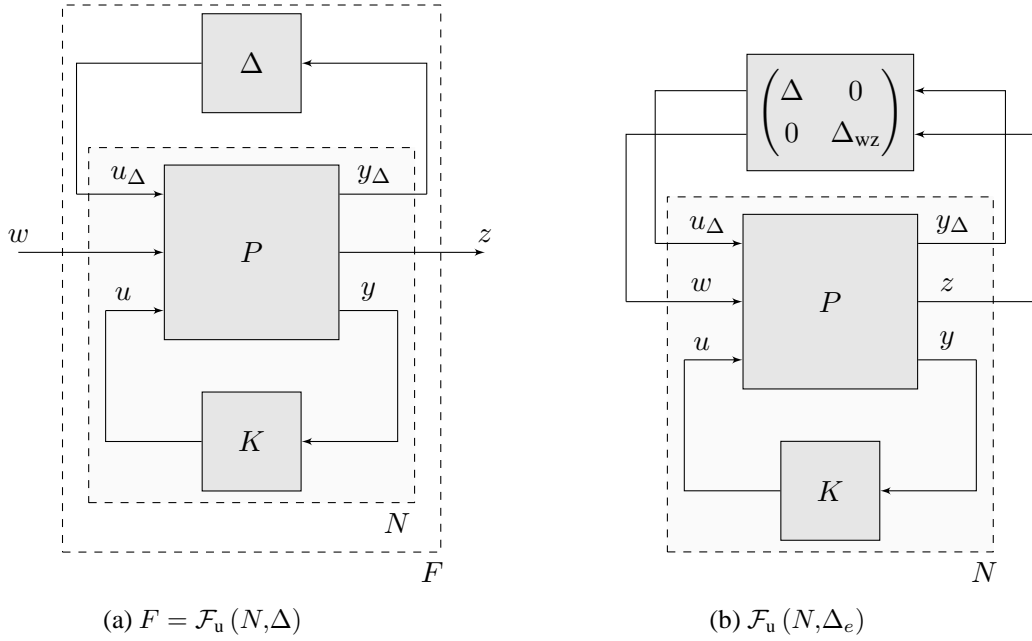


Abbildung E.11: Strukturen zur Analyse der robusten Performance eines Regelkreises anhand von $\|F\|_\infty$ und $\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\Delta_e}(N)$.

der dazu verwendeten Struktur findet sich in Abb. E.11a. Um das unpraktikable Berechnen von $\|F\|_\infty$ für alle zulässigen Δ zu vermeiden, wird die Identität des größten Singulärwertes mit dem strukturierten Singulärwert unter Annahme unstrukturierter Unsicherheiten gemäß (E.105) ausgenutzt. Die Analyse der robusten Performance lässt sich damit auf Basis des strukturierten Singulärwertes durchführen und ist äquivalent zur Untersuchung der robusten Stabilität unter Verwendung einer erweiterten strukturierten Unsicherheit. Die Methodik entspricht dem in [ZDG95] geschilderten Vorgehen und basiert auf dem dort eingeführten „Main Loop Theorem“. Die zugrunde liegende Struktur ist in Abb. E.11b dargestellt.

Neben einem nominell stabilen N werden strukturierte unsichere Übertragungsfunktionen $\Delta_e \in \mathcal{M}_{\Delta_e, s}$ mit

$$\mathcal{M}_{\Delta_e, s} = \{ \Delta_e(\cdot) \in \mathcal{RH}_\infty \mid \Delta_e(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_e} \quad \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+ \} \quad (\text{E.115})$$

und

$$\mathcal{M}_{\Delta_e} = \left\{ \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_{zw} \end{pmatrix} \mid \Delta \in \mathcal{M}_{\Delta}, \Delta_{zw} \in \mathbb{C}^{p_w \times q_z} \right\} \quad (\text{E.116})$$

vorausgesetzt. Die strukturierte unsichere Übertragungsfunktion $\Delta_e(s)$ ist zu jedem $s \in \overline{\mathbb{C}}_+$ ein Element der Menge \mathcal{M}_{Δ_e} . Die Elemente von \mathcal{M}_{Δ_e} bestehen aus blockdiagonalen Unsicherheiten, wobei die Diagonalblöcke durch $\Delta \in \mathcal{M}_{\Delta}$ und $\Delta_{zw} \in \mathbb{C}^{p_w \times q_z}$ gebildet werden. Dabei entspricht Δ der dem System eigenen Unsicherheit in der Form, wie sie auch für die Analyse der robusten Stabilität angenommen wird, d.h. Δ kann in sich strukturiert sein. Δ_{zw} bildet die Performance-Größen z auf die externen Störgrößen w ab. In Analogie zur Analyse der nominellen Performance mittels des strukturierten Singulärwertes basierend auf Gleichung (E.105), wird Δ_{zw} stets als unstrukturiert angenommen. Gleichung (E.105) folgend entstammt diese unstrukturierte Unsicherheit einer ∞ -Norm Spezifikation.

Die für die Untersuchung der robusten Performance angenommene strukturierte Unsicherheit Δ_e vereint somit die strukturierte Unsicherheit der Analyse der robusten Stabilität Δ und die unstrukturierte Unsicherheit der Analyse der nominellen Performance Δ_{zw} . Die Diagonalstruktur von $\Delta_e(s)$ repräsentiert eine gewisse Form der Entkopplung. Unsicherheiten der Form Δ_e beinhalten keinen Einfluss von z auf u_{Δ} beziehungsweise von y_{Δ} auf w . Die damit zur Analyse der robusten Performance auf natürliche Weise resultierende Struktur von $\Delta_e(s)$ legt die Aussage nah, dass für die Analyse dieser Eigenschaft der strukturierte Singulärwert einem Kriterium auf Basis des größten Singulärwertes vorzuziehen ist. Letzteres würde lediglich im Hinblick auf vollständig unstrukturierte erweiterte Unsicherheiten $\Delta_e(s)$ Sinn ergeben und in allen anderen Fällen unnötigen Konservatismus induzieren.

Der folgende Satz dient als theoretische Grundlage für die μ -Synthese, die den strukturierten Singulärwert zum Zwecke der Reglersynthese instrumentalisiert und dadurch a priori Garantien hinsichtlich der robusten Stabilität und der robusten Performance des geschlossenen Regelkreises gewährt.

Satz 78 (Robuste Performance) *Es seien ein korrekt gestellter und intern stabiler nomineller geschlossener Regelkreis N ferner sei $\gamma > 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

RP1) *Für alle $\Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ mit $\|\Delta\|_{\infty} \leq \frac{1}{\gamma}$ ist $F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$ aus Abb. E.11a korrekt gestellt und intern stabil und es gilt*

$$\|F\|_{\infty} < \gamma; \quad (\text{E.117})$$

RP2) $\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\Delta_e}(N) < \gamma.$

□

Ein Beweis für Satz 78 lässt sich beispielsweise [ZDG95] (S. 279) entnehmen. Die beiden in Satz 78 auftretenden äquivalenten Aussagen **RP1)** und **RP2)** stellen jeweils für sich eine notwendige

und hinreichende Bedingung für die robuste Performance eines zu analysierenden Regelkreises dar.

Die Bedingung **RP2**) enthält sowohl die Bemessung der Größe von F durch die \mathcal{H}_∞ -Norm als auch die Betrachtung hinsichtlich aller $\Delta(s) \in \mathcal{M}_{\Delta_s}$ mit $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ implizit durch die Verwendung des strukturierten Singulärwertes bezüglich einer erweiterten Unsicherheitsstruktur. **RP2**) wird damit im Folgenden als Ausgangspunkt für die Überprüfung der robusten Performance angesehen. Dabei gilt es zu beachten, dass die nominelle Stabilität in Satz 78 eine Voraussetzung an N ist und nicht aus der robusten Performance folgt ([SP05] (S. 344)). Im Gegensatz dazu ist die robuste Performance aufgrund von

$$\mu_{\Delta_e}(N) \geq \max \{ \mu_{\mathcal{M}_{\Delta}}(N_{\Delta, \Delta}), \mu_{\Delta_{zw}}(N_{z,w}) \} \quad (\text{E.118})$$

hinreichend für die robuste Stabilität und die nominelle Performance ([SP05] (S. 344)).

E.4 Numerische Beschreibung der nominellen Strecke

In Abschnitt 2.3.4 erfolgt die Parametrierung des durch (C.112) beschriebenen Übertragungsverhaltens des Beispielsystems. Die dazu optimierungsbasiert ermittelten Parameter sind in Tabelle 2.3 auf Seite 88 aufgeführt. Darüber hinaus schildert Abschnitt 4.2.6 die Anwendung der modalen Approximation auf das Beispielsystem. Entsprechend der Festlegung aus Gleichung (4.35) auf Seite 142 wird dabei die endlich-dimensionale nominelle Strecke $G_{\text{Nom}} = G_N$ mit einer Ordnung von $N = 6$ festgelegt. Auf Basis der genannten Parametrierung und der beschriebenen Approximation ergibt sich eine modale Darstellung der resultierenden nominellen Strecke im Zustandsraum auf Basis der Matrizen A_N, B_N, C_N und D_N mit

$$\left(\begin{array}{c|c} A_N & B_N \\ \hline C_N & D_N \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} -53,08 & -1219,82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,06 \\ 1219,82 & -53,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,6 \\ 0 & 0 & -331,67 & -7644,55 & 0 & 0 & -0,19 \\ 0 & 0 & 7645,55 & -331,67 & 0 & 0 & -9,04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2287,06 & -21302,70 & 0,77 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21302,70 & -2287,06 & 14,85 \\ \hline -101,72 & 2,20 & 13,37 & -0,28 & -3,86 & 0,20 & 0 \end{array} \right). \quad (\text{E.119})$$

Aus der Darstellung der nominellen Strecke G_{Nom} entsprechend Gleichung E.119 lässt sich zudem unmittelbar eine modale Darstellung des in Abschnitt 4.5.4 auf Seite 174 eingeführten Systems $\Sigma_f = \Sigma_N, N = 4$ entnehmen.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Aufnahmen und Prinzipskizze des trimorphen Biegewandlers.	15
2.1	Bodediagramme der Übertragungsfunktionen $\hat{G}_{\text{Mess}}, G_{\text{Mess}}, \hat{G}$ und G sowie verschiedene relative Abstände.	86
2.2	Verstärkung der Übertragungsfunktionen von G und G_{Mess} in Abhängigkeit von der Frequenz und dem Messort.	89
3.1	Darstellung der normierten ortsabhängigen Funktionen $\tilde{\psi}_{ i }(v)$ für $i = 1, \dots, 4$. . .	95
3.2	Verteilung der ersten neun Eigenwert-Paare des Systemoperators des Beispielsystems. .	97
4.1	Bodediagramm verschiedener Darstellungen der Übertragungsfunktion des Beispielsystems.	140
4.2	Relative Abweichungen zwischen jeweils $G, G_{\text{Mess}}, \hat{G}_{\text{Mess}}$ und G_N mit $N \in \{2, 4, 6, 30\}$	141
4.3	Strecke mit multiplikativer Modellunsicherheit.	145
4.4	Multiplikative Modellunsicherheit in verallgemeinerter LFT-basierter Darstellung. .	147
4.5	Verschiedene relative Abweichungen und Gewichtungsfunktionen \hat{W}_M und \hat{W}_M der Modellscharen \mathcal{G}_M und $\hat{\mathcal{G}}_M$	150
4.6	Die als Argument der \mathcal{H}_∞ -Norm im Kostenfunktional des \mathcal{H}_∞ -Standard-Entwurfsproblems auftretende LFT.	152
4.7	Äquivalente Darstellungen des Arguments innerhalb des Kostenfunktionals der D-K-Iteration.	156
4.8	Struktur der Modellfolgeregelung.	161
4.9	Erweiterte Strecke P des Gewichtungsschemas A.	163
4.10	Erweiterter Regelkreis N des Gewichtungsschemas A.	164
4.11	Reglerentwurf A: Sprungantwort und Singulärwertverlauf der Strecke G und des Referenzmodells G_r	169
4.12	Reglerentwurf A: Singulärwertverläufe der einzelnen in der erweiterten Strecke auftretenden Übertragungsfunktionen.	170
4.13	Reglerentwurf A: Ausschnitt aus dem Pol-/Nullstellen-Diagramm von G und \tilde{K} . . .	171
4.14	Reglerentwurf A_μ : Singulärwertverläufe der einzelnen in P auftretenden Übertragungsfunktionen.	172
4.15	Reglerentwürfe A und A_μ : Verschiedene Singulärwertverläufe der resultierenden Rückführung und der einzelnen Komponenten der Rückführung.	173
4.16	Blockschaltbild des Regelkreises B.	174
4.17	Verläufe von $y_f(t), t \geq 0$ und zugehöriger zeitlicher Ableitungen.	177
4.18	Verläufe von $y(t), \frac{\partial y(t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}$ und $u(t)$ für $y_f(t)$	178
4.19	Reglerentwurf B: Singulärwertverläufe der einzelnen in der erweiterten Strecke auftretenden Übertragungsfunktionen.	179

4.20	Reglerentwurf B: Singulärwertverläufe von $\tilde{K}_b = KQ, K, Q$ und G_{Nom}	180
4.21	Regelkreis A: Singulärwertverläufe der in $\mathcal{F}_1(\tilde{P}, K)$ auftretenden charakteristischen Übertragungsfunktionen und zugehöriger oberer Schranken.	182
4.22	Regelkreis A: Grafische Analyse der robusten Stabilität und robusten Performance unter Berücksichtigung verschiedener Modellscharen.	183
4.23	Regelkreis A: Sprungantwort der erweiterten Referenzstrecke und des realen Systems.	185
4.24	Regelkreis A: Sprungantwort der Referenzstrecke, der erweiterten Referenzstrecke und des realen Systems im Fall einer Steuerung $y_K = K_f r$	186
4.25	Regelkreis A_μ : Singulärwertverläufe der in $N_{z,w}$ auftretenden charakteristischen Übertragungsfunktionen und zugehöriger oberer Schranken.	187
4.26	Regelkreis A_μ : Grafische Analyse der robusten Stabilität und robusten Performance unter Berücksichtigung verschiedener Modellscharen.	188
4.27	Regelkreis A_μ : Sprungantwort der erweiterten Referenzstrecke, des realen Systems sowie des über \hat{G}_{Sim} geschlossenen Regelkreises.	189
4.28	Regelkreis B: Zeitliche Verläufe von \hat{y}_r , des realen Systems und der simulierten Strecke $y_{\hat{G}_{\text{Sim}}}$ in Folge der sprungförmigen Anregung r	192
4.29	Offene Wirkungskette: Zeitliche Verläufe von $\hat{y}_r(t)$ und des realen Systems $y(t)$ in Folge der sprungförmigen Anregung $r(t)$	193
A.1	Prinzipskizze des trimorphen Biegewandlers.	203
A.2	Kartesisches Koordinatensystem der Modellbildung und Kräfte und Momente am infinitesimalen Balkenelement.	204
A.3	Verschiebung $v_P(v, \zeta, t)$ eines Punktes P	205
D.1	Grafische Darstellung der Summanden aus (D.21).	356
E.1	Untere und obere LFT von M hinsichtlich Δ_l beziehungsweise hinsichtlich Δ_u	371
E.2	Erweiterte Strecke \tilde{P}	384
E.3	Standard-Regelkreises gemäß (E.62) mit zugehöriger offener Wirkungskette.	385
E.4	Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.	388
E.5	Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden.	390
E.6	Regelgesetz im Fall einer allgemeinen Regelung mit zwei Freiheitsgraden und einer Modellfolgeregelung.	392
E.7	Erweiterter Regelkreis $N = \mathcal{F}_1(P, K)$	393
E.8	Unsicherheitsbehafteter erweiterter Regelkreis $F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$	397
E.9	Nomineller erweiterter Regelkreis und Standard-Regelkreis.	399
E.10	Blockschaltbild des der robusten Stabilitätsanalyse zugrunde liegenden Standard-Regelkreises $\mathcal{H}(\Delta, N_{\Delta, \Delta})$ und der zugehörigen offenen Wirkungskette $N_{\Delta, \Delta} \Delta$	405
E.11	Strukturen zur Analyse der robusten Performance eines Regelkreises anhand von $\ F\ _\infty$ und $\sup_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu_{\Delta_e}(N)$	408

Tabellenverzeichnis

2.1	Beispiele für Pritchard-Salamon-Systeme.	65
2.2	Ordnung verschiedener in $\{b_i^*\}_{i \in \mathbb{I}}$ und $\{c_i^*\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ auftretender Terme.	77
2.3	Optimierungsbasiert ermittelte Parameter der Übertragungsfunktion des Beispielsystems.	88
3.1	Die ersten 15 Eigenwert-Paare des Systemoperators des Beispielsystems.	99
4.1	Parametrierung der Gewichtungsfunktionen W_M und \hat{W}_M	149
4.2	Übersicht über die eingesetzten Kombinationen aus Gewichtungsschemata und Reglersyntheseverfahren.	160
4.3	Charakteristische Größen der Gewichtungsfunktionen aus (4.80) unter der Annahme $K_S = 1, K_T = 1, K_{KS} = 1$	166
4.4	Reglerentwurf A: Parametrierung der Gewichtungsfunktionen und der integralen Erweiterung.	168
4.5	Reglerentwurf A_μ : Parametrierung der Gewichtungsfunktionen und der integralen Erweiterung.	171
4.6	Reglerentwurf B: Parametrierung der Gewichtungsfunktionen und der integralen Erweiterung.	179
4.7	Reglerentwürfe: Charakteristische Größen der Sprungantworten.	194

Symbolverzeichnis

\overline{M}	Abschluss der Menge M
A	Systemoperator einer Zustandsraumdarstellung
\mathcal{W}_0	Beobachtbarkeits-Gramsche
\mathcal{C}_τ	Beobachtbarkeitsoperator bezüglich des Zeithorizonts τ
$ (\cdot) $	Betrag von (\cdot)
$\mathcal{L}(X, Y)$	Menge der beschränkten linearen Operatoren von X nach Y
$\mathcal{L}(X)$	Menge der beschränkten linearen Operatoren von X nach X
B	Eingangoperator einer Zustandsraumdarstellung
b_i^*	i -ter Entwicklungskoeffizient des Eingangoperators B
C	Ausgangoperator einer Zustandsraumdarstellung
c_i^*	i -ter Entwicklungskoeffizient des Ausgangsoperators C
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{C}_α^+	Menge der komplexen Zahlen mit Realteil größer als α
D	Durchgangoperator einer Zustandsraumdarstellung
$\langle x, y \rangle_{X' \times X, x(y)}$	Dualitätsprodukt von $x \in X'$ und $y \in X$
$E(\cdot)$	Materialkonstante, Elastizitätsmodul von (\cdot) in N/m^2
λ_i	i -ter Eigenwert eines Operators
$E_{\lambda_i}(T)$	Eigenraum zum i -ten Eigenwert des Operators T
$X \xhookrightarrow{d} Y$	Stetige und dichte Einbettung des Raumes X in Y
f	Allgemeine Funktion
Γ	Hankel-Operator
$\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})), \mathcal{H}_\infty$	Hardy-Raum; Raum der in der rechten s -Halbebene holomorphen Abbildungen, die eine Beschränkung der entsprechenden Norm erfüllen
\mathcal{H}_α	Interpolationsräume; Auf Basis einer Potenz α der Eigenwerte eines Systemoperators gewichteter Hilbertraum
H_α	Auf Basis einer Potenz $\alpha = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ der Eigenwerte eines positiven Operators gewichteter Hilbertraum
$\mathcal{H}_\beta, \mathcal{H}_\gamma$	Auf Basis eines Pivotraums durch Gewichtung mit $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ bzw. $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{I}^+}$ definierter Hilbertraum

$I_{(\cdot)}$	Materialkonstante, Flächenträgheitsmoment von (\cdot) in m^4
\mathbb{I}	$-\infty, \dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots, \infty$
\mathbb{I}^N	$-N, \dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots, N$
\mathbb{I}^-	$-\infty, \dots, -3, -2, -1$
\mathbb{I}^+	$1, 2, 3, \dots, \infty$
\mathbb{I}^{N+}	$1, 2, 3, \dots, N$
\mathbb{I}_{N+1}^+	$N+1, N+2, \dots, \infty$
$\langle x, y \rangle_X$	Innenprodukt von $x \in X$ und $y \in X$
$\mathcal{L}_{S,p}(X, Y)$	Schatten-Klassen kompakter Operatoren von X nach Y mit in p -ter Potenz summierbaren Singulärwerten
$\mathcal{L}_{S,1}(X, Y)$	Raum der nuklearen oder Spurklasse Operatoren
$\mathcal{L}_{S,2}(X, Y)$	Raum der Hilbert-Schmidt Operatoren
$\mathcal{L}_K(X, Y)$	Vektorraum der kompakten Operatoren von X nach Y
\mathbb{K}	Körper der reellen oder komplexen Zahlen
L	Länge des Biegewandlers in m
$\mathcal{L}^p(\mathcal{I}, \mu)$	Menge der in der p -ten Potenz absolut μ -integrierbaren Funktionen
$\mathcal{L}_{\text{lok}}^p(\mathcal{I})$	Menge der in der p -ten Potenz lokal absolut μ -integrierbaren Funktionen
$L^p(\mathcal{I})$	Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf einer Lebesgue-Nullmenge unterscheiden und in der p -ten Potenz absolut integrierbar sind
$L_{\text{lok}}^p(\mathcal{I})$	Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf einer Lebesgue-Nullmenge unterscheiden und in der p -ten Potenz lokal absolut integrierbar sind
$L^p(\mathcal{I}, X)$	Menge der auf \mathcal{I} definierten vektorwertigen Funktionen mit Werten aus X , die in der p -ten Potenz integrierbar sind.
$L^\infty(\mathcal{I}, X)$	Menge der auf \mathcal{I} definierten vektorwertigen Funktionen mit Werten aus X , die über ein endliches wesentliches Supremum verfügen.
$L^p(\mathcal{I}, \mathcal{L}(X_1, X_2))$	Menge der auf \mathcal{I} definierten operatorwertigen Funktionen mit Werten aus $\mathcal{L}(X_1, X_2)$, die in der p -ten Potenz integrierbar sind.
$L^\infty(\mathcal{I}, \mathcal{L}(X_1, X_2))$	Menge der auf \mathcal{I} definierten operatorwertigen Funktionen mit Werten aus $\mathcal{L}(X_1, X_2)$, die über ein endliches wesentliches Supremum verfügen.
$L^\infty(i\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$	Menge auf der imaginären Achse wesentlich beschränkten Übertragungsfunktionen.
l^p	Raum der p -fach summierbaren Folgen

M	Allgemeine Menge
$N_{(\cdot)}$	Längenbezogene Normalkraft in N/m
\mathbb{N}	Positive natürliche Zahlen
$\ x\ _X$	Norm von $x \in X$ mit X normiert
\mathcal{O}_D	Menge der diagonalisierbaren Operatoren
\mathcal{O}_A	Untermenge von \mathcal{O}_D
\mathcal{O}_R	Menge der Riesz-Spektraloperatoren
$f \in \mathcal{O}(g)$	f ist von Ordnung g , f wächst nicht schneller als g
$(\cdot)^\perp$	Orthogonales Komplement zu (\cdot)
P	Allgemeine Projektion
$Q_{(\cdot)}$	Querkraft senkrecht zu (\cdot) in N/m
\mathbb{R}	Reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Nichtnegative reelle Zahlen
$D^\alpha x$	Schwache Ableitung von x zum Multiindex α
$\mathcal{S}(X \times Y)$	Menge der beschränkten Sesquilinearformen
$H^{m,p}(\Omega)$	Sobolew-Raum; Vervollständigung von $\{x \in C^m(\Omega) \mid \ x\ _p^m < \infty\}$ unter Berücksichtigung der Sobolew-Norm $\ x\ _{m,p}$,
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolew-Raum; Banachraum der p-fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen, deren schwache (oder distributive) Ableitung bis zum Grad m noch immer p-fach Lebesgue-integrierbar ist
$W_0^{m,p}(\Omega)$	Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ im Raum $W^{m,p}(\Omega)$
\mathcal{W}_C	Steuerbarkeitsgramsche
\mathcal{B}_τ	Steuerbarkeitsoperator bezüglich des Zeithorizonts τ
$\text{supp}(f)$	Träger der Funktion f
T, S	Allgemeine lineare Operatoren
T^*	Zu T adjungierter Operator
$\mathcal{D}(T)$	Definitionsbereich von T
T'	Zu T dualer Operator
$\text{Gr}(T)$	Graph von T
T^{-1}	Zu T inverser Operator
$N(T)$	Nullraum von T
$\mathcal{R}(T)$	Bildbereich von T
$R(s, T)$	Resolvente von T an der Stelle s

$\rho(T)$	Resolventenmenge von T
$\sigma(T)$	Spektrum von T
$\sigma_p(T)$	Punktspektrum von T
$\sigma_r(T)$	Residualspektrum von T
$\sigma_c(T)$	Stetiges Spektrum von T
$r_\sigma(T)$	Spektralradius von T
$s(T)$	Spektralschranke von T
$\mathcal{T}_{e^{At}}$	Gleichmäßig stetige Halbgruppe eines endlich-dimensionalen Systems
\mathcal{T}_Φ	Allgemeine Operatorhalbgruppe
ω_0	Wachstumsgrenze einer Operatorhalbgruppe
$\mathcal{D}(\Omega)$	Raum der Testfunktionen
t	Allgemeine Sesquilinearform $t : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$
\mathcal{U}	Eingangsraum einer Zustandsraumdarstellung
ξ, v, ζ	Unabhängige kartesische Koordinaten
$\mathfrak{R}(\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))), \mathfrak{R}(\mathcal{H}_\infty)$	Übertragungsfunktionen mit links- und rechts-koprimer Faktorisierung über $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}))$
v_i	i -ter Eigenvektor des Systemoperators A
w_i	i -ter Eigenvektor des adjungierten Systemoperators A^* beziehungsweise i -ter Linkseigenvektor von A
X, X_1, X_2	Allgemeine Räume
X'	Zu X dualer Raum
\mathcal{X}	Zustandsraum einer Zustandsraumdarstellung
\mathcal{W}, \mathcal{V}	Räume der Raumskala einer Zustandsraumdarstellung
\mathcal{Y}	Ausgangsraum einer Zustandsraumdarstellung
Y, Y_1, Y_2	Allgemeine Räume

Literatur

- [AT90] F. Abergel and R. Temam. “On some control problems in fluid mechanics”. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 1 (1990), pp. 303–325.
- [AF03] R.A. Adams und J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. 2nd Ed. Bd. 140. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2003.
- [AT81] N.U. Ahmed und K.L. Teo. *Optimal Control of Distributed Parameter Systems*. North Holland, 1981.
- [AG93] N.I. Akhiezer und I.M. Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Dover Publications, Dez. 1993.
- [Alt06] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 2006.
- [AE] H. Amann und J. Escher. *Analysis I*. Birkhäuser Verlag 2005.
- [Ant05] A.C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Advances in Design and Control. SIAM, 2005.
- [Apk11] P. Apkarian. „Nonsmooth μ Synthesis“. In: *Int. J. Robust and Nonlinear Control* 21.13 (2011), S. 1493–1508.
- [AN06] P. Apkarian und D. Noll. „Nonsmooth H_∞ synthesis“. In: *IEEE Trans. Aut. Contr* 1 (2006), S. 71–86.
- [Arg06] Argillon. *Biegewandler*. <http://www.argillon.de>. Datenblatt. 2006.
- [AM11] K.J. Aström und R.M. Murray. *Feedback Systems An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, 2011.
- [Atw00] J.A. Atwell. „Proper Orthogonal Decomposition for Reduced Order Control of Partial Differential Equations“. Diss. Virginia Polytechnic Institute und State University, 2000.
- [AK04] J.A. Atwell und B.B. King. „Reduced Order Controllers for Spatially Distributed Systems via Proper Orthogonal Decomposition“. In: *SIAM J. Sci. Comput* 26.1 (2004), S. 128–151.
- [ABF92] D.R. Augenstein, J.S. Baras und S.M. Fisher. „Parameter Identification of Large Spacecraft Systems Based on Frequency Characteristics“. In: *Analysis and Optimization of Systems: State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems*. 1992.
- [Bal66] A.V. Balakrishnan. „On the state space theory of linear systems“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 14.3 (Juni 1966), S. 371–391.
- [Bal89] G.J. Balas. „Robust Control Of Flexible Structures: Theory And Experiments“. Diss. California Institute of Technology, 1989.

- [Bal82] M.J. Balas. „Trends in large space structure control theory: Fondest hopes, wildest dreams“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 27.3 (1982), 6, S. 522–535.
- [Bal83] M.J. Balas. „The galerkin method and feedback control of linear distributed parameter systems“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 91.2 (Feb. 1983), S. 527–546.
- [Bal86] M.J. Balas. „Finite-dimensional control of distributed parameter systems by Galerkin approximation of infinite dimensional controllers“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 114.1 (Feb. 1986), S. 17–36.
- [Bal06] R.G. Ballas. „Statisches und dynamisches Verhalten piezoelektrischer Multilayer-Biegeaktoren und Beitrag zur Sensorintegration“. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2006.
- [Bal07] R.G. Ballas. *Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators: Static and Dynamic Behavior and Aspects of Sensor Integration*. Microtechnology and Mems. Springer, 2007.
- [BIW95] H. Banks, K. Ito und Y. Wang. „Well posedness for damped second order systems with unbounded input operators“. In: *Differential and Integral Equations* 8 (1995), S. 587–606.
- [Ban90] H.T. Banks. „Inverse problems for distributed parameter systems“. In: *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control* 1 (Dez. 1990), S. 13–16.
- [BI97] H.T. Banks und K. Ito. „Approximation in LQR Problems for Infinite Dimensional Systems With Unbounded Input Operators“. In: *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* 7 (1997), S. 1–34.
- [BR01] H.T. Banks und R.C.H. Del Rosario. „Convergence of approximations in feedback control of structures“. In: *Mathematical and Computer Modelling* 33 (2001), S. 65–78.
- [BSY96] H.T. Banks, R.C. Smith und Y. Wang. *Smart Materials Structures: Modeling, Estimation and Control*. Hrsg. von P.G. Ciarlet und J.-L. Lions. Research in Applied Mathematics. John Wiley & Sons, 1996.
- [BWF89] H.T. Banks, Y. Wang und R.H. Fabiano. „Bending rate damping in elastic systems“. In: *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control* 1 (Dez. 1989), S. 604–607.
- [Ban+88] H.T. Banks u. a. „The Identification of a Distributed Parameter Model for a Flexible Structure“. In: *SIAM J. Control Optim.* 26.4 (1988), S. 743–762.
- [BDKI94] F.D. Barb, W. De Koning und V. Ionescu. „Digital H_∞ -control with measurement-feedback for Pritchard-Salamon systems. II. A Popov theory based solution“. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 2. Dez. 1994, S. 1763–1768.

- [BIK94] F.D. Barb, V. Ionescu und W. De Koning. „A Popov-theory-based approach to digital H^∞ control with measurement feedback for Pritchard-Salamon systems“. In: *IMA J Math Control Info* 11 (1994), S. 277–309.
- [BK94] F.D. Barb und W. de Koning. „A Hyland-Bernstein approach to the digital control of Pritchard-Salamon systems“. In: *IMA J Math Control Info* 11 (1994), S. 63–73.
- [BK95] F.D. Barb und W.L. De Koning. „A Popov-theory-based survey on digital control of infinite-dimensional systems with unboundedness“. In: *IMA J Math Control Info* (1995).
- [BLX05] C.J.K. Batty, J. Liang und T.-J. Xiao. „On the spectral and growth bound of semi-groups associated with hyperbolic equations“. In: *Advances in Mathematics* 191.1 (2005), S. 1–10.
- [Ben86] N.F. Benninger. „Analyse und Synthese linearer Systeme mit Hilfe neuer Strukturmaße“. Diss. Universität Fridericiana Karlsruhe, 1986.
- [Ben92] A. Bensoussan. „An Introduction to the Hilbert Uniqueness Method“. In: Hrsg. von M. Thoma und W. Wyner. *Analysis and Optimization of Systems: State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems*. Springer, 1992, S. 184–198.
- [BB93] A. Bensoussan und P. Bernhard. „On the Standard Problem of H_∞ -Optimal Control for Infinite Dimensional Systems“. In: SIAM, 1993. Kap. 9.
- [BFT88] H. Bercovici, C. Foias und A. Tannenbaum. „On skew Toeplitz operators I.“ In: *Operator Theory: Advances and Applications* 29 (1988), S. 21–45.
- [Bey07] H.R. Beyer. *Beyond partial differential equations*. Bd. 1898. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2007.
- [BS+07] Jr. B.F. Spencer u. a., Hrsg. *World Forum on Smart Materials and Smart Structures Technology*. Proceedings Of The World Forum On Smart Materials And Smart Structures Technology. 2007.
- [BS73] F. Black und M. Scholes. „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“. In: *Journal of Political Economy* 83.3 (1973), S. 637–654.
- [BC88a] J. Bontsema und R.F. Curtain. „A note on spillover and robustness for flexible systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 33.6 (Juni 1988), S. 567–569.
- [BC88b] J. Bontsema und R.F. Curtain. „Perturbation Properties of a Class of Infinite-Dimensional Systems with Unbounded Control and Observation“. In: *IMA J Math Control Info* 5.4 (1988), S. 333–352.
- [BCS88] J. Bontsema, R.F. Curtain und J.M. Schumacher. „Robust Control of Flexible Structures: A Case Study“. In: *Automatica* 24 (1988), S. 177–186.
- [Boy01] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. 2. Ed. Dover Publications, Inc., 2001.

- [Boy+94] S. Boyd u. a. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, 1994.
- [Bra+94] R.P. Braatz u. a. „Computational complexity of μ calculation“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 39.5 (Mai 1994), S. 1000–1002.
- [Bra07a] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer Verlag, 2007.
- [BCC10] F. Brauer und C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, 2010.
- [Bra07b] T. Brauers. „Flache Vorsteuerung eines Biegebalkens mittels Piezoaktoren“. 1.0. Magisterarb. TU Darmstadt, Nov. 2007.
- [Bre99] H.I. Breckner. „Approximation and optimal control of the Stochastic Navier-stokes Equation“. Diss. Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 1999.
- [BN+10] B.Sz.-Nagy u. a. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*. Springer Verlag, 2010.
- [BB05] D. Bucur und G. Buttazzo. *Variational Methods in Shape Optimization Problems*. 1 Ed. Birkhäuser Boston, Juli 2005.
- [Bur+10] K. Burg u. a. *Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen: Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker*. Vieweg + Teubner, 2010.
- [Bur+06] J.V. Burke u. a. „HIFOO - A matlab package for fixed-order controller design and H_∞ opimization“. In: *5th IFAC Symposium on Robust Control Design*. Toulouse, France, Juli 2006.
- [BJH90] S.E. Burke und Jr J.E. Hubbard. „Shape Control of Distributed Parameter Systems: Modeling and Performance Analysis“. In: *Proceedings of the 1990 American Control Conference* 2 (Mai 1990), S. 1552 –1557.
- [CD78] F. Callier und C. Desoer. „An algebra of transfer functions for distributed linear time-invariant systems“. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 25.9 (Sep. 1978), S. 651 –662.
- [CW92] F.M. Callier und J. Winkin. „Infinite Dimensional System Transfer Functions“. In: *Analysis and Optimization of Systems: State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 185. 1992.
- [Can99] M. Cantoni. „Gap metric performance bounds for linear feedback systems“. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 5. 1999, S. 4505 –4510.

- [CC00] S. Chen und Z. Cao. „A New Method for Determining Locations of the Piezoelectric Sensor/Actuator for Vibration Control of Intelligent Structures“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 11 (Feb. 2000), S. 108–115.
- [Chr03] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Birkhäuser Verlag, 2003.
- [CPS09] K. Chudej, H.J. Pesch und K. Sternberg. „Optimale Steuerung eines dynamischen Schmelzcarbonat-Brennstoffzellen-Modells“. In: *at - Automatisierungstechnik* 6 (2009), S. 306–314.
- [CG86] R. Curtain und K. Glover. „Controller design for distributed systems based on Hankel-norm approximations“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 31.2 (Feb. 1986), S. 173–176.
- [Cur85] R.F. Curtain. „Sufficient Conditions for Infinite-Rank Hankel Operators to be Nuclear“. In: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 2 (1985), S. 171–182.
- [Cur86] R.F. Curtain. „Invariance Concepts in Infinite Dimensions“. In: *SIAM J. Control Optim.* 24.5 (1986), S. 1009–1030.
- [Cur88] R.F. Curtain. „Equivalence of input-output stability and exponential stability for infinite-dimensional systems“. In: *Mathematical Systems Theory* 21.1 (Dez. 1988), S. 19–48.
- [Cur89a] R.F. Curtain. „Equivalence of input-output stability and exponential stability“. In: *Systems & Control Letters* 12.3 (1989), S. 235–239.
- [Cur89b] R.F. Curtain. „Representation of Infinite-Dimensional Systems“. In: Bd. 135. *Three Decades of Mathematical System Theory*. Springer Verlag, 1989, S. 101–128.
- [Cur90a] R.F. Curtain. „ H_∞ -Control For Distributed Parameter Systems: A Survey“. In: *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*. Bd. 1. Dez. 1990, S. 22–26.
- [Cur90b] R.F. Curtain. „Robust stabilizability of normalized coprime factors: the infinite-dimensional case“. In: *International Journal of Control* 51.6 (1990), S. 1173–1190.
- [Cur91] R.F. Curtain. „State-space approaches to H_∞ control for infinite-dimensional linear systems“. In: *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 13.5 (1991), S. 253–261.
- [Cur92a] R.F. Curtain. *A Comparison of Finite-Dimensional Controller Design for Distributed Parameter Systems*. Techn. Ber. INRIA, 1992.
- [Cur92b] R.F. Curtain. „A Synthesis of Time and Frequency Domain Methods for the Control of Infinite-Dimensional Systems: A System Theoretic Approach“. In: Hrsg. von H.T. Banks. *Control and Estimation in Distributed Parameter Systems*. 1992. Kap. 5, S. 171–224.

- [Cur92c] R.F. Curtain. „Robust controllers for infinite-dimensional systems“. In: *Analysis and Optimization of Systems: State Space and Frequency Domain Approaches for Mite-Dimensional Systems*. 1992.
- [Cur96] R.F. Curtain. „The Kalman-Yakubovich-Popov Lemma for Pritchard-Salamon systems“. In: *Systems & Control Letters* 27.1 (Jan. 1996), S. 67–72.
- [Cur97] R.F. Curtain. „The Salamon-Weiss class of well-posed infinite-dimensional linear systems: a survey“. In: *IMA J Math Control Info* 14.2 (1997), S. 207–223.
- [Cur03] R.F. Curtain. „Model Reduction for Control Design for Distributed Parameter Systems“. In: *Research Directions in Distributed Parameter Systems*. SIAM, 2003. Kap. 4, S. 95–121.
- [Cur06] R.F. Curtain. „Towards a practical controller design for DPS“. In: *45th IEEE Conference on Decision and Control* (Dez. 2006), S. 4682–4687.
- [CBL92] R.F. Curtain, A. Bensoussan und J.L. Lions. *Analysis and Optimization of Systems: State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems*. Hrsg. von M. Thoma und W. Wyner. Springer, 1992.
- [CG84] R.F. Curtain und K. Glover. „Controller design for distributed systems based on Hankel-norm approximations“. In: *The 23rd IEEE Conference on Decision and Control* 23 (Dez. 1984), S. 561–565.
- [CMS05] R.F. Curtain, K. Mikkola und A. Sasane. *The Hilbert-Schmidt property of feedback operators*. Techn. Ber. CDAM Research Report CDAM-LSE-2005-15, 2005.
- [CM09] R.F. Curtain und K. Morris. „Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial“. In: *Automatica* 45.5 (2009), S. 1101–1116.
- [CO97] R.F. Curtain und J.C. Oostveen. *Robustly Stabilizing Controllers for Dissipative Infinite-Dimensional Systems with colocated Actuators and Sensors*. Apr. 1997.
- [CO04] R.F. Curtain und M.R. Opmeer. „Normalized doubly coprime factorizations for state linear systems“. In: *5th Asian Control Conference 2* (Juli 2004), S. 771–779.
- [CP94] R.F. Curtain und A. Pritchard. „Robust Stabilization of Infinite-Dimensional Systems with Respect to Coprime Factor Perturbations“. In: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Control Science*. Marcel Dekker, Inc., 1994. Kap. 29, S. 437–456.
- [CS01] R.F. Curtain und A.J. Sasane. „Compactness and nuclearity of the Hankel operator and internal stability of infinite-dimensional linear systems“. In: *International Journal of Control* 74 (2001), S. 1260–1270.
- [CZ94] R.F. Curtain und H. Zwart. „The Nehari problem for the Pritchard-Salamon class of infinite-dimensional linear systems: a direct approach“. In: *Integral Equations and Operator Theory* 18.2 (Juni 1994), S. 130–153.
- [CZ95] R.F. Curtain und H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite Dimensional System Theory*. Bd. 21. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, 1995.

- [Cur+94] R.F. Curtain u. a. „Well-Posedness, Stabilizability, and Admissibility for Pritchard-Salamon Systems“. In: *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* 4.4 (1994), S. 1–38.
- [CG07] N.J. Cutland und K. Grzesiak. „Optimal control for Navier-Stokes equations“. In: *The Strength of Nonstandard Analysis*. Springer, 2007, S. 317–348.
- [DL88] R. Dautray und J.-L. Lions. *Functional and Variational Methods*. Bd. 2. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Springer-Verlag, 1988.
- [DL90] R. Dautray und J.-L. Lions. *Spectral Theory and Applications*. Bd. 3. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Springer-Verlag, 1990.
- [DL92] R. Dautray und J.-L. Lions. *Evolution Problems I*. Bd. 5. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Springer-Verlag, 1992.
- [Dav95] E.B. Davies. *Spectral Theory and Differential Operators*. Cambridge University Press, 1995.
- [DDW03] C. Delattre, D. Dochain und J. Winkin. „Sturm-Liouville Systems are Riesz-Spectral Systems“. In: *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* No-4 (2003), S. 481–484.
- [DU77] J. Diestel und J.J. Uhl. *Vector Measures*. Mathematical Surveys 15. American Mathematical Society, 1977.
- [Die54] J. Dieudonné. „On biorthogonal systems“. English. In: *Mich. Math. J.* 2 (1954), S. 7–20.
- [Dob06] M. Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 2006.
- [DS94] J. de Does und J.M. Schumacher. „Interpretations of the gap topology: A survey“. In: *Kybernetika* 30.2 (1994), S. 105–120.
- [Doy+89] J.C. Doyle u. a. „State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems“. In: *IEEE Trans. Aut. Contr* 34 (1989), S. 831–847.
- [DP05] G.E. Dullerud und F.G. Paganini. *A Course in Robust Control Theory a convex Approach*. Springer, 2005.
- [DS58] N. Dunford und J.T. Schwartz. *Linear Operators*. Bd. I General Theory. Wiley, 1958.
- [DS63] N. Dunford und J.T. Schwartz. *Linear Operators*. Bd. II Spectral Theory Self Adjoint Operators in Hilbert Spaces. Wiley, 1963.
- [DS88] N. Dunford und J.T. Schwartz. *Linear Operators*. Bd. III Spectral Operators. Wiley, 1988.
- [Dur70] P.L. Duren. *Theory of H^p Spaces*. Bd. 38. Pure And Applied Mathematics. Acad. Press, 1970.
- [DH76] J.A. Dyer und J.W. Helton. „Comments on ”Systems with infinite-dimensional state space: The Hilbert space approach““. In: *Proceedings of the IEEE* 64.9 (Sep. 1976), S. 1436–1436.

- [Ehr11] M. Ehrendorfer. *Spectral Numerical Weather Prediction Models*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [ES85] A. El-Sakkary. „The gap metric: Robustness of stabilization of feedback systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30.3 (März 1985), S. 240–247.
- [Els05] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 2005.
- [EN00] K.-J. Engel und R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer Verlag, 2000.
- [EN06] K.-J. Engel und R. Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer Verlag, 2006.
- [EÖT91] D. Enns, H. Özbay und A. Tannenbaum. „ H_∞ optimal controllers for a distributed model of an unstable aircraft“. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control* 3 (Dez. 1991), S. 3020–3024.
- [EG04] A. Ern. und J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*. Bd. 159. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2004.
- [Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Bd. 19. American Mathematical Society, 1998.
- [Fö13] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 11. Auflage. Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 2013.
- [Fed11] S. Federico. „A stochastic control problem with delay arising in a pension fund model“. In: *Finance and Stochastics* 15.3 (2011), S. 421–459.
- [FY94] D.S. Flamm und Hong Yang. „Optimal mixed sensitivity for SISO distributed plants“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 39.6 (Juni 1994), S. 1150–1165.
- [Fle84] C.A.J. Fletcher. *Computational Galerkin Methods*. Springer, 1984.
- [FLR95] M. Fliess, J. Lévine und P. Rouchon. „Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples“. In: *International Journal of Control* 61 (1995), S. 1327–1361.
- [FGS93] C. Foias, T.T. Georgiou und M.C. Smith. „Robust stability of feedback systems: a geometric approach using the gap metric“. In: *SIAM J. Control Optim.* 31 (6 Nov. 1993), S. 1518–1537.
- [FÖT96] C. Foias, H. Özbay und A. Tannenbaum. *Robust Control of Infinite Dimensional Systems*. Hrsg. von M. Thoma. Springer, 1996.
- [FT88a] C. Foias und A. Tannenbaum. „On the Four Block Problem, II: The Singular System“. In: *Integral Equations and Operator Theory* 11 (1988), S. 726–767.
- [FT88b] C. Foias und A. Tannenbaum. „The four block problem for distributed systems“. In: *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control* 2 (Dez. 1988), S. 993–997.

- [FTZ85] C. Foias, A. Tannenbaum und G. Zames. „Weighted sensitivity minimization for delay systems“. In: *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 24. 1985, S. 244–249.
- [FTZ87] C. Foias, A. Tannenbaum und G. Zames. „On the H_∞ -Optimal Sensitivity Problem for Systems with Delays“. In: *SIAM J. Control Optim.* 25.3 (Mai 1987), S. 686–705.
- [For05] J.E. Forde. „Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology“. Diss. The University of Michigan, 2005.
- [FW76] B.A. Francis und W.M. Wonham. „The internal model principle of control theory“. In: *Automatica* 12.5 (1976), S. 457–465.
- [Fu06] X. Fu. „Controllability of non-densely defined functional differential systems in abstract space“. In: *Applied Mathematics Letters* 19.4 (2006), S. 369–377.
- [Fuh74] P.A. Fuhrmann. „On realization of linear systems and applications to some questions of stability“. In: *Theory of Computing Systems* 8.2 (Juni 1974), S. 132–141.
- [Fuh90] P.A. Fuhrmann. „On the Hamiltonian structure in the computation of singular values for a class of Hankel operators“. In: Hrsg. von E. Mosca und L. Pandolfi. Bd. 1496. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1990, S. 250–276.
- [Fuh12] P.A. Fuhrmann. *A Polynomial Approach to Linear Algebra*. Springer, 2012.
- [GA11a] P. Gahinet und P. Apkarian. „Decentralized and fixed-structure H_∞ control in MATLAB“. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. 2011, S. 8205–8210.
- [GA11b] P. Gahinet und P. Apkarian. „Structured H_∞ Synthesis in Matlab“. In: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*. Milano, Italy, 2011, S. 1435–1440.
- [GE08] M. Güney und E. Eskinat. „Optimal actuator and sensor placement in flexible structures using closed-loop criteria“. In: *Journal of Sound and Vibration* 312 (2008), S. 210–233.
- [Geo88] T.T. Georgiou. „On the computation of the gap metric“. In: *Systems & Control Letters* 11.4 (1988), S. 253–257.
- [GS90] T.T. Georgiou und M.C. Smith. „Optimal robustness in the gap metric“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 35.6 (Juni 1990), S. 673–686.
- [Gil73] E.D. Gilles. *Systeme mit verteilten Parametern*. R. Oldenbourg Verlag, 1973.
- [Glo84] K. Glover. „All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds“. In: *International Journal of Control* 39.6 (Juni 1984), S. 1115–1193.
- [GCP88] K. Glover, R.F. Curtain und J.R. Partington. „Realisation and approximation of linear infinite-dimensional systems with error bounds“. In: *SIAM J. Control Optim.* 26.4 (Juli 1988), S. 863–898.

- [GLP90] K. Glover, J. Lam und J.R. Partington. „Rational approximation of a class of infinite-dimensional systems I: Singular values of hankel operators“. English. In: *Mathematics of Control, Signals and Systems* 3.4 (1990), S. 325–344.
- [GGK03] I. Gohberg, S. Goldberg und M.A. Kaashoek. *Basic Classes of Linear Operators*. Birkhäuser Verlag, 2003.
- [GK69] I.C. Gohberg und M.G. Krein. *Introduction to the Theory of nonselfadjoint Operators*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1969.
- [Gol66] S. Goldberg. *Unbounded Linear Operators - Theory and Applications*. McGraw-Hill, 1966.
- [Goo70] R.E. Goodson. „Distributed system simulation using infinite product expansions“. In: *SIMULATION* 15.6 (1970), S. 255–263.
- [Gri04] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2nd Ed. Prentice Hall, 2004.
- [Gro70] S. Großmann. *Funktionalanalysis I*. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft, 1970.
- [GPK05] D.-W. Gu, P. Hr. Petkov und M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB*. 1st Ed. Springer-Verlag, Aug. 2005.
- [GMO08] S. Gumussoy, M. Millstone und M.L. Overton. „ H_∞ Strong Stabilization via HIFOO, a Package for Fixed-Order Controller Design“. In: *Proceedings of CDC*. Cancun, 2008.
- [Gum+09] S. Gumussoy u. a. „Multiobjective Robust Control with HIFOO 2.0“. In: *IFAC Symposium on Robust Control Design*. Haifa, 2009.
- [Guo02a] B.-Z. Guo. „Riesz Basis Property and Exponential Stability of controlled Euler-Bernoulli Beam Equations with variable Coefficients“. In: *SIAM J. Control Optim.* 40.6 (2002), S. 1905–1923.
- [GL02] B.-Z. Guo und Y.-H. Luo. „Riesz basis property of a second-order hyperbolic system with collocated scalar input-output“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.4 (2002), S. 693–698.
- [GY01] B.-Z. Guo und R. Yu. „The Riesz basis property of discrete operators and application to a Euler-Bernoulli beam equation with boundary linear feedback control“. In: *IMA J Math Control Info* 18.2 (2001), S. 241–251.
- [Guo01] B.Z. Guo. „Riesz Basis Approach to the Stabilization of a Flexible Beam With a Tip Mass“. In: *SIAM J. Control Optim.* 39.6 (2001), 1736–1747.
- [Guo02b] B.Z. Guo. „Further Results for a One-dimensional Linear Thermoelastic Equation with Dirichlet-dirichlet Boundary Conditions“. In: *Anziam J.* 43 (2002), S. 449–462.
- [GC01] B.Z. Guo und K.Y. Chan. „Riesz basis generation, Eigenvalues distribution, and exponential stability for a Euler-Bernoulli beam with joint feedback control“. In: *Revista Matematica Complutense* 14.1 (2001), S. 205–229.

- [Guy+13] N. Guy u. a. „A New Attitude Control Design Approach for Flexible Satellites“. In: *19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*. 2013.
- [Haa06] M. Haase. *The Functional Calculus for Sectorial Operators*. 2006.
- [Had02] J. Hadamard. „Sur les problèmes aux Dérivées partielles et leur signification physique“. In: *Princeton University Bulletin* 13 (1902), S. 49–52.
- [HZ04] V. Hagenmeyer und M. Zeitz. „Flachheitsbasierter Entwurf von linearen und nichtlinearen Vorsteuerungen“. In: *at - Automatisierungstechnik* 1 (2004), S. 4–12.
- [HM03] D. Halim und S.O. Reza Moheimani. „An optimization approach to optimal placement of collocated piezoelectric actuators and sensors on a thin plate“. In: *Mechatronics* 13 (2003), S. 27–47.
- [HH11] T. Hanis und M. Hromcik. „Lateral Control for Flexible BWB High-Capacity Passenger Aircraft“. In: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*. Bd. 18. 2011, S. 7233–7237.
- [HSW92] K.B. Hannsgen, O.J. Staffans und R.L. Wheeler. „Rational Approximation Of The Transfer Function Of A Viscoelastic Rod“. In: *Analysis and Optimization of Systems: State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems*. 1992.
- [Hel76] J.W. Helton. „Systems with infinite-dimensional state space: The Hilbert space approach“. In: *Proceedings of the IEEE* 64.1 (Jan. 1976), S. 145–160.
- [Heu92] H. Heuser. *Funktionalanalysis*. 3. Auflage. B. G. Teubner, 1992.
- [HLW08] W. Heywang, K. Lubitz und W. Wersing. *Piezoelectricity: Evolution and Future of a Technology*. Bd. 114. Springer Series in Materials Science. Springer, 2008.
- [Hil06] S. Hildebrandt. *Analysis I*. Springer-Verlag, 2006.
- [Hil48] E. Hille. *Functional Analysis and Semi-Groups*. American Mathematical Society, 1948.
- [HP57] E. Hille und R.S Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups*. Bd. 31. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1957.
- [HYT99] K. Hirata, Y. Yamamoto und A. Tannenbaum. „Computation of the singular values of Toeplitz operators and the gap metric“. In: *Systems & Control Letters* 36 (1999), S. 327–338.
- [HYT00] K. Hirataa, Y. Yamamotob und A. Tannenbaum. „A Hamiltonian-based solution to the two-block H_∞ problem for general plants in H_∞ and rational weights“. In: *Systems & Control Letters* 40 (2000), S. 83–95.
- [HK71] K. Hoffman und R. Kunze. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1971.
- [HH12] J.R. Holton und G.J. Hakim. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. 5th Ed. Acad. Press, 2012.
- [Hor04] H.-G. Horst. „Aktive Schwingungsminderung an elastischen Rotoren mittels piezokeramischer Aktoren“. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2004.

- [How95] J.M. Howie. *Fundamentals of semigroup theory*. Bd. N.S.,12. LMS Monographs. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [Hub10] J.E. Hubbard. *Spatial Filtering for the Control of Smart Structures*. Springer Verlag, 2010.
- [HN01] J.K. Hunter und B. Nachtergaele. *Applied Analysis*. World Scientific, 2001.
- [ID07] O.V. Iftime und M.A. Demetriou. „Optimization problems for a class of switched Pritchard-Salamon systems with applications to moving actuators“. In: *46th IEEE Conference on Decision and Control*. Dez. 2007, S. 206–211.
- [Irs+10] H. Irschik u. a., Hrsg. *Mechanics and Model-Based Control of Smart Materials and Structures*. 1st Japan-Austria Joint Workshop on Mechanics and Model Based Control of Smart Materials and Structures. SpringerWienNewYork, 2010.
- [Ito90] K. Ito. „Finite-Dimensional Compensators for Infinite-Dimensional Systems Via Galerkin-type Approximation“. In: *SIAM J. Control Optim.* 28.6 (Nov. 1990), S. 1251–1269.
- [IM98] K. Ito und K.A. Morris. „An Approximation Theory of Solutions to Operator Riccati Equations for H^∞ Control“. In: *SIAM J. Control Optim.* 36.1 (1998), S. 82–99.
- [JM05] B. Jacob und K. Morris. „Minimum-Phase Infinite-Dimensional SISO Second-Order Systems“. In: *2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on Decision and Control* (Dez. 2005), S. 410–415.
- [JMT07] B. Jacob, K. Morris und C. Trunk. „Minimum-Phase Infinite-Dimensional Second-Order Systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52. 9 (Sep. 2007), S. 1654–1665.
- [JP06] B. Jacob und J.R. Partington. „On controllability of diagonal systems with one-dimensional input space“. In: *Systems & Control Letters* 55.4 (Apr. 2006), S. 321–328.
- [JTW08] B. Jacob, C. Trunk und M. Winklmeier. „Analyticity and Riesz basis property of semigroups associated to damped vibrations“. In: *J.evol.equ.* 8 (Feb. 2008), S. 263–281.
- [JZ01a] B. Jacob und H. Zwart. „Exact observability of diagonal systems with a finite-dimensional output operator“. In: *Systems & Control Letters* 43.2 (Juni 2001), S. 101–109.
- [JZ01b] B. Jacob und H. Zwart. „Exact observability of diagonal Systems with a one-dimensional output operator“. In: *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 11 (2001), S. 1277–1283.
- [JZ02] B. Jacob und H. Zwart. *An Review on Realization Theory for infinite-Dimensional Systems*. <http://wwwhome.math.utwente.nl/~zwarthj/realisatie/jazw02.pdf>. 2002.
- [JN87] C.A. Jacobson und C.N. Nett. „Linear State-Space Systems in Infinite-Dimensional Space: The Role and Characterization of Joint Stabilizability/Detectability“. In: *American Control Conference*. Juni 1987, S. 1425–1435.

- [JN88] C.A. Jacobson und C.N. Nett. „Linear State-Space Systems in Infinite-Dimensional Space: The Role and Characterization of Joint Stabilizability/Detectability“. In: *IEEE Trans. Aut. Contr.* 33.6 (1988), S. 541–549.
- [JP87] A. El Jai und A.J. Pritchard. „Sensors and actuators in distributed Systems“. In: *International Journal of Control* 46 (1987), S. 1139 –1153.
- [JP88] A. El Jai und A.J. Pritchard. *Sensors and Controls in the Analysis of distributed Systems*. Ellis Horwood Limited, 1988.
- [Jai+06] I.M. Jaimoukha u. a. „On the Gap Between the Complex Structured Singular Value and Its Convex Upper Bound“. In: *SIAM J. Control Optim.* 45.4 (2006), S. 1251–1278.
- [Jä04] K. Jänich. *Funktionentheorie: Eine Einführung*. Springer, 2004.
- [Jä05] K. Jänich. *Topologie*. Springer, 2005.
- [Jan07] H. Janocha. *Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design and Applications*. 2.Ed. Springer, 2007.
- [JS00] J.C. Jantzen und J. Schwermer. *Algebra*. Springer-Verlag, 2000.
- [Kab11] W. Kabbalo. *Grundkurs Funktionalanalysis*. Spektrum Akademischer Verlag, 2011.
- [Kab14] W. Kabbalo. *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie: Distributionen - lokal konvexe Methoden - Spektraltheorie*. Springer Spektrum, 2014.
- [Kö75] M. Köhne. „Lineare optimale Regelung elastischer Systeme“. Diss. Universität Stuttgart, 1975.
- [KFA69] R.E. Kalman, P.L. Falb und M.A. Arbib. *Topics in mathematical system theory*. McGraw-Hill: New York, 1969.
- [Kas05] K. Kashima. „General Solution to the Standard H_∞ Control Problems for Infinite-dimensional Systems“. Diss. Kyoto University, 2005.
- [KY08a] K. Kashima und Y. Yamamoto. „Finite Rank Criteria for H_∞ Control of Infinite-Dimensional Systems“. In: *IEEE Trans. Aut. Contr.* 53.4 (2008).
- [KY08b] K. Kashima und Y. Yamamoto. „On standard H_∞ control problems for systems with infinitely many unstable poles“. In: *Systems & Control Letters* 57 (2008), S. 309–314.
- [Kat95] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. 2. Auflage. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1995.
- [Keu92a] B. van Keulen. „Equivalent conditions for the solvability of the infinite-dimensional LQ-problem with unbounded input and output operators“. In: *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 4. 1992, S. 3121–3122.
- [Keu92b] B. van Keulen. „The H_∞ -control problem for Pritchard-Salamon systems“. In: *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 1. 1992, S. 217–218.

- [Kou93] B. van Keulen. *H_∞ -Control for Distributed Parameter Systems: A State Space Approach*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Verlag, 1993.
- [Klo06] S. Klose. „Abschätzung der Miniaturisierbarkeit eines Ultraschall-Dissektors“. Masterarb. TU-Darmstadt, 2006.
- [Klo12] S. Klose. „Systemtheoretische Analyse und Entwurf der modalen Eigendynamik von flexiblen Balken mit variablem Querschnittsverlauf auf Basis des örtlichen Eigenwertproblems“. Diss. TU Darmstadt, 2012.
- [KK75] I. Kluvanek und G. Knowles. *Vector Measures and Control Systems*. North Holland, 1975.
- [Kob78] T. Kobayashi. „Some Remarks on Controllability for Distributed Parameter Systems“. In: *SIAM J. Control Optim.* 16.5 (Sep. 1978), S. 733–742.
- [Koo98] P. Koosis. *Introduction to H_p Spaces*. 2nd Ed. Cambridge University Press, 1998.
- [Kre78] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1978.
- [KZ96] C.R. Kuiper und H.J. Zwart. „Connections between the Algebraic Riccati Equation and the Hamiltonian for Riesz-Spectral Systems“. In: *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* 6.4 (1996), S. 1–48.
- [KS78] S. Kumar und J.H. Seinfeld. „Optimal Location of Measurements for Distributed Parameter Estimation“. In: *IEEE Trans. Aut. Contr* AC-23.4 (1978), S. 690–698.
- [KD07] W.W. Kwok und D.E. Davison. „Implementation of stabilizing control laws - How many controller blocks are needed for a universally good implementation?“ In: *IEEE Control Systems Magazine* 27.1 (Feb. 2007), S. 55–60.
- [Lag78] J. Lagnese. „Exact Boundary Value Controllability of a Class of Hyperbolic Equations“. In: *SIAM J. Control Optim.* 16.6 (1978), S. 1000–1017.
- [Lag91] J. Lagnese. „The Hilbert Uniqueness Method: A Retrospective“. In: Hrsg. von K.-H. Hoffmann und W. Krabs. Bd. 149. *Optimal Control of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1991, S. 158.
- [LS94] P. Lancaster und A.A. Shkalikov. „Damped vibrations of beams and related spectral problems“. In: *Canad. Appl. Math. Quart* 2.1 (1994), S. 45–90.
- [LP09] A. Lanzon und G. Papageorgiou. „Distance Measures for Uncertain Linear Systems: A General Theory“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54.7 (Juli 2009), S. 1532–1547.
- [LT89] I. Lasiecka und R. Triggiani. „Exact controllability of the Euler–Bernoulli equation with controls in the Dirichlet and Neumann boundary conditions: a nonconservative case“. In: *SIAM J. Control Optim.* 27.2 (März 1989), S. 330–373.
- [Lei73] A. Leissa. *Vibration of Shells*. Scientific and Technical Information Office, NASA, 1973.

- [Len+89] K. Lenz u. a. „Robust control design for a flexible beam using a distributed-parameter H_∞ -method“. In: *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 3. Dez. 1989, S. 2673–2678.
- [Len+91] K. Lenz u. a. „Frequency domain analysis and robust control design for an ideal flexible beam“. In: *Automatica* 27.6 (1991), S. 947–961.
- [Les09] I. Lestas. „Distributed power control in wireless networks: stability and delay independence“. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009*. Dez. 2009, S. 7074–7079.
- [LL03] J.H. Lienhard IV und J.H. Lienhard V. *A Heat Transfer Textbook*. Phlogiston Press, 2003.
- [Lio88] J.L. Lions. „Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems“. In: *SIAM Review* 30.1 (1988), S. 1–68.
- [Lit83] L. Litz. „Modale Maße für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit Regelbarkeit und Dominanz - Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege“. In: *Regelungstechnik* 5 (1983), S. 148–157.
- [Log91] H. Logemann. „Circle criteria, small-gain conditions and internal stability for infinite-dimensional systems“. In: *Automatica* 27.4 (1991), S. 677–690.
- [Log92] H. Logemann. „Stabilization and Regulation of Infinite-Dimensional Systems Using Coprime Factorizations“. In: *Analysis and Optimization of Systems: State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems*. 1992.
- [LP61] G. Lumer und R.S. Phillips. „Dissipative operators in a Banach space“. In: *Pacific Journal of Mathematics* 11.2 (1961), S. 679–698.
- [Lun05] J. Lunze. *Regelungstechnik 2*. 3. neu bearb. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2005.
- [Lun06] J. Lunze. *Regelungstechnik 1*. 5. Auflage. Springer, 2006.
- [LGM99] Z.H. Luo, B.-Z. Guo und O. Morgul. *Stability and Stabilization of infinite-dimensional Systems with Application*. Springer, 1999.
- [Mac04] U. Mackenroth. *Robust control systems : Theory and case studies*. Springer, 2004.
- [MJ93] P.G. Maghami und S.M. Joshi. „Sensor/Actuator Placement for Flexible Space Structures“. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 29.2 (Apr. 1993), S. 345–351.
- [Mat09] J. Matthey. *Datenblatt: Biegewandler*. <http://www.piezoproducts.com>. 2009.
- [Meg93] A. Megretski. „On the gap between structured singular values and their upper bounds“. In: *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 4. Dez. 1993, S. 3461–3462.

- [Mei00] L. Meirovitch. *Principles and Techniques of Vibrations*. Prentice Hall, 2000.
- [Mei01] L. Meirovitch. *Fundamentals of Vibrations*. Mc Graw Hill, 2001.
- [MK09] T. Meurer und A. Kugi. „Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: Combining backstepping and differential flatness“. In: *Automatica* 45.5 (2009), S. 1182–1194.
- [MS64] N.G. Meyers und J. Serrin. „ $H = W$ “. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51.6 (1964), S. 1055–1056.
- [Mik02] K.M. Mikkola. „Infinite-Dimensional Linear Systems, Optimal Control and Algebraic Riccati Equations“. Diss. Helsinki University of Technology, 2002.
- [MS02] K.M. Mikkola und O. Staffans. „A Riccati equation approach to the standard infinite-dimensional H_∞ problem“. In: *Proceedings of MTNS2002*. 2002.
- [MR99] S.O.R. Moheimani und T. Ryall. „Considerations on placement of piezoceramic actuators that are used in structural vibration control“. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* 2 (1999), S. 1118–1123.
- [Mon07] E. Monifi. „Root-Locus Theory for Infinite-Dimensional Systems“. Diss. University of Waterloo, 2007.
- [Mor94a] K.A. Morris. „Convergence of controllers designed using state-space techniques“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 39.10 (Okt. 1994), S. 2100–2104.
- [Mor94b] K.A. Morris. „Coprime factorizations for well-posed systems“. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 4. Dez. 1994, S. 3973–3974.
- [Mor94c] K.A. Morris. „Design of Finite-dimensional Controllers for Infinite-dimensional Systems by Approximation“. In: *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* 4.2 (1994), S. 1–30.
- [Mor01] K.A. Morris. „ H_∞ -Output Feedback of Infinite-Dimensional Systems via Approximation“. In: *Systems & Control Letters* 44.3 (Okt. 2001), S. 211–217.
- [Mur+03] R.M. Murray u. a. „Future directions in control in an information-rich world“. In: *IEEE Control Systems* 23.2 (Apr. 2003), S. 20–33.
- [Nar99] T.N. Narasimhan. „Fourier’s Heat Conduction Equation History, Influence And Connections“. In: *Reviews of Geophysics* 37.1 (Feb. 1999), S. 151–172.
- [NS] A.W. Naylor und G.R. Sell. *Linear Operator Theory in Engineering and Science*. Springer-Verlag.
- [NG04] S.-I. Niculescu und K. Gu. *Advances in Time-Delay Systems*. Bd. 38. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2004.
- [NS89] H. Nijmeijer und J.M. Schumacher, Hrsg. *Three Decades of Mathematical System Theory*. Bd. Vol. 135. Lecture Notes in Control and Information Sciences. A Collection of Surveys at the Occasion of the 50th Birthday of Jan C. Willems: Springer Verlag, 1989.

- [Nik02] N.K. Nikolski. *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading Volume I: Hardy, Hankel, and Toeplitz*. Bd. 92. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2002.
- [OK07] T. Oehlschlägel und U. Konigorski. „Beobachterbasiertes modales Regelungskonzept für Riesz-Spektraloperatoren am Beispiel eines Piezoaktors“. In: *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.40 "Theoretische Verfahren der Regelungstechnik*. Hrsg. von A. Kugi und B. Lohmann. GMA-Fachausschuss 1.40 "Theoretische Verfahren der Regelungstechnik. VDI. Salzburg, Sep. 2007, S. 150–161.
- [ÖT89] H. Özbay und A. Tannenbaum. „A solution to the standard H_∞ problem for multivariable distributed systems“. In: *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 2. 1989, S. 1444–1445.
- [ÖT90] H. Özbay und A. Tannenbaum. „A Skew Toeplitz Approach to the H_∞ -Optimal Control of Multivariable Distributed Systems“. In: *SIAM J. Control Optim.* 28 (1990), S. 653–670.
- [ÖST90a] H. Özbay, M.C. Smith und A. Tannenbaum. „Controller Design for Unstable Distributed Plants“. In: *Proceedings of the 1990 American Control Conference 2* (Mai 1990), S. 1583–1588.
- [ÖST90b] H. Özbay, M.C. Smith und A. Tannenbaum. „On the two block problem for unstable distributed systems“. In: *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*. Bd. 3. 1990, S. 1163–1167.
- [Özb92] H. Özbay. *H_∞ Optimal Controller Design for a Class of Distributed Parameter Systems*. Techn. Ber. No. 1049. IMA Preprint Series, 1992.
- [ÖST92] H. Özbay, M.C. Smith und A. Tannenbaum. „On the optimal two block H_∞ compensators for distributed unstable plants“. In: *American Control Conference*. Bd. 2. 1992, S. 1865–1869.
- [ÖST93] H. Özbay, M.C. Smith und A. Tannenbaum. „Mixed-sensitivity optimization for a class of unstable infinite-dimensional systems“. In: *Linear Algebra and its Applications* 178 (1993), S. 43–83.
- [Özb06] H. Özbay. „Robust Control of Infinite Dimensional Systems: Theory and Applications“. In: *Proc. of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. MTNS 2006. Kyoto, Japan, Juli 2006.
- [OKS78] S. Omatu, S. Koide und T. Soeda. „Optimal Sensor Location Problem for a Linear Distributed Parameter System“. In: *IEEE Trans. Aut. Contr* AC-23.4 (1978), S. 665–673.
- [Oos99] J.C. Oostveen. „Strongly Stabilizable Infinite-Dimensional Systems“. Diss. Rijksuniversiteit Groningen, 1999.
- [PD93] A. Packard und J. Doyle. „The complex structured singular value“. In: *Automatica* 29.1 (1993), S. 71–109.

- [Par07] J. R. Partington. *An Introduction to Hankel Operators*. Cambridge University Press, 2007.
- [Par+88] J.R. Partington u. a. „ L_∞ approximation and nuclearity of delay systems“. In: *Systems & Control Letters* 10.1 (1988), S. 59–65.
- [Pau03] V. Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. Cambridge Studies In Advanced Mathematics 78. Cambridge University Press, 2003.
- [Paz83] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Bd. 44. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1983.
- [Pel03] V.V. Peller. *Hankel Operators and their Applications*. Springer Verlag, 2003.
- [Per07] B. Perthame. *Transport Equations in Biology*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, 2007.
- [Phi59] R.S. Phillips. „Dissipative Operators and Hyperbolic Systems of Partial Differential Equations“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 90 (1959), S. 193–254.
- [Pon05] J.L. Pons. *Emerging Actuator Technologies: A Micromechatronic Approach*. John Wiley & Sons, 2005.
- [PS87a] G. da Prato und E. Sinestrari. „Differential operators with non dense domain“. English. In: *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.* 14.2 (1987), S. 285–344.
- [PP01] E. Prempain und I. Postlethwaite. „Feedforward control: a full-information approach“. In: *Automatica* 37.1 (2001), S. 17–28.
- [PS85] A.J. Pritchard und D. Salamon. „The Linear-Quadratic Control Problem for Retarded Systems with Delays in Control and Observation“. In: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 2.4 (1985), S. 335–362.
- [PS87b] A.J. Pritchard und D. Salamon. „The Linear Quadratic Control Problem for Infinite Dimensional Systems with Unbounded Input and Output Operators“. In: *SIAM J. Control Optim.* 25.1 (1987), S. 121–144.
- [PW78] A.J. Pritchard und A. Wirth. „Unbounded Control and Observation Systems and Their Duality“. In: *SIAM J. Control Optim.* 16.4 (Juli 1978), S. 535–545.
- [QV94] A. Quarteroni und A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Berlin / Heidelberg, 1994.
- [Rai94] J. Raisch. *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. Oldenbourg Verlag, 1994.
- [Reb91] R. Rebarber. „Conditions for the equivalence of internal and external stability for distributed parameter systems“. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 3. Dez. 1991, S. 3008–3013.
- [Reb93] R. Rebarber. „Conditions for the equivalence of internal and external stability for distributed parameter systems“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 38.6 (1993), S. 994–998.

- [RW00] R. Rebarber und G. Weiss. „Necessary conditions for exact controllability with a finite-dimensional input space“. In: *Systems & Control Letters* 40. 3 (Juli 2000), S. 217–227.
- [RS80] M. Reed und B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics - Functional Analysis*. Acadmic Press, 1980.
- [RS07] R. Remmert und G. Schumacher. *Funktionentheorie 2*. Springer, 2007.
- [RR04] M. Renardy und R.C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*. Springer-Verlag, 2004.
- [Rob01] J.C. Robinson. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2001.
- [Rob+10] B. Robu u. a. „Simultaneous H_∞ vibration control of fluid/plate system via reduced-order controller“. In: *Proceedings of the 49th Conference on Decision and Control*. 2010.
- [Rog94] N.N. Rogacheva. *The theory of piezoelectric shells and plates*. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- [Rom08] S. Roman. *Advanced Linear Algebra*. 3rd. Ed. Graduate Texts in Mathematics 135. Springer, 2008.
- [Ros03] M. Rose. „Modellbildung und Simulation von Autobahnverkehr“. Diss. Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover, 2003.
- [RR85] M. Rosenblum und J. Rovnyak. *Hardy Classes and Operator Theory*. Oxford University Press, 1985.
- [RRZ97] R. Rothfuß, J. Rudolph und M. Zeitz. „Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlineare Systeme“. In: *at - Automatisierungstechnik* 45 (1997), S. 517–525.
- [RSVS06] F.J. Rubio-Sierra, R. Vazquez und R.W. Stark. „Transfer Function Analysis of the Micro Cantilever Used in Atomic Force Microscopy“. In: *IEEE Transactions on Nanotechnology* 5.6 (Nov. 2006), S. 692 –700.
- [Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis*. 2nd. Ed. Mc Graw Hill, 1991.
- [RW94] David L. Russell und G. Weiss. „A General Necessary Condition for Exact Observability“. In: *SIAM J. Control Optim.* 32.1 (1994), S. 1–23.
- [Rus78] D.L. Russell. „Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations: Recent Progress and Open Questions“. In: *SIAM Review* 20.4 (1978), S. 639–739.
- [SD84] M.G. Safonov und J.C. Doyle. „Minimizing Conservativeness of Robustness Singular Values“. In: *Multivariable Control*. Springer Netherlands, 1984, S. 197–207.

- [Sal85] D. Salamon. „An abstract framework for infinite dimensional systems with unbounded control and observation“. In: *Distributed Parameter Systems*. Bd. 75. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 1985, S. 324–339.
- [Sal87] D. Salamon. „Infinite Dimensional Linear Systems With Unbounded Control and Observation: A Functional Analytic Approach“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 300.2 (Apr. 1987), S. 383–431.
- [Sal89] D. Salamon. „Realization theory in Hilbert space“. In: *Theory of Computing Systems* 21.1 (Dez. 1989), S. 147–164.
- [Sas01] A. Sasane. „Hankel norm approximation for infinite-dimensional systems“. Diss. Rijksuniversiteit Groningen, 2001.
- [Sas02] A. Sasane. *Hankel norm approximation for infinite-dimensional systems*. Springer, 2002.
- [SC00] A.J. Sasane und R.F. Curtain. „Optimal Hankel Norm Approximation for the Pritchard-Salamon Class of Non-Exponentially Stable Infinite-Dimensional Systems“. In: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 5. Sydney, NSW, 2000, S. 4594–4599.
- [SC02] A.J. Sasane und R.F. Curtain. „Sub-optimal Hankel norm approximation for the analytic class of infinite-dimensional systems“. In: *Integral Equations and Operator Theory* 43.3 (2002), S. 356–377.
- [Sau05] F. Sauvigny. *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik 2: Funktionalanalytische Lösungsmethoden*. Bd. 2. Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik. Berlin: Springer, 2005.
- [SW04] C. Scherer und S. Weiland. *Linear Matrix Inequalities in Control*. 2004.
- [Sch11] J. Schlake. „Modellbildung, Systemanalyse und Reglerentwurf örtlich verteilter Systeme basierend auf numerischen Approximationsmodellen“. Diss. Institut für Automatisierungstechnik, TU Darmstadt, 2011.
- [Sch+05] J.C. Schlake u. a. „Modellierung einer Direkt-Methanol-Brennstoffzelle“. In: *at - Automatisierungstechnik* (2005), S. 70–78.
- [Sch04] A.J. Schmid. *Overview on the Application of Piezoceramics Bending Actuators*. Okt. 2004.
- [Sch83] J.M. Schumacher. „A Direct Approach to Compensator Design for Distributed Parameter Systems“. In: *SIAM J. Control Optim.* 21.6 (1983), S. 823–836.
- [Sch09] M. Schwartz, Hrsg. *Smart Materials*. CRC Press, 2009.
- [Sei00] T.I. Seidman. „Control of the Heat Equation“. In: *The Control Handbook (Volume I)*. CRC Press, 2000, S. 1157–1168.

- [SO90] R.S. Sezginer und M.L. Overton. „The largest singular value of $e^X A_0 e^{-X}$ is convex on convex sets of commuting matrices“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 35.2 (1990), S. 229–230.
- [Shu05] M.A. Shubov. „Exact controllability of damped Euler-Bernoulli and Timoshenko beam model“. In: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* (2005), S. 1–22.
- [Shu06] M.A. Shubov. „Riesz basis property of mode shapes for aircraft wing model (subsonic case)“. In: *Proc. R. Soc. A* 462 (2006), S. 607–646.
- [Shu07] M.A. Shubov. „Exact controllability of nonselfadjoint Euler-Bernoulli beam model via spectral decomposition method“. In: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* (Jan. 2007), S. 1–19.
- [Shu+97] M.A. Shubov u. a. „Exact Controllability of the Damped Wave Equation“. In: *SIAM J. Control Optim.* 35.5 (1997), S. 1773–1789.
- [SP05] S. Skogestad und I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control - Analysis and Design*. John Wiley & Sons, 2005.
- [Soe93] W. Soedel. *Vibrations of Shells and Plates*. 2nd Ed. Marcel Dekker, Inc., 1993.
- [SYB12] C.K. Soh, Y. Yang und S. Bhalla, Hrsg. *Smart Materials in Structural Health Monitoring, Control and Biomechanics*. Advanced Topics In Science And Technology In China. Springer, 2012.
- [Sta97] O.J. Staffans. *Quadratic Optimal Control of Regular Well-Posed Linear Systems, with Applications to Parabolic Equations*. 1997.
- [Sta98a] O.J. Staffans. „Coprime factorizations and well-posed linear systems“. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 3. 1998, S. 2751–2756.
- [Sta98b] O.J. Staffans. „Coprime Factorizations And Well-Posed Linear Systems“. In: *SIAM J. Control Optim.* 36 (1998), S. 1268–1292.
- [Sta98c] O.J. Staffans. „Feedback Representations of Critical Controls for Well-Posed Linear Systems“. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 8 (1998), S. 1189–1217.
- [Sta98d] O.J. Staffans. „On the Distributed Stable Full Information H_∞ Minimax Problem“. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* (1998), S. 8–1255.
- [Sta98e] O.J. Staffans. „Quadratic optimal control of well-posed linear systems“. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 1. 1998, S. 644–649.
- [Sto00] A.A. Stoorvogel. *The H_∞ control problem: a state space approach*. Department of Electrical Engineering und Computer Science University of Michigan, 2000.
- [Str95] W.A. Strauss. *Partielle Differentialgleichungen: Eine Einführung*. Vieweg, 1995.

- [Sun+07] K. Sundmacher u. a. *Molten Carbonate Fuel Cells: Modeling, Analysis, Simulation, and Control*. Wiley-VCH, Aug. 2007.
- [Tan91] A. Tannenbaum. „Computational methods for the H_∞ control of distributed systems“. In: Bd. 3. Dez. 1991, S. 2721–2722.
- [Tan95] A. Tannenbaum. „Robust optimization of distributed parameter systems“. In: *Smart Structures and Materials 1995: Mathematics and Control in Smart Structures*. Hrsg. von V. V. Varadan. 1995.
- [TZF86] A. Tannenbaum, G. Zames und C. Foias. „ H_∞ -optimization theory for distributed systems“. In: *1986 25th IEEE Conference on Decision and Control* 25 (Dez. 1986), S. 899–904.
- [Tar06] L. Tartar. *An Introduction to Navier Stokes Equation and Oceanography*. Springer, 2006.
- [Tem97] R. Temam. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer, 1997.
- [Tha11] R.K.M. Thambynayagam. *The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers*. McGraw-Hill Professional, 2011.
- [Tri78] H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. North Holland Publishing Company, 1978.
- [Tri75] R. Triggiani. „On the stabilizability problem in Banach space“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 52.3 (1975), S. 383–403.
- [Tuc96] M. Tucsnak. „Regularity and Exact Controllability for a Beam With Piezoelectric Actuator“. In: *SIAM J. Control Optim.* 34.3 (1996), S. 922–930.
- [TW00] M. Tucsnak und G. Weiss. „Simultaneous Exact Controllability and Some Applications“. In: *SIAM J. Control Optim.* 38.5 (2000), S. 1408–1427.
- [TW03a] M. Tucsnak und G. Weiss. „How To Get A Conservative Well-Posed Linear System Out Of Thin Air. Part I: Well-Posedness And Energy Balance“. In: *ESAIM-COCV (Control and Calculus of Variations)* 9 (2003), S. 247–274.
- [TW03b] M. Tucsnak und G. Weiss. „How to Get a Conservative Well-Posed Linear System Out of Thin Air. Part II. Controllability and Stability“. In: *SIAM J. Control Optim.* 42.3 (2003), S. 907–935.
- [TW09] M. Tucsnak und G. Weiss. *Observation and Control for Operator Semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts / Basler Lehrbücher. Birkhäuser, 2009.
- [VVG06] Vijay K. Varadan, K.J. Vinoy und S. Gopalakrishnan. *Smart Material Systems and MEMS: Design and Development Methodologies*. John Wiley & Sons, 2006.
- [Vid75] M. Vidyasagar. „Coprime Factorizations and Stability of Multivariable Distributed Feedback Systems“. In: *SIAM Journal on Control* 13.6 (1975), S. 1144–1155.

- [Vid82a] M. Vidyasagar. „Algebraic and Topological Aspects of Feedback Stabilization“. In: *IEEE Trans. Aut. Contr* 27 (1982), S. 880–895.
- [Vid82b] M. Vidyasagar. „The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability“. In: *21st IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 21. Dez. 1982, S. 148–151.
- [Vid84] M. Vidyasagar. „The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability“. In: *IEEE Transaction On Automatic Control* 29.5 (Mai 1984), S. 403–418.
- [Vid87] M. Vidyasagar. *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. The MIT Press, 1987.
- [VS97] R. Vilanova und I. Serra. „Realisation of two-degrees-of-freedom compensators“. In: *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* 144.6 (Nov. 1997), S. 589–595.
- [Vin01] G. Vinnicombe. *Uncertainty and Feedback H_∞ loop-shaping and the ν -gap metric*. Imperial College Press, 2001.
- [VKZ07] D. Vries, K.J. Keesman und H. Zwart. „A Luenberger observer for an infinite dimensional bilinear system: A UV disinfection example“. In: *3rd IFAC Symposium on Power System, Structure and Control*. Bd. 3. System, Structure and Control. Mabu Thermas Convention Center, Brazil: International Federation of Automatic Control, 2007, S. 667–672.
- [Wan00] P.K.C. Wang. „Optimal Sensor Placement in Micro-distributed Systems“. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Chicago, Illinois, Juni 2000, S. 4011–4013.
- [Wei] J. Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen Teil 1 Grundlagen*. B.G. Teubner.
- [Wei89] G. Weiss. „Admissibility of Unbounded Control Operators“. In: *SIAM J. Control Optim.* 27.3 (1989), S. 527–545.
- [Wei94] G. Weiss. „Transfer Functions of Regular Linear Systems. Part I: Characterizations of Regularity“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 342.2 (Apr. 1994), S. 827–854.
- [Wer06] D. Werner. *Einführung in die höhere Analysis*. Springer Verlag, 2006.
- [Wer11] D. Werner. *Funktionalanalysis*. 4. Auflage. Springer-Verlag, 2011.
- [Wlo82] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen: Sobolovräume und Randwertaufgaben*. B.G. Teubner, 1982.
- [Wys10] C. Wyss. „Riesz bases for p-subordinate perturbations“. In: *Journal of Functional Analysis* 258 (2010), S. 208–240.
- [XB99a] M. Xiao und T. Basar. „Finite-Dimensional Compensators for the H_∞ -Optimal Control of Infinite-Dimensional Systems via a Galerkin-type Approximation“. In: *SIAM J. Control Optim.* 37.5 (1999), S. 1614–1647.

- [XB99b] M. Xiao und T. Basar. „Finite-Dimensional Compensators for the H_∞ Optimal control of infinite-dimensional system via a Galerkin-type approximation“. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 2. 1999, S. 1095–1100.
- [XW11] C.-Z. Xu und G. Weiss. „Eigenvalues and eigenvectors of semigroup generators obtained from diagonal generators by feedback“. In: *Communications in Information and Systems* 11 (2011), S. 71–104.
- [XG03] G.-Q. Xu und B.-Z. Guo. „Riesz Basis Property Of Evolution Equations In Hilbert Spaces And Application To A Coupled String Equation“. In: *SIAM J. Control Optim.* 42 (2003), S. 966–984.
- [Yam81] Y. Yamamoto. „Realization Theory of Infinite-Dimensional linear Systems - Part I“. In: *Mathematical Systems Theory* 15.1 (1981), S. 55–77.
- [Yam82] Y. Yamamoto. „Realization Theory of Infinite-Dimensional Linear Systems. Part II“. In: *Mathematical Systems Theory* 15.2 (1982), S. 169–190.
- [YH91] Y. Yamamoto und S. Hara. „Internal and External Stability and Robust Stability Condition for a Class of Infinite-Dimensional Systems“. In: *Automatica* 28 (1991), S. 81–93.
- [YHT96] Y. Yamamoto, K. Hirata und A. Tannenbaum. „Some Remarks on Hamiltonians and the Infinite-dimensional One Block H_∞ -Problem“. In: *Systems & Control Letters* 29.2 (1996), S. 111–117.
- [Yos80] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer Verlag, 1980.
- [YD90] P.M. Young und J.C. Doyle. „Computation of μ with real and complex uncertainties“. In: *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*. Dez. 1990, S. 1230–1235.
- [You80] R.M. Young. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*. Acad. Press, 1980.
- [Zam81] G. Zames. „Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses“. In: *IEEE Trans. Aut. Contr* AC-26 (1981), S. 301–320.
- [ZES80] G. Zames und A.K. El-Sakkary. „Unstable systems and feedback: The gap metric“. In: *Proc. Allerton Conf.* 1980, S. 380–385.
- [Zei95] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*. Bd. 108. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1995.
- [Zei10] M. Zeitz. „Differenzielle Flachheit: Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-Systeme“. In: *at - Automatisierungstechnik* 1 (2010), S. 5–13.
- [Zha11] G.-D. Zhang. „Spectral Analysis And Riesz Basis Property For Vibrating Systems With Damping“. Diss. School of Computational und Applied Mathematics, University of the Witwatersrand, 2011.
- [ZD98] K. Zhou und J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, 1998.

- [ZDG95] K. Zhou, J.C. Doyle und K. Glover. *Robust And Optimal Control*. Prentice Hall, 1995.
- [Zhu89] S. Zhu. „Robustness of Feedback Stabilization: A Topological Approach“. Diss. Technische Universiteit Eindhoven, 1989.
- [ZF97] R. Zurmühl und S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen 1 Grundlagen. Für Ingenieure, Physiker und Angewandte Mathematiker*. 7. Auflage. Springer Verlag, 1997.